BURHAN

Examen national du baccalauréat, session normale 2021

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/examens/2021-session-normale

Année	Session	Type	Durée	Coefficient	Barème
2021	Session normale	Examen national	3h	7	20 pts (barème officiel)

INSTRUCTIONS GENERALES

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	fonctions numériques	2 points
Exercice 2	suites numériques	4 points
Exercice 3	Nombres complexes	5 points
Problème	Etude de fonctions numériques et calcul intégral	9 points

- On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
- ln désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 — 2 pts

1) a) — 0,5 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x} - 4e^{x} + 3 = 0$

INDICE

Poser $t = e^{x}$: on a $e^{2x} = t^{2}$ et $t > 0$.

1) b) — 0,5 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{2x} - 4e^{x} + 3 \leq 0$

1) c) — 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 4e^{x} + 3}{e^{2x} - 1}$

INDICE

Factoriser le numérateur (question 1) a)) et le dénominateur, qui est une différence de deux carrés.

2) — 0,5 pts

Montrer que l'équation $e^{2x} + e^{x} + 4x = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[-1, 0]$

INDICE

Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $\varphi(x) = e^{2x} + e^{x} + 4x$ sur $[-1, 0]$.

Exercice 2 — 4 pts

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) — 0,25 pts

Calculer u_1

2) — 0,5 pts

Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$

3) a) — 0,5 pts

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$

3) b) — 0,5 pts

En déduire la monotonie de la suite (u_n)

4) a) — 0,75 pts

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$; puis calculer la limite de la suite (u_n)

4) b) — 0,5 pts

On pose $v_n = \ln(3 - 2u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $\lim v_n$

5) a) — 0,5 pts

Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$

5) b) — 0,5 pts

En déduire u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$

Exercice 2 — 5 pts

1) — 0,75 pts

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

2) a) — 0,25 pts

2. Soient les nombres complexes $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ecrire a sous forme algébrique .

2) b) — 0,5 pts

Vérifier que $\overline{a}b = \sqrt{3}$

3) — 0,5 pts

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A ,B et C d'affixes respectives a , b et $\overline{a}$.

Montrer que le point B est l'image du point A par une homothétie h de centre O dont on déterminera le rapport.

INDICE

Multiplier l'égalité $\overline{a}\,b = \sqrt{3}$ par a, en utilisant $a\overline{a} = |a|^2$.

4) a) — 0,5 pts

4. Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Ecrire z' en fonction de z et a .

4) b) — 0,25 pts

Soit d l'affixe du point D image de C par la rotation R, montrer que $d = a + 1$

4) c) — 0,5 pts

Soit I le point d'affixe le nombre 1 , montrer que $ADIO$ est un losange .

5) a) — 0,75 pts

Vérifier que $d - b = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1 - i)$; en déduire un argument du nombre $d - b$

5) b) — 0,5 pts

Ecrire le nombre $1 - b$ sous forme trigonométrique.

5) c) — 0,5 pts

Déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD}}\right)$

Problème 9 pts

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(0)=0$ et $f(x)=2x\ln x-2x$ si $x>0$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : 1cm)

1) 0,5 pts

Montrer que f est continue à droite au point 0.

2) a) 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) b) 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat

3) a) 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat

3) b) 0,5 pts

Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$

3) c) 0,5 pts

Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0,+\infty[$

4) a) 0,5 pts

Résoudre dans l'intervalle $]0,+\infty[$ les équations $f(x)=0$ et $f(x)=x$

4) b) 1 pts

Construire la courbe (C) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (on prend $e^{\frac{3}{2}}\simeq 4.5$)

5) a) 0,5 pts

En utilisant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx=\frac{1+e^2}{4}$

5) b) 0,5 pts

En déduire : $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx$

6) a) 0,25 pts

Déterminer le minimum de f sur $]0,+\infty[$

6) b) 0,5 pts

En déduire que pour tout x de $]0,+\infty[$, $\ln x\geq\dfrac{x-1}{x}$

7) a) 0,5 pts

7. Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $[1, +\infty[$

Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

7) b) 0,75 pts

Construire dans le même repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ la courbe représentative de la fonction g^{-1}

8) a) 0,5 pts

8. on considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} h(x) = x^3 + 3x & ; \ x \leq 0 \\ h(x) = 2x \ln x - 2x & ; \ x > 0 \end{cases}$

Etudier la continuité de h au point 0

8) b) 0,5 pts

Etudier la dérivabilité de la fonction h à gauche au point 0 puis interpréter géométriquement le résultat.

8) c) 0,25 pts

La fonction h est-elle dérivable au point 0 ? justifier.

SOURCES

Centre national de l'évaluation et des examens · Examen national du baccalauréat, mathématiques, sciences expérimentales, option française · 2021