BURHAN

# Examen national du baccalauréat, session de rattrapage 2021

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/examens/2021-session-rattrapage

| Année | Session | Type | Durée | Coefficient | Barème |
|---|---|---|---|---|---|
| 2021 | Session de rattrapage | Examen national | 3h | 7 | 20 pts (barème officiel) |

**INSTRUCTIONS GENERALES**

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

**COMPOSANTES DU SUJET**

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

| | | |
|---|---|---|
| Exercice 1 | Suites numériques | 4 points |
| Exercice 2 | Nombres complexes | 5 points |
| Exercice 3 | fonctions numériques | 3 points |
| Problème | Etude de fonctions numériques et calcul intégral | 8 points |

- ln désigne la fonction logarithme népérien

## Exercice 1 — 4 pts

Soit $(u_n)$ la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{3-u_n}$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$

### 1) — 0,5 pts

Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ , $0 < u_n < 1$

INDICE

Raisonner par récurrence et écrire $1 - u_{n+1}$ en fonction de $u_n$.

### 2) a) — 0,5 pts

Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)^2}{3 - u_n}$

### 2) b) — 0,5 pts

Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente.

### 3) a) — 0,75 pts

3. On pose $v_n = \frac{1}{1-u_n}$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$

Montrer que $(v_n)$ est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme.

INDICE

Utiliser l'égalité $1 - u_{n+1} = \frac{2(1-u_n)}{3-u_n}$ obtenue à la question 1).

### 3) b) — 0,75 pts

Déterminer $v_n$ en fonction de $n$ et en déduire que $u_n = \frac{n+1}{n+3}$, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$

### 3) c) — 0,5 pts

Calculer la limite de la suite $(u_n)$

### 4) — 0,5 pts

A partir de quelle valeur de $n$, a-t-on $u_n \geq \frac{1011}{1012}$ ?

## Exercice 2 — 5 pts

**1)** — 0,75 pts

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - 6z + 13 = 0$

**2) a)** — 0,5 pts

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A$ , $B$ et $C$ d'affixes respectives $a, b$ et $c$ telles que: $a = 3 + 2i$ ; $b = 3 - 2i$ et $c = -1 - 2i$

Ecrire $\dfrac{c-b}{a-b}$ sous forme trigonométrique.

**2) b)** — 0,5 pts

En déduire la nature du triangle $ABC$

**3) a)** — 0,5 pts

3. Soit $R$ la rotation de centre $B$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ . Soit $M$ un point du plan d'affixe $z$ et le point $M'$ d'affixe $z'$ l'image de $M$ par $R$, et soit $D$ le point d'affixe $d = -3 - 4i$

Ecrire $z'$ en fonction de $z$

**3) b)** — 0,25 pts

Vérifier que $C$ est l'image de $A$ par $R$

**4) a)** — 0,5 pts

Montrer que les points $A, C$ et $D$ sont alignés.

**4) b)** — 0,5 pts

Déterminer le rapport de l'homothétie $h$ de centre $C$ et qui transforme $A$ en $D$

**4) c)** — 0,5 pts

Déterminer l'affixe $m$ du point $E$ pour que le quadrilatère $BCDE$ soit un parallélogramme

**5) a)** — 0,5 pts

Montrer que $\dfrac{d-a}{m-b}$ est un nombre réel.

**5) b)** — 0,5 pts

En déduire que le quadrilatère $ABED$ est un trapèze isocèle.

## Exercice 3 — 3 pts

On considère la fonction numérique $h$ définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = x + \ln x$

**1)** — 0,5 pts

Montrer que la fonction $h$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

**2)** — 0,5 pts

Déterminer $h\left(]0;+\infty[\right)$

**3) a)** — 0,5 pts

En déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ sur $]0;+\infty[$

**3) b)** — 0,5 pts

Montrer que $0 < \alpha < 1$

**4) a)** — 0,5 pts

Vérifier que $h\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$

**4) b)** — 0,5 pts

En déduire que $h\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) > 2$

## Problème 8 pts

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 - xe^{-x+1}$

et $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 $cm$ )

**1)** 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.

**2) a)** 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

**2) b)** 0,75 pts

Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

**3) a)** 0,75 pts

Montrer que pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ : $f'(x) = (x-1)e^{-x+1}$

**3) b)** 0,5 pts

Dresser le tableau de variations de la fonction $f$

**4) a)** 0,5 pts

Calculer $f''(x)$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$

**4) b)** 0,5 pts

Montrer que la courbe $(C)$ admet un point d'inflexion d'abscisse $2$

**5)** 1 pts

Construire la courbe $(C)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on prend : $f(2) \simeq 1{,}25$)

**6)** 0,5 pts

Déterminer la valeur minimale de la fonction $f$ et en déduire que pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ , $e^{x-1} \geq x$

**7) a)** 0,5 pts

En utilisant une intégration par parties, calculer : $\displaystyle\int_0^2 xe^{-x}\,dx$

**7) b)** 0,5 pts

En déduire que $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx = 4 - e + 3e^{-1}$

**8) a)** 0,5 pts

8. Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $]-\infty, 1]$

Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ à déterminer.

**8) b)** 0,75 pts

Construire la courbe représentative de $g^{-1}$ dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

**8) c)** 0,25 pts

A partir de la courbe représentative de $g^{-1}$ , déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left( \dfrac{g^{-1}(x)}{x} \right)$

SOURCES

Centre national de l'évaluation et des examens · Examen national du baccalauréat, mathématiques, sciences expérimentales, option française · 2021