BURHAN

Équations différentielles : fiche de révision

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/equations-differentielles/resume

Chapitre	Semestre
Équations différentielles	Semestre 2

L'essentiel du chapitre

À retenir : Six réflexes

- **Isole y' d'abord** : tu lis a et b seulement sur la forme $y' = ay + b$.
- **Premier ordre** : une seule constante λ, fixée par une condition $f(x_0) = y_0$.
- **Second ordre** : l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ choisit la forme des solutions, selon le signe de Δ.
- **Deux constantes** α et β au second ordre, donc deux conditions : une sur $f(x_0)$, une sur $f'(x_0)$.
- **Second membre** : avec une solution h connue, la fonction $z = y - h$ vérifie l'équation sans second membre.
- **Vérifier n'est pas résoudre** : remplacer une fonction dans l'équation prouve qu'elle est solution, pas qu'elle est la seule.

Ce que tu peux justifier, et ce que tu appliques sans preuve. Ces statuts sont proposés par BURHAN ; ton professeur peut, par exemple, faire admettre aussi le premier ordre.

Énoncé	Statut
Équation différentielle et solution ; équation caractéristique	définitions
Solutions de $y' = ay$ et de $y' = ay + b$, avec $a \neq 0$	**démontré**
Le cas $a = 0$: l'équation $y' = b$	déduit des primitives
Solution vérifiant une condition initiale, premier ordre	**démontré** (calcul de λ)
Quand $x \mapsto e^{rx}$ est-elle solution ?	**démontré** (calcul direct)
Solutions de $y'' + ay' + by = 0$: cas $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ et $\Delta < 0$	**admis**
L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$	déduit du cas $\Delta < 0$
Solution vérifiant deux conditions initiales, second ordre	**admis**
Changement de fonction inconnue	**démontré**
Second membre constant	déduit du changement de fonction inconnue

Équation différentielle et solution

Définition : Équation différentielle et solution

Une **équation différentielle** relie une fonction inconnue y, écrite sans sa variable, à ses dérivées y' et y''. Dans ce chapitre, a et b désignent des réels, et les deux équations de référence s'écrivent

$$y' = ay + b$$

ou

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Une **solution** sur $\mathbb{R}$ est une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ (deux fois pour la seconde forme) qui vérifie l'égalité pour tout réel x : par exemple, $f'(x) = af(x) + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Résoudre l'équation, c'est déterminer toutes ses solutions.

Méthode : Fiche méthode : prouver qu'une fonction est solution

1. **Dérive** la fonction proposée : $f'(x)$, et aussi $f''(x)$ au second ordre.
2. **Calcule séparément** chaque membre de l'équation, pour un réel x quelconque.
3. **Compare** : les deux expressions doivent coïncider pour tout réel x.
4. **Conclus** par une phrase : « f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ ».

Exemple : Mini-exemple : vérifier

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 - e^{-2x}$, et l'équation $y' = -2y + 4$.

D'un côté, pour tout réel x, $f'(x) = 2e^{-2x}$. De l'autre côté :

$$\begin{aligned} -2f(x) + 4 &= -4 + 2e^{-2x} + 4 \\ &= 2e^{-2x}. \end{aligned}$$

Les deux membres sont égaux pour tout réel x : f est une solution. Ce calcul ne dit rien des autres solutions.

Premier ordre : y′ = ay + b

Théorème : Solutions de l'équation y′ = ay

Soit a un réel. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions

$$x \longmapsto \lambda e^{ax}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Théorème : Solutions de l'équation y′ = ay + b, avec a ≠ 0

Soit a et b deux réels, avec $a \neq 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions

$$x \longmapsto \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Parmi elles, la seule solution constante est la fonction $x \longmapsto -\frac{b}{a}$.

Remarque : Pourquoi c'est démontré

Idée de la preuve pour $y' = ay$: si f est solution, la fonction $x \mapsto f(x)e^{-ax}$ a pour dérivée $x \mapsto (f'(x) - af(x))\, e^{-ax}$, c'est-à-dire la fonction nulle. Elle est donc constante ; en notant λ cette constante, $f(x) = \lambda e^{ax}$ pour tout réel x.

Pour $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$, la fonction $f + \frac{b}{a}$ vérifie $y' = ay$: on revient au cas précédent.

