BURHAN

Équations différentielles : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/equations-differentielles/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Équations différentielles	Niveau examen	5

Exercice 1 3 pts

Une solution du second ordre au cœur d'une étude de fonction

Cet exercice suit le format observé dans 1 des 15 sujets consultés : une question courte sur une équation du second ordre, puis l'étude de la solution trouvée. On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y' + 3y = 0$.

A.1. 0,5 pts

Partie A. Résous l'équation différentielle (E).

INDICE

Écris l'équation caractéristique et calcule son discriminant. Deux racines réelles distinctes donnent une somme de deux exponentielles.

CORRIGÉ

Équation caractéristique. Elle s'écrit $r^2 - 4r + 3 = 0$, de discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$. Ses deux racines réelles sont :

$$r_1 = \frac{4 - 2}{2} = 1,$$
$$r_2 = \frac{4 + 2}{2} = 3.$$

Conclusion. D'après F08 (cas $\Delta > 0$), les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$x \longmapsto \alpha e^{x} + \beta e^{3x},$$

où α et β sont deux réels quelconques.

A.2. 0,5 pts

Détermine la solution g de (E) qui vérifie $g(0) = 2$ et $g'(0) = 0$.

INDICE

Écris $g'(x)$ avec α et β, puis résous le système obtenu en $x = 0$.

CORRIGÉ

Dérivée. D'après la question A.1, il existe deux réels α et β tels que, pour tout réel x :

$$g(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{3x},$$
$$g'(x) = \alpha e^{x} + 3\beta e^{3x}.$$

Système. En 0, les conditions $g(0) = 2$ et $g'(0) = 0$ donnent :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha + 3\beta = 0 \end{cases}$$

Par différence, $2\beta = -2$, donc $\beta = -1$. La première équation donne alors $\alpha = 3$.

Conclusion. Pour tout réel x, $g(x) = 3e^{x} - e^{3x}$.

B.1. 0,5 pts

Partie B. On étudie la fonction g trouvée à la question A.2. Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. Interprète graphiquement la première limite.

INDICE

En $+\infty$, factorise par e^{3x} : $g(x) = e^{3x}\left(3e^{-2x} - 1\right)$.

CORRIGÉ

Limite en $-\infty$. Les fonctions $x \longmapsto e^x$ et $x \longmapsto e^{3x}$ tendent vers 0 en $-\infty$, donc :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0.$$

La droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, est asymptote à la courbe de g en $-\infty$.

Limite en $+\infty$. Pour tout réel x, $g(x) = e^{3x}\left(3e^{-2x} - 1\right)$. Quand x tend vers $+\infty$, e^{3x} tend vers $+\infty$ et $3e^{-2x} - 1$ tend vers -1. Par produit :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty.$$

Conclusion. La fonction g tend vers 0 en $-\infty$, avec l'asymptote $y = 0$, et vers $-\infty$ en $+\infty$.

B.2. 0,75 pts

Montre que, pour tout réel x, $g'(x) = 3e^x\left(1 - e^{2x}\right)$. Dresse le tableau de variations de g.

INDICE

Le signe de $g'(x)$ est celui de $1 - e^{2x}$: compare e^{2x} à 1 selon le signe de x.

CORRIGÉ

Dérivée. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, comme $e^{3x} = e^x \times e^{2x}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3e^x - 3e^{3x} \\ &= 3e^x\left(1 - e^{2x}\right). \end{aligned}$$

Signe de $g'(x)$. Comme $3e^x > 0$, $g'(x)$ a le signe de $1 - e^{2x}$. La fonction exponentielle est strictement croissante et $e^0 = 1$:

- si $x < 0$, alors $e^{2x} < 1$ et $g'(x) > 0$;
- si $x > 0$, alors $e^{2x} > 1$ et $g'(x) < 0$;
- enfin $g'(0) = 0$ et $g(0) = 3 - 1 = 2$.

Tableau de variations. Les limites viennent de la question B.1.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de g	0	croissante	2	décroissante	$-\infty$

Conclusion. La fonction g est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$; elle admet un maximum égal à 2, atteint en 0.

