BURHAN

Examen national du baccalauréat, session normale 2022

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/examens/2022-session-normale

Année	Session	Type	Durée	Coefficient	Barème
2022	Session normale	Examen national	3h	7	20 pts (barème officiel)

INSTRUCTIONS GENERALES

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie de l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	3 points
Exercice 4	Equations différentielles et calcul intégral	2.5 points
Problème	Etude de fonctions numériques et suites numériques	8.5 points

- On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z et $|z|$ son module
- ln désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 — 3 pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(0,1,1)$, $B(1,2,0)$ et $C(-1,1,2)$

1) a) — 0,5 pts

Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{k}$

1) b) — 0,25 pts

En déduire que $x+z-1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

2) — 0,5 pts

Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1,1,2)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$

Déterminer une équation de la sphère (S)

3) — 0,5 pts

Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A

4) a) — 0,25 pts

4. On considère la droite (Δ) passant par le point C et perpendiculaire au plan (ABC)

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ)

4) b) — 0,5 pts

Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) en un point D dont on déterminera les coordonnées

4) c) — 0,5 pts

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}\cdot\left(\vec{i}+\vec{k}\right)$, puis en déduire la distance $d\left(A,(\Delta)\right)$

Exercice 2 — 3 pts

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe $a = -1 - i\sqrt{3}$, le point B d'affixe $b = -1 + i\sqrt{3}$ et la translation t de vecteur $\overrightarrow{OA}$

1) — 0,5 pts

Prouver que l'affixe du point D image du point B par la translation t est $d = -2$

2) — 0,5 pts

On considère la rotation R de centre D et d'angle $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

Montrer que l'affixe du point C image du point B par la rotation R est $c = -4$

3) a) — 0,5 pts

Ecrire le nombre $\frac{b-c}{a-c}$ sous forme trigonométrique

3) b) — 0,5 pts

En déduire que $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = \frac{c-d}{b-d}$

4) a) — 0,25 pts

4. Soient (Γ) le cercle de centre D et de rayon 2 , (Γ') le cercle de centre O et de rayon 4 et M un point d'affixe z appartenant aux deux cercles (Γ) et (Γ')

Vérifier que $|z + 2| = 2$

4) b) — 0,5 pts

Prouver que $z + \overline{z} = -8$ (remarquer que $|z| = 4$)

4) c) — 0,25 pts

En déduire que les cercles (Γ) et (Γ') se coupent en un point unique qu'on déterminera

Exercice 3 — 3 pts

Une urne contient dix boules : trois boules blanches, trois boules vertes et quatre boules rouges indiscernables au toucher. On tire au hasard simultanément trois boules de l'urne.

1) — 0,75 pts

Montrer que $p(A) = \frac{1}{6}$; où A est l'évènement " N'obtenir aucune boule rouge "

2) — 0,75 pts

Calculer $p(B)$; où B est l'évènement " Obtenir trois boules blanches ou trois boules vertes "

3) — 0,75 pts

Montrer que $p(C) = \frac{1}{2}$; où C est l'évènement " Obtenir exactement une boule rouge "

4) — 0,75 pts

Calculer $p(D)$; où D est l'évènement " Obtenir au moins deux boules rouges "

Exercice 4 — 2,5 pts

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x+1)e^x$

1) a) — 0,75 pts

Vérifier que $x \mapsto xe^x$ est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$; puis calculer $I = \int_{-1}^{0} h(x)\,dx$

1) b) — 0,75 pts

A l'aide d'une intégration par parties calculer $J = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 e^x\,dx$

2) a) — 0,5 pts

Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = 0$

2) b) — 0,5 pts

Montrer que la fonction h est la solution de (E) qui vérifie les conditions $h(0) = 1$ et $h'(0) = 2$

Problème 8,5 pts

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité : $1cm$)

1) 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat

3) a) 0,5 pts

Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

3) b) 0,75 pts

Etudier le signe de $(f(x) - x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ)

4) a) 0,5 pts

Montrer que $f'(x) = \left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 + xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

4) b) 0,5 pts

Vérifier que $x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right) \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$

4) c) 0,25 pts

Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

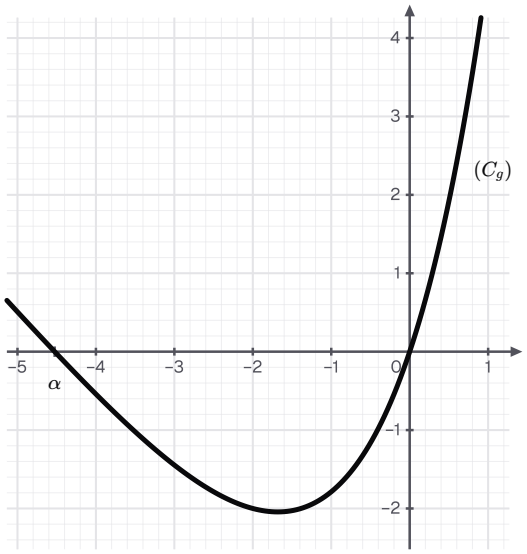
5) a) 0,5 pts

Montrer que $f''(x) = \dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$; où

$g(x) = (2x + 4)\,e^{\frac{x}{2}} - x - 4$ pour tout x de $\mathbb{R}$

5) b) 0,5 pts

A partir de la courbe ci-contre de la fonction g , déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ (Remarque : $g(\alpha) = 0$)



La courbe (C_g) de la fonction g, dans un repère orthonormé.

5) c) 0,5 pts

Etudier la concavité de la courbe (C) et déterminer les abscisses des deux points d'inflexions.

6) 1 pts

Construire la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

(On prend : $\ln(4) \approx 1{,}4$, $\alpha \approx -4{,}5$ et $f(\alpha) \approx -3{,}5$)

7) a) 0,5 pts

Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$

7) b) 0,25 pts

Calculer $\left(f^{-1}\right)'(\ln 4)$

8) a) 0,5 pts

8. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Montrer par récurrence que $0 < u_n < \ln 4$ pour tout n de $\mathbb{N}$

8) b) 0,5 pts

Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

8) c) 0,25 pts

En déduire que la suite (u_n) est convergente.

8) d) 0,5 pts

Calculer la limite de la suite (u_n) .

SOURCES

Centre national de l'évaluation et des examens · Examen national du baccalauréat, mathématiques, sciences expérimentales, option française · 2022