Propriété : Le cas a = 0 : l'équation y' = b

Soit b un réel. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = b$ sont les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction constante $x \mapsto b$, c'est-à-dire les fonctions

$$x \longmapsto bx + k, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Théorème : Solution vérifiant une condition initiale (premier ordre)

Soit a, b, x_0 et y_0 des réels, avec $a \neq 0$. L'équation différentielle $y' = ay + b$ admet une **unique** solution f qui vérifie la condition initiale $f(x_0) = y_0$: c'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{a(x - x_0)} - \frac{b}{a}.$$

Équation y' = ay

$$f(x) = \lambda e^{ax}$$

Équation y' = ay + b, avec a non nul

$$f(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$$

Seule solution constante, a non nul

$$x \longmapsto -\frac{b}{a}$$

Équation y' = b

$$f(x) = bx + k$$

Condition $f(x_0) = y_0$, a non nul

$$f(x) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{a(x - x_0)} - \frac{b}{a}$$

Méthode : Fiche méthode : premier ordre

1. **Mets l'équation sous la forme** $y' = ay + b$: divise ou fais passer des termes pour que y' reste seul à gauche.
2. **Relève** a et b avec leurs signes. Si $a \neq 0$, calcule la solution constante $-\dfrac{b}{a}$; si $a = 0$, cherche simplement les primitives de b.
3. **Écris** les solutions, pour $a \neq 0$: $f(x) = \lambda e^{ax} - \dfrac{b}{a}$, avec λ réel.
4. **Condition initiale** : remplace x par x_0 dans cette expression complète, résous en λ, puis recopie f avec la valeur trouvée.

Exemple : Trois mini-exemples

- $y' = 3y$: ici $b = 0$, et les solutions sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{3x}$.
- $y' = 5$: ici $a = 0$, donc la formule en $-\dfrac{b}{a}$ ne s'applique pas. Les solutions sont les primitives $x \mapsto 5x + k$, avec k réel.
- $y' = -2y + 4$ avec $f(0) = 1$: $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{4}{-2} = 2$, donc $f(x) = \lambda e^{-2x} + 2$. Alors $f(0) = \lambda + 2 = 1$, d'où $\lambda = -1$ et $f(x) = 2 - e^{-2x}$.

Exemple : Une condition ailleurs qu'en 0

Cherchons la solution f de $y' = 3y$ telle que $f(-1) = 4$. Il existe un réel λ tel que $f(x) = \lambda e^{3x}$ pour tout réel x. La condition donne $\lambda e^{-3} = 4$, donc $\lambda = 4e^{3}$. Ainsi, pour tout réel x :

$$f(x) = 4e^{3}e^{3x} = 4e^{3(x+1)}.$$

C'est bien la formule de la condition initiale au premier ordre, avec $x_0 = -1$, $y_0 = 4$ et $b = 0$.

Second ordre : y″ + ay′ + by = 0

Définition : Équation caractéristique

Soit a et b deux réels. L'**équation caractéristique** de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ est l'équation du second degré, d'inconnue r,

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Son discriminant est $\Delta = a^2 - 4b$.

Propriété : Quand x ↦ e^(rx) est-elle solution ?

Soit a, b et r des réels. La fonction $x \longmapsto e^{rx}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ si et seulement si r est une racine de l'équation caractéristique : $r^2 + ar + b = 0$.

Remarque : Démontré, puis admis

Le critère sur e^{rx} se démontre par un calcul direct. Avec $f(x) = e^{rx}$, on trouve $f''(x) + af'(x) + bf(x) = \left(r^2 + ar + b\right) e^{rx}$. Comme $e^{rx} > 0$, ce produit est nul pour tout x exactement quand r est racine.

En revanche, que **toutes** les solutions aient la forme donnée ci-dessous est **admis**, dans les trois cas du discriminant, comme l'existence d'une unique solution vérifiant deux conditions initiales. Tu appliques ces résultats sans les démontrer.