B.3. 0,25 pts

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$.

INDICE

Factorise $g(x)$ par e^x.

CORRIGÉ

Pour tout réel x, $g(x) = e^x\left(3 - e^{2x}\right)$, et $e^x > 0$. Donc :

$$\begin{aligned} & g(x) = 0 \\ \iff\ & e^{2x} = 3 \\ \iff\ & 2x = \ln 3 \\ \iff\ & x = \frac{1}{2}\ln 3. \end{aligned}$$

Conclusion. L'équation $g(x) = 0$ a une seule solution dans $\mathbb{R}$: $\dfrac{1}{2}\ln 3 \approx 0{,}55$.

B.4. 0,5 pts

Montre que la restriction de g à $[0, +\infty[$ est une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser. Déduis-en que l'équation $g(x) = 1$ admet une unique solution γ dans $[0, +\infty[$, puis vérifie que $0{,}4 < \gamma < 0{,}5$.

INDICE

Sur $[0, +\infty[$, g est continue et strictement décroissante. Calcule ensuite des valeurs approchées de $g(0{,}4)$ et de $g(0{,}5)$.

CORRIGÉ

Bijection. Sur $[0, +\infty[$, la fonction g est continue, car dérivable, et strictement décroissante (question B.2). De plus, $g(0) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$. Donc g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur :

$$J = \left]-\infty, 2\right].$$

Existence et unicité de γ. Comme $1 \in J$, l'équation $g(x) = 1$ admet une unique solution γ dans $[0, +\infty[$.

Encadrement. À la calculatrice :

$$\begin{aligned} g(0{,}4) &= 3e^{0{,}4} - e^{1{,}2} \\ &\approx 1{,}16, \\ g(0{,}5) &= 3e^{0{,}5} - e^{1{,}5} \\ &\approx 0{,}46. \end{aligned}$$

Ainsi $g(0{,}5) < g(\gamma) < g(0{,}4)$, puisque $g(\gamma) = 1$. Comme g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, on obtient $0{,}4 < \gamma < 0{,}5$.

Conclusion. La restriction de g à $[0, +\infty[$ est une bijection sur $J = \left]-\infty, 2\right]$; l'équation $g(x) = 1$ y admet une unique solution γ, et $0{,}4 < \gamma < 0{,}5$.

Exercice 2 2,5 pts

Racine double : solution et étude d'une fonction

Forme non observée dans les 15 sujets consultés : second ordre avec racine double.

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 4y = 0$.

A.1. 0,5 pts

Partie A. Résous l'équation (E).

INDICE

Écris l'équation caractéristique : c'est une identité remarquable.

CORRIGÉ

L'équation caractéristique s'écrit $r^2 + 4r + 4 = 0$, soit $(r+2)^2 = 0$. Son discriminant est $\Delta = 16 - 16 = 0$: elle a une racine double, $r_0 = -2$.

Conclusion. D'après F09 (cas $\Delta = 0$), les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$x \longmapsto (\alpha x + \beta)e^{-2x},$$

où α et β sont deux réels quelconques.

A.2. 0,5 pts

Détermine la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.

INDICE

Dérive $(\alpha x + \beta)e^{-2x}$ comme un produit avant de remplacer x par 0.

CORRIGÉ

Dérivée. D'après la question A.1, il existe deux réels α et β tels que, pour tout réel x, $f(x) = (\alpha x + \beta)e^{-2x}$. D'après la dérivée d'un produit, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha e^{-2x} \\ &\quad - 2(\alpha x + \beta)e^{-2x}. \end{aligned}$$

Conditions. En 0, on a $f(0) = \beta$ et $f'(0) = \alpha - 2\beta$. La condition $f(0) = 1$ donne $\beta = 1$; la condition $f'(0) = -1$ s'écrit alors $\alpha - 2 = -1$, d'où $\alpha = 1$.

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) = (x+1)e^{-2x}$.

B.1. 0,5 pts

Partie B. On étudie la fonction f trouvée à la question A.2. Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

INDICE

En $+\infty$, écris $xe^{-2x} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x}{e^{2x}}$ et utilise $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X}{e^X}=0$.

