BURHAN

Équations différentielles : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/equations-differentielles/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Équations différentielles	Niveau examen	5

Exercice 1 3 pts

Une solution du second ordre au cœur d'une étude de fonction

Cet exercice suit le format observé dans 1 des 15 sujets consultés : une question courte sur une équation du second ordre, puis l'étude de la solution trouvée. On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y' + 3y = 0$.

A.1. 0,5 pts

Partie A. Résous l'équation différentielle (E).

INDICE

Écris l'équation caractéristique et calcule son discriminant. Deux racines réelles distinctes donnent une somme de deux exponentielles.

A.2. 0,5 pts

Détermine la solution g de (E) qui vérifie $g(0) = 2$ et $g'(0) = 0$.

INDICE

Écris $g'(x)$ avec α et β, puis résous le système obtenu en $x = 0$.

B.1. 0,5 pts

Partie B. On étudie la fonction g trouvée à la question A.2. Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$. Interprète graphiquement la première limite.

INDICE

En $+\infty$, factorise par e^{3x} : $g(x) = e^{3x}\left(3e^{-2x} - 1\right)$.

B.2. 0,75 pts

Montre que, pour tout réel x, $g'(x) = 3e^{x}\left(1 - e^{2x}\right)$. Dresse le tableau de variations de g.

INDICE

Le signe de $g'(x)$ est celui de $1 - e^{2x}$: compare e^{2x} à 1 selon le signe de x.

B.3. 0,25 pts

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$.

INDICE

Factorise $g(x)$ par e^{x}.

B.4. 0,5 pts

Montre que la restriction de g à $[0, +\infty[$ est une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser. Déduis-en que l'équation $g(x) = 1$ admet une unique solution γ dans $[0, +\infty[$, puis vérifie que $0{,}4 < \gamma < 0{,}5$.

INDICE

Sur $[0, +\infty[$, g est continue et strictement décroissante. Calcule ensuite des valeurs approchées de $g(0{,}4)$ et de $g(0{,}5)$.

Exercice 2 2,5 pts

Racine double : solution et étude d'une fonction

Forme non observée dans les 15 sujets consultés : second ordre avec racine double.

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 4y = 0$.

A.1. 0,5 pts

Partie A. Résous l'équation (E).

INDICE

Écris l'équation caractéristique : c'est une identité remarquable.

A.2. 0,5 pts

Détermine la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.

INDICE

Dérive $(\alpha x + \beta)e^{-2x}$ comme un produit avant de remplacer x par 0.

B.1. 0,5 pts

Partie B. On étudie la fonction f trouvée à la question A.2. Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

En $+\infty$, écris $xe^{-2x} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{e^{2x}}$ et utilise $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$.

B.2. 0,5 pts

Montre que, pour tout réel x, $f'(x) = -(2x + 1)e^{-2x}$. Étudie les variations de f et précise son extremum.

INDICE

Le signe de $f'(x)$ est celui de $-(2x + 1)$, car $e^{-2x} > 0$.

B.3. 0,25 pts

Donne une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

INDICE

Tu connais déjà $f(0)$ et $f'(0)$ par la partie A.

B.4. 0,25 pts

Étudie le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

INDICE

Le facteur e^{-2x} est strictement positif.

Exercice 3 3 pts

Une substance absorbée puis éliminée

Forme non observée dans les 15 sujets consultés : premier ordre et changement de fonction inconnue.

En SVT, on suit une substance dans le sang après une prise par la bouche. On note $C(t)$ sa concentration, en mg/L, à l'instant t, en heures. Un modèle donne : C est la restriction à $[0, +\infty[$ de la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) : $y' = -y + 2e^{-\frac{t}{2}}$ telle que $C(0) = 0$.

A.1. 0,5 pts

Partie A. Vérifie que la fonction $h : t \longmapsto 4e^{-\frac{t}{2}}$ est une solution de (E).

INDICE

Calcule $h'(t)$, puis $-h(t) + 2e^{-\frac{t}{2}}$, et compare.

A.2. 0,5 pts

Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z = y - h$. Montre que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de $(E_0) : z' = -z$.

INDICE

Calcule $z' + z$ en remplaçant z par $y - h$, puis utilise la question A.1.

A.3. 0,5 pts

Résous (E_0) sur $\mathbb{R}$, puis déduis-en les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. On ne garde ensuite que $t \geq 0$.

INDICE

(E_0) est de la forme $z' = az$ avec $a = -1$. Pour revenir à y, ajoute h.

A.4. 0,5 pts

Montre que, pour tout $t \geq 0$, $C(t) = 4e^{-\frac{t}{2}} - 4e^{-t}$.

INDICE

Utilise la condition $C(0) = 0$ dans la solution générale.

B.1. 0,75 pts

Partie B. Montre que, pour tout $t \geq 0$, $C'(t) = 2e^{-t}\left(2 - e^{\frac{t}{2}}\right)$. Étudie les variations de C sur $[0, +\infty[$. À quel instant la concentration est-elle maximale, et quelle est sa valeur ?