Théorème : Solutions de y″ + ay′ + by = 0 lorsque Δ > 0

Soit a et b deux réels tels que $\Delta = a^2 - 4b > 0$, et r_1, r_2 les deux racines réelles distinctes de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions

$$x \longmapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x},$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Théorème : Solutions de y″ + ay′ + by = 0 lorsque Δ = 0

Soit a et b deux réels tels que $\Delta = a^2 - 4b = 0$, et $r_0 = -\dfrac{a}{2}$ la racine double de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions

$$x \longmapsto (\alpha x + \beta) e^{r_0 x},$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Théorème : Solutions de y″ + ay′ + by = 0 lorsque Δ < 0

Soit a et b deux réels tels que $\Delta = a^2 - 4b < 0$. L'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ admet deux racines complexes conjuguées $p + iq$ et $p - iq$, avec

$$p = -\frac{a}{2}$$

et

$$q = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} > 0.$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions

$$x \longmapsto e^{px}\big(\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx)\big),$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Propriété : L'équation y″ + ω²y = 0

Soit ω un réel strictement positif. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions

$$x \longmapsto \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x),$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Les trois cas en un coup d'œil, avec un exemple pour chacun.

Signe de Δ	Racines de $r^2 + ar + b = 0$	Solutions $f(x)$	Exemple
$\Delta > 0$	r_1 et r_2, réelles distinctes	$\alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$	$y'' - 5y' + 6y = 0$: $\Delta = 1$, racines 2 et 3, $f(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{3x}$
$\Delta = 0$	$r_0 = -\dfrac{a}{2}$, racine double	$(\alpha x + \beta) e^{r_0 x}$	$y'' + 6y' + 9y = 0$: $\Delta = 0$, $r_0 = -3$, $f(x) = (\alpha x + \beta) e^{-3x}$
$\Delta < 0$	$p + iq$ et $p - iq$, avec $q > 0$	$e^{px}\left(\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx)\right)$	$y'' - 2y' + 2y = 0$: $\Delta = -4$, $p = 1$, $q = 1$, $f(x) = e^x\left(\alpha \cos x + \beta \sin x\right)$

Théorème : Solution vérifiant deux conditions initiales (second ordre)

Soit a, b, x_0, y_0 et y_1 des réels. L'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ admet une **unique** solution f qui vérifie les deux conditions initiales

$$f(x_0) = y_0$$

et

$$f'(x_0) = y_1.$$

Méthode : Fiche méthode : second ordre

1. **Traduis** l'équation : y'' devient r^2, y' devient r, y devient 1. Un terme absent donne un coefficient nul.
2. **Calcule** $\Delta = a^2 - 4b$. Si $\Delta \geq 0$, les racines sont $r = \dfrac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$; si $\Delta < 0$, prends $p = -\dfrac{a}{2}$ et $q = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}$.
3. **Recopie la forme** qui correspond au signe de Δ, avec α et β réels.

4. **Deux conditions** : dérive la forme complète, écris $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$, puis résous le système en α et β.

Exemple : Mini-exemple : Δ > 0 et deux conditions

Résolvons $y'' - 5y' + 6y = 0$ avec $f(0) = 2$ et $f'(0) = 5$. Les solutions s'écrivent $f(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{3x}$, donc $f'(x) = 2\alpha e^{2x} + 3\beta e^{3x}$. Les deux conditions donnent le système

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ 2\alpha + 3\beta = 5 \end{cases}$$

d'où $\beta = 1$ et $\alpha = 1$. Finalement, $f(x) = e^{2x} + e^{3x}$ pour tout réel x.

Exemple : Mini-exemple : racine double

Résolvons $y'' + 6y' + 9y = 0$ avec $f(0) = 2$ et $f'(0) = -5$. Ici $f(x) = (\alpha x + \beta)e^{-3x}$. La dérivée d'un produit donne $f'(x) = (-3\alpha x + \alpha - 3\beta)e^{-3x}$.

Alors $f(0) = \beta = 2$, puis $f'(0) = \alpha - 3\beta = -5$, donc $\alpha = 1$:

$$f(x) = (x + 2)e^{-3x}.$$

Exemple : Mini-exemple : y″ + ω²y = 0

L'équation $y'' + 4y = 0$ s'écrit $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega = 2$: $f(x) = \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)$. Imposons $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$.

D'abord $f(0) = \alpha = 0$. Ensuite $f'(x) = -2\alpha\sin(2x) + 2\beta\cos(2x)$, donc $f'(0) = 2\beta = 2$ et $\beta = 1$.

Ainsi $f(x) = \sin(2x)$ pour tout réel x.