CORRIGÉ

Limite en $-\infty$. Quand x tend vers $-\infty$, $x+1$ tend vers $-\infty$ et e^{-2x} tend vers $+\infty$. Par produit :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Limite en $+\infty$. Pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{1}{2}\times\frac{2x}{e^{2x}} + e^{-2x}.$$

Avec $X = 2x$, qui tend vers $+\infty$, $\dfrac{X}{e^X}$ tend vers 0 ; de plus, e^{-2x} tend vers 0. Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Conclusion. La fonction f tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers 0 en $+\infty$: l'axe des abscisses est asymptote à sa courbe en $+\infty$.

B.2. 0,5 pts

Montre que, pour tout réel x, $f'(x) = -(2x+1)e^{-2x}$. Étudie les variations de f et précise son extremum.

INDICE

Le signe de $f'(x)$ est celui de $-(2x+1)$, car $e^{-2x} > 0$.

CORRIGÉ

Dérivée. D'après la question A.2, avec $\alpha=\beta=1$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-2x} \\ &\quad - 2(x+1)e^{-2x} \\ &= (1-2x-2)e^{-2x} \\ &= -(2x+1)e^{-2x}. \end{aligned}$$

Signe. Comme $e^{-2x}>0$, $f'(x)$ a le signe de $-(2x+1)$: $f'(x)>0$ si $x<-\dfrac{1}{2}$, et $f'(x)<0$ si $x>-\dfrac{1}{2}$.

Variations. La fonction f est strictement croissante sur $\left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$. Elle admet donc un maximum en $-\dfrac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}e^{1} \\ &= \frac{e}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = -(2x+1)e^{-2x}$; la fonction f admet un maximum égal à $\dfrac{e}{2}$, atteint en $-\dfrac{1}{2}$.

B.3. 0,25 pts

Donne une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

INDICE

Tu connais déjà $f(0)$ et $f'(0)$ par la partie A.

CORRIGÉ

D'après la partie A, $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$. La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

Conclusion. Une équation de la tangente est $y = -x + 1$.

B.4. 0,25 pts

Étudie le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

INDICE

Le facteur e^{-2x} est strictement positif.

CORRIGÉ

Pour tout réel x, $e^{-2x} > 0$: $f(x)$ a le signe de $x + 1$.

Conclusion.

- $f(x) < 0$ pour $x \in]-\infty, -1[$;
- $f(-1) = 0$;
- $f(x) > 0$ pour $x \in]-1, +\infty[$.

Exercice 3 3 pts

Une substance absorbée puis éliminée

Forme non observée dans les 15 sujets consultés : premier ordre et changement de fonction inconnue.

En SVT, on suit une substance dans le sang après une prise par la bouche. On note $C(t)$ sa concentration, en mg/L, à l'instant t, en heures. Un modèle donne : C est la restriction à $[0, +\infty[$ de la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) : $y' = -y + 2e^{-\frac{t}{2}}$ telle que $C(0) = 0$.

A.1. 0,5 pts

Partie A. Vérifie que la fonction $h : t \longmapsto 4e^{-\frac{t}{2}}$ est une solution de (E).

INDICE

Calcule $h'(t)$, puis $-h(t) + 2e^{-\frac{t}{2}}$, et compare.

CORRIGÉ

Dérivée de h. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t :

$$\begin{aligned} h'(t) &= 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{t}{2}} \\ &= -2e^{-\frac{t}{2}}. \end{aligned}$$

Membre de droite. Pour tout réel t :

$$\begin{aligned} &- h(t) + 2e^{-\frac{t}{2}} \\ &= -4e^{-\frac{t}{2}} + 2e^{-\frac{t}{2}} \\ &= -2e^{-\frac{t}{2}}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel t, $h'(t) = -h(t) + 2e^{-\frac{t}{2}}$: la fonction h est une solution de (E).

A.2. 0,5 pts

Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z = y - h$. Montre que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de (E_0) : $z' = -z$.

INDICE

Calcule $z' + z$ en remplaçant z par $y - h$, puis utilise la question A.1.