INDICE

Factorise $C'(t) = -2e^{-\frac{t}{2}} + 4e^{-t}$ par $2e^{-t}$, puis compare $e^{\frac{t}{2}}$ à 2.

B.2. 0,25 pts

Calcule la limite de $C(t)$ quand t tend vers $+\infty$ et interprète ce résultat.

INDICE

Les deux exponentielles ont un exposant qui tend vers $-\infty$.

Exercice 4 3 pts

Second membre constant : une courbe symétrique et une limite imposée

Second ordre à second membre constant et changement de fonction inconnue : forme non observée dans les 15 sujets consultés.

Dans tout l'exercice, (E) désigne l'équation différentielle $y'' - y = 2$.

A.1. 0,5 pts

Partie A. Vérifie que la fonction constante $h : x \longmapsto -2$ est une solution de (E). Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z = y - h$. Montre que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de $(E_0) : z'' - z = 0$.

INDICE

Une fonction constante a une dérivée seconde nulle. Ensuite, $z = y + 2$, donc $z'' = y''$.

A.2. 0,5 pts

Résous (E_0), puis déduis-en les solutions de (E).

INDICE

Dans (E_0), $a = 0$ et $b = -1$: l'équation caractéristique est $r^2 - 1 = 0$. Pour revenir à y, ajoute h.

A.3. 0,5 pts

Détermine la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

INDICE

La condition $f(0) = 0$ porte sur toute la solution, constante -2 comprise.

B.1. 0,75 pts

Partie B. On étudie la fonction f trouvée à la question A.3. Montre que, pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$, et interprète graphiquement. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis déduis-en $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Dresse le tableau de variations de f et déduis-en le signe de $f(x)$.

INDICE

Pour le signe de $f'(x) = e^x - e^{-x}$, factorise par e^{-x} et compare e^{2x} à 1.

B.2. 0,5 pts

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$. Vérifie que le résultat est cohérent avec la question B.1.

INDICE

Multiplie les deux membres par $e^x > 0$, puis pose $X = e^x$: tu obtiens une équation du second degré.

C. 0,25 pts

Partie C. Détermine la solution k de (E) qui vérifie $k(0) = 0$ et qui admet une limite finie en $+\infty$. Précise cette limite.

INDICE

Écris $k(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{-x} - 2$ et regarde ce que devient le terme αe^{x} en $+\infty$ lorsque $\alpha \neq 0$.

Exercice 5 3 pts

Trois billes dans un même liquide

Premier ordre dans une situation de physique : forme non observée dans les 15 sujets consultés.

En physique, on fait descendre des billes identiques dans un même liquide visqueux. On note $v(t)$ la vitesse d'une bille, en m/s, à l'instant t, en secondes. Un modèle donne : la vitesse de chaque bille est la restriction d'une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y' = -4y + 12$, chaque bille ayant sa propre condition initiale.

A.1. 0,5 pts

Partie A. Résous l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Lis a et b dans $y' = ay + b$, puis calcule la solution constante $-\dfrac{b}{a}$.

A.2. 0,5 pts

À l'instant $t = 0$, la bille 1 est lâchée sans vitesse : $v_1(0) = 0$. Au même instant, la bille 2 est lancée vers le bas : $v_2(0) = 5$. Détermine $v_1(t)$ et $v_2(t)$ pour $t \geq 0$.

INDICE

Impose chaque condition à la solution générale entière, constante 3 comprise.

A.3. 0,5 pts

Étudie les variations de v_1 et de v_2 sur $[0, +\infty[$ et calcule leurs limites en $+\infty$. Interprète.

INDICE

Dérive e^{-4t} : $\left(e^{-4t}\right)' = -4e^{-4t}$.

B.1. 0,75 pts

Partie B. On pose $d = v_2 - v_1$, où v_1 et v_2 sont vues comme des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. Sans utiliser les expressions de la question A.2, montre que $d' = -4d$, puis déduis-en $d(t)$. Montre que $v_2(t) > v_1(t)$ pour tout $t \geq 0$, puis détermine à partir de quel instant l'écart $d(t)$ est inférieur ou égal à 1 m/s.

INDICE

Écris $v_1' = -4v_1 + 12$ et $v_2' = -4v_2 + 12$, puis soustrais. La fonction d vérifie alors une équation $y' = ay$, et $d(0) = 5$.

B.2. 0,25 pts

Détermine l'instant t_1 où la vitesse de la bille 1 atteint $2{,}7$ m/s. Donne une valeur approchée de t_1 à $0{,}01$ près.

INDICE

Isole e^{-4t}, puis applique la fonction $\ln$.

C. 0,5 pts

Partie C. La bille 3 est lâchée sans vitesse à l'instant $t = 1$: sa vitesse v_3 est la restriction à $[1, +\infty[$ de la solution de (E) telle que $v_3(1) = 0$. Détermine $v_3(t)$, montre que $v_3(t) = v_1(t-1)$ pour tout $t \geq 1$, et déduis-en l'instant où la bille 3 atteint $2{,}7$ m/s.

INDICE

La condition porte en $t = 1$: $\lambda e^{-4} + 3 = 0$. Écris ensuite $e^{4}e^{-4t} = e^{-4(t-1)}$.