Se ramener à une équation connue

Propriété : Changement de fonction inconnue

Soit a et b deux réels, g une fonction définie sur $\mathbb{R}$, et (E) l'une des deux équations

$$y' = ay + g(x)$$

ou

$$y'' + ay' + by = g(x).$$

Son **équation homogène associée** (E_0) est $y' = ay$, ou $y'' + ay' + by = 0$.

Si h est une solution de (E), alors une fonction f est solution de (E) si et seulement si $z = f - h$ est solution de (E_0). Les solutions de (E) sont donc les fonctions $z + h$, où z parcourt les solutions de (E_0).

Propriété : Second membre constant

Soit a, b et c des réels, avec $b \neq 0$. La fonction constante $x \longmapsto \dfrac{c}{b}$ est solution de l'équation $y'' + ay' + by = c$.

Les solutions de cette équation sont les fonctions $x \longmapsto z(x) + \dfrac{c}{b}$, où z parcourt les solutions de $y'' + ay' + by = 0$.

Méthode : Fiche méthode : changer de fonction inconnue

1. **Trouve ou vérifie** la solution particulière h. C'est celle que donne l'énoncé ; sinon, pour $y'' + ay' + by = c$ avec $b \neq 0$, la constante $h = \dfrac{c}{b}$, et pour $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$, la constante $h = -\dfrac{b}{a}$.
2. **Pose** $z = y - h$: la fonction z vérifie l'équation homogène (E_0), sans second membre.
3. **Résous** (E_0) avec la fiche du premier ou du second ordre.
4. **Ajoute** h : les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto z(x) + h(x)$.

Exemple : Mini-exemple : second membre constant

Soit (E) : $y'' + 3y' + 2y = 6$, de la forme $y'' + ay' + by = c$ avec $b = 2$ et $c = 6$. La constante $h = \dfrac{c}{b} = 3$ convient, car $0 + 0 + 2 \times 3 = 6$.

Avec $z = y - 3$, on obtient $z'' + 3z' + 2z = 0$. Son équation caractéristique $r^2 + 3r + 2 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$ et pour racines -1 et -2.

Conclusion : (E) a pour solutions les fonctions

$$x \longmapsto \alpha e^{-x} + \beta e^{-2x} + 3,$$

avec α et β réels.

Remarque : Le premier ordre, vu autrement

La résolution de $y' = ay + b$ suit le même schéma. Pour $y' = -2y + 4$, la constante $h = 2$ est solution, et $z = y - 2$ vérifie $z' = -2z$.

Donc $z(x) = \lambda e^{-2x}$, avec λ réel, et les solutions de $y' = -2y + 4$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-2x} + 2$.

Une situation concrète : une perfusion

Méthode : Fiche méthode : exploiter une équation donnée

1. **Identifie** la grandeur inconnue, la variable t et les unités. L'équation est fournie : tu ne l'établis pas.

2. **Résous** avec la bonne fiche, puis impose la valeur à $t = 0$.
3. **Interprète** : la limite en $+\infty$ donne la valeur d'équilibre. Pour trouver un instant, isole l'exponentielle, puis passe au logarithme.

Exemple : la concentration d'un médicament

Pendant une perfusion, la concentration C d'un médicament dans le sang, en milligrammes par litre, vérifie $C' = -0{,}2C + 1$, avec t en heures. Au départ, $C(0) = 2$.

Ici $a = -0{,}2$, $b = 1$ et $-\dfrac{b}{a} = 5$, donc $C(t) = \lambda e^{-0{,}2t} + 5$. La condition donne $\lambda + 5 = 2$, soit $\lambda = -3$:

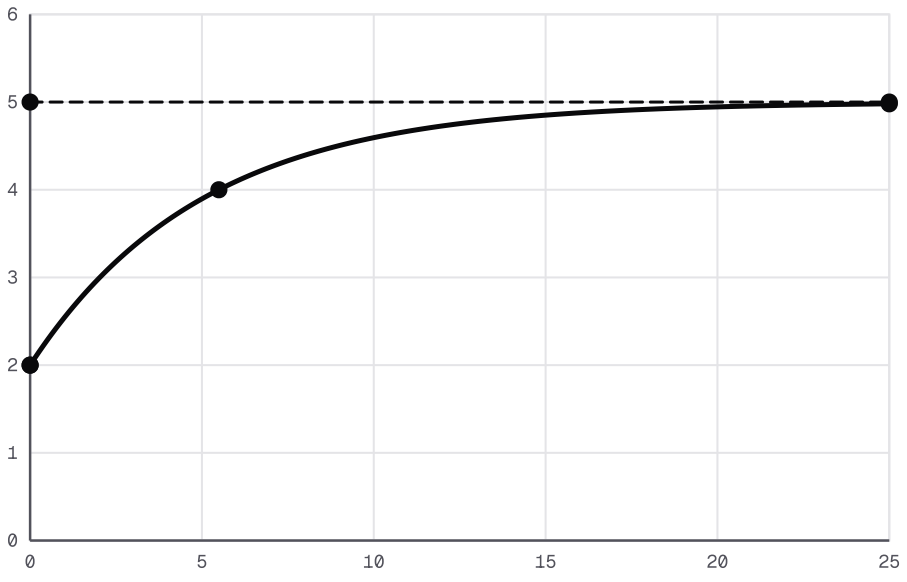
$$C(t) = 5 - 3e^{-0{,}2t}.$$

Exemple : Interpréter le résultat

Quand $t \to +\infty$, $e^{-0{,}2t}$ tend vers 0, donc $C(t)$ tend vers 5 : la concentration se stabilise à 5 milligrammes par litre.

Elle atteint 4 lorsque $3e^{-0{,}2t} = 1$, soit $-0{,}2t = -\ln 3$, c'est-à-dire

$$t = 5\ln 3 \approx 5{,}49 \text{ heures}.$$



Concentration C(t) = 5 – 3e^(–0,2t) pendant la perfusion : la courbe part de 2, passe par 4 à t = 5 ln 3 (environ 5,49 heures) et s'approche de la droite C = 5, la valeur d'équilibre.

Pièges à éviter

Attention : Lire a avant d'avoir isolé y'

Dans $y' + 2y = 4$, le coefficient a n'est pas 2. Fais d'abord passer $2y$ à droite : $y' = -2y + 4$, donc $a = -2$ et $b = 4$. Les solutions sont $x \mapsto \lambda e^{-2x} + 2$.

Avec $a = 2$, tu écrirais $\lambda e^{2x} - 2$: or la fonction constante égale à -2 donne $y' + 2y = -4$, et non 4.

Attention : Le signe de la valeur d'équilibre

Pour $C' = -0{,}2C + 1$, la solution constante vaut $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{1}{-0{,}2} = 5$. Écrire $\dfrac{b}{a} = -5$ donnerait une concentration d'équilibre négative, ce qui est absurde.

Contrôle express : remplace la constante dans l'équation. Avec 5 : $-0{,}2 \times 5 + 1 = 0$, juste. Avec -5 : $-0{,}2 \times (-5) + 1 = 2 \neq 0$.

Attention : La condition porte sur f tout entière

Pour $y' = -2y + 4$ et $f(0) = 1$, la solution s'écrit $f(x) = \lambda e^{-2x} + 2$. On écrit $\lambda + 2 = 1$, donc $\lambda = -1$. Choisir $\lambda = 1$ revient à imposer la condition au seul terme λe^{-2x} : on aurait alors $f(0) = 3$.

Au second ordre aussi, dérive la solution **complète** avant d'écrire $f'(x_0)$.

Attention : Une puissance de r par ordre de dérivée

$y'' - 4y' = 0$ n'a pas de terme en y : $r^2 - 4r = 0$, soit $r(r-4) = 0$, de racines 0 et 4. Les solutions sont $x \mapsto \alpha + \beta e^{4x}$, car $e^{0x} = 1$.

Ne confonds pas avec $y'' - 4y = 0$: $r^2 - 4 = 0$, de racines 2 et -2.

Enfin, $y'' + 4y = 0$ donne $r^2 + 4 = 0$, de racines $2i$ et $-2i$: solutions $\alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)$.

Attention : Racine double : le facteur x est indispensable

Pour $y'' + 6y' + 9y = 0$, la racine double est -3. Écrire $\alpha e^{-3x} + \beta e^{-3x}$, c'est écrire $(\alpha + \beta)e^{-3x}$: une seule constante.