CORRIGÉ

Calcul de $z' + z$. La fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z' = y' - h'$. D'après la question A.1, $h'(t) + h(t) = 2e^{-\frac{t}{2}}$ pour tout réel t. Donc, sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &z' + z \\ &= (y' + y) - (h' + h) \\ &= y' + y - 2e^{-\frac{t}{2}}. \end{aligned}$$

Équivalence. Ainsi $z' + z = 0$, c'est-à-dire $z' = -z$, équivaut à $y' = -y + 2e^{-\frac{t}{2}}$.

Conclusion. La fonction z est solution de (E_0) si et seulement si y est solution de (E).

A.3. 0,5 pts

Résous (E_0) sur $\mathbb{R}$, puis déduis-en les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. On ne garde ensuite que $t \geq 0$.

INDICE

(E_0) est de la forme $z' = az$ avec $a = -1$. Pour revenir à y, ajoute h.

CORRIGÉ

Solutions de (E_0). L'équation (E_0) est de la forme $z' = az$, avec $a = -1$. D'après F02 (forme des solutions de $y' = ay$), ses solutions sont les fonctions $t \longmapsto \lambda e^{-t}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Retour à y. D'après la question A.2, les solutions de (E) sont les fonctions $z + h$, où z est une solution de (E_0).

Conclusion. Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$t \longmapsto \lambda e^{-t} + 4e^{-\frac{t}{2}},$$

où λ est un réel quelconque.

A.4. 0,5 pts

Montre que, pour tout $t \geq 0$, $C(t) = 4e^{-\frac{t}{2}} - 4e^{-t}$.

INDICE

Utilise la condition $C(0) = 0$ dans la solution générale.

CORRIGÉ

D'après la question A.3, il existe un réel λ tel que, pour tout $t \geq 0$, $C(t) = \lambda e^{-t} + 4e^{-\frac{t}{2}}$. Alors $C(0) = \lambda + 4$, et la condition $C(0) = 0$ donne $\lambda = -4$.

Conclusion. Pour tout $t \geq 0$:

$$C(t) = 4e^{-\frac{t}{2}} - 4e^{-t}.$$

B.1. 0,75 pts

Partie B. Montre que, pour tout $t \geq 0$, $C'(t) = 2e^{-t}\left(2 - e^{\frac{t}{2}}\right)$. Étudie les variations de C sur $[0, +\infty[$. À quel instant la concentration est-elle maximale, et quelle est sa valeur ?

INDICE

Factorise $C'(t) = -2e^{-\frac{t}{2}} + 4e^{-t}$ par $2e^{-t}$, puis compare $e^{\frac{t}{2}}$ à 2.

CORRIGÉ

Dérivée. Pour tout $t \geq 0$, $e^{-\frac{t}{2}} = e^{-t} \times e^{\frac{t}{2}}$, donc :

$$\begin{aligned} C'(t) &= -2e^{-\frac{t}{2}} + 4e^{-t} \\ &= 2e^{-t}\left(2 - e^{\frac{t}{2}}\right). \end{aligned}$$

Signe de $C'(t)$. Comme $2e^{-t} > 0$, $C'(t)$ a le signe de $2 - e^{\frac{t}{2}}$. La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc :

$$\begin{aligned} & e^{\frac{t}{2}} < 2 \\ \iff & \frac{t}{2} < \ln 2 \\ \iff & t < 2\ln 2. \end{aligned}$$

Variations. La fonction C est croissante sur $[0, 2\ln 2]$ et décroissante sur $[2\ln 2, +\infty[$.

Maximum. La concentration est maximale à l'instant $t = 2\ln 2 \approx 1{,}39$ heure, soit environ 1 heure et 23 minutes. Comme $e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$ et $e^{-2\ln 2} = \frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned} C(2\ln 2) &= 4 \times \frac{1}{2} \\ &\quad - 4 \times \frac{1}{4} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $t \geq 0$, $C'(t) = 2e^{-t}\left(2 - e^{\frac{t}{2}}\right)$. La concentration croît jusqu'à l'instant $2\ln 2$, puis décroît ; elle est maximale à cet instant et vaut alors 1 mg/L.