Or $f(x) = xe^{-3x}$ est aussi solution. En effet, pour tout réel x, $f'(x) = (1 - 3x)e^{-3x}$, $f''(x) = (9x - 6)e^{-3x}$ et $(9x - 6) + 6(1 - 3x) + 9x = 0$.

Garde la forme $(\alpha x + \beta)e^{-3x}$.

Attention : Δ < 0 : le facteur e^(px) et la valeur de q

Pour $y'' - 2y' + 2y = 0$: $\Delta = 4 - 8 = -4$, $p = 1$ et $q = \dfrac{\sqrt{4}}{2} = 1$, et non 2. Les solutions sont les fonctions $e^x\,(\alpha\cos x + \beta\sin x)$.

Sans le facteur e^x, c'est faux : avec $f = \cos$, on trouve $f'' - 2f' + 2f = \cos x + 2\sin x$, qui n'est pas la fonction nulle.

Attention : Une vérification ne donne pas toutes les solutions

Montrer que $x \mapsto 4e^{2x}$ vérifie $y'' - 5y' + 6y = 0$ prouve qu'elle est **une** solution, rien de plus. Les solutions sont toutes les fonctions $x \mapsto \alpha e^{2x} + \beta e^{3x}$: c'est le résultat admis du cas $\Delta > 0$ qui le garantit, pas la vérification.

Au bac

Constats sur les **15 sujets nationaux** 2BAC SE consultés. Une question d'équation différentielle apparaît dans **1 des 15 sujets consultés** (2016 N), notée **1 point sur 20**.

C'est une équation $y'' + ay' + by = 0$ avec $\Delta > 0$, suivie de deux conditions initiales, sur $g(0)$ et sur $g'(0)$. La solution trouvée sert ensuite à définir une fonction étudiée dans le problème.

Ces chiffres décrivent ces sujets-là, pas le prochain examen.

Barème lu pour cette question : $0{,}25$ pour les racines de l'équation caractéristique, $0{,}25$ pour la solution générale, puis $0{,}5$ pour la solution qui vérifie les deux conditions initiales.

Méthode : Rédaction modèle : second ordre avec deux conditions

Pour (E) : $y'' - 5y' + 6y = 0$, avec $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$, écris :

1. Les racines, repère $0{,}25$: « L'équation caractéristique de (E) est $r^2 - 5r + 6 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 1$; ses racines sont 2 et 3. »
2. La solution générale, repère $0{,}25$: « Les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto \alpha e^{2x} + \beta e^{3x}$, où α et β sont des réels. »
3. Les conditions, repère $0{,}5$: « On a $g'(x) = 2\alpha e^{2x} + 3\beta e^{3x}$. Donc $g(0) = \alpha + \beta = 0$ et $g'(0) = 2\alpha + 3\beta = 1$, d'où $\beta = 1$ et $\alpha = -1$. Ainsi $g(x) = e^{3x} - e^{2x}$. »

Remarque : Absent de ces 15 sujets

Ce qui ne veut pas dire « jamais demandé » : tout le premier ordre, le second ordre avec $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$, le changement de fonction inconnue, la vérification d'une solution et les situations concrètes. Les orientations et la répartition consultées, documents non authentifiés, placent pourtant ces contenus dans le chapitre. Révise-les aussi.

À retenir : Avant de rendre ta copie

- Écris la phrase de conclusion : « les solutions sont les fonctions … », avec les constantes **réelles**.

- Recopie l'équation caractéristique avant de calculer Δ.
- Contrôle ta solution finale : les conditions sur $g(0)$ et $g'(0)$ sont-elles vérifiées ?
- Garde l'expression de g bien visible : la suite du problème peut s'en servir.

Checklist avant le bac

À retenir : Je sais…

- vérifier par le calcul qu'une fonction donnée est solution, et dire que cela ne donne pas toutes les solutions ;
- mettre une équation sous la forme $y' = ay + b$, lire a et b, et écrire ses solutions ;
- trouver λ à partir d'une condition $f(x_0) = y_0$;
- écrire l'équation caractéristique, calculer Δ et choisir la forme dans les trois cas ;
- trouver α et β à partir de $f(x_0)$ et de $f'(x_0)$;
- poser $z = y - h$ quand une solution particulière h est donnée ou constante ;
- interpréter une solution dans une situation concrète : limite en $+\infty$, instant où une valeur est atteinte ;
- distinguer ce qui est démontré de ce qui est admis.