B.2. 0,25 pts

Calcule la limite de $C(t)$ quand t tend vers $+\infty$ et interprète ce résultat.

INDICE

Les deux exponentielles ont un exposant qui tend vers $-\infty$.

CORRIGÉ

Quand t tend vers $+\infty$, $-\frac{t}{2}$ et $-t$ tendent vers $-\infty$, donc $e^{-\frac{t}{2}}$ et e^{-t} tendent vers 0 :

$$\lim_{t \to +\infty} C(t) = 0.$$

Conclusion. La concentration tend vers 0 : après son pic, la substance est peu à peu éliminée du sang.

Exercice 4 3 pts

Second membre constant : une courbe symétrique et une limite imposée

Second ordre à second membre constant et changement de fonction inconnue : forme non observée dans les 15 sujets consultés.

Dans tout l'exercice, (E) désigne l'équation différentielle $y'' - y = 2$.

A.1. 0,5 pts

Partie A. Vérifie que la fonction constante $h : x \longmapsto -2$ est une solution de (E). Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z = y - h$. Montre que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de (E_0) : $z'' - z = 0$.

INDICE

Une fonction constante a une dérivée seconde nulle. Ensuite, $z = y + 2$, donc $z'' = y''$.

CORRIGÉ

Une solution constante. Pour tout réel x, $h''(x) = 0$, donc :

$$\begin{aligned} &h''(x) - h(x) \\ &= 0 - (-2) = 2. \end{aligned}$$

Ainsi h est une solution de (E).

Changement de fonction inconnue. On a $z = y + 2$: la fonction z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z'' = y''$. Sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} z'' - z &= y'' - (y + 2) \\ &= y'' - y - 2. \end{aligned}$$

Ainsi $z'' - z = 0$ équivaut à $y'' - y = 2$.

Conclusion. La fonction h est une solution de (E), et y est solution de (E) si et seulement si z est solution de (E_0).

A.2. 0,5 pts

Résous (E_0), puis déduis-en les solutions de (E).

INDICE

Dans (E_0), $a = 0$ et $b = -1$: l'équation caractéristique est $r^2 - 1 = 0$. Pour revenir à y, ajoute h.

CORRIGÉ

Équation caractéristique de (E_0). Elle s'écrit $r^2 - 1 = 0$; ici $a = 0$ et $b = -1$. Son discriminant vaut :

$$\begin{aligned}\Delta &= 0 - 4 \times (-1) \\ &= 4 > 0.\end{aligned}$$

Ses racines sont :

$$r_1 = \frac{0 - 2}{2} = -1,$$
$$r_2 = \frac{0 + 2}{2} = 1.$$

Solutions de (E_0). D'après F08 (cas $\Delta > 0$), ce sont les fonctions $x \longmapsto \alpha e^{x} + \beta e^{-x}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Retour à y. D'après la question A.1, y est solution de (E) si et seulement si $y = z + h$, avec z solution de (E_0).

Conclusion. Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$x \longmapsto \alpha e^{x} + \beta e^{-x} - 2,$$

où α et β sont deux réels quelconques.

A.3. 0,5 pts

Détermine la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

INDICE

La condition $f(0) = 0$ porte sur toute la solution, constante -2 comprise.

CORRIGÉ

Dérivée. D'après la question A.2, il existe deux réels α et β tels que, pour tout réel x :

$$f(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{-x} - 2,$$
$$f'(x) = \alpha e^{x} - \beta e^{-x}.$$

Système. Les conditions $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ donnent :

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 2 = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

Donc $\alpha = \beta$ et $2\alpha = 2$, soit $\alpha = \beta = 1$.

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) = e^{x} + e^{-x} - 2$.

B.1. 0,75 pts

Partie B. On étudie la fonction f trouvée à la question A.3. Montre que, pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$, et interprète graphiquement. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis déduis-en $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Dresse le tableau de variations de f et déduis-en le signe de $f(x)$.

INDICE

Pour le signe de $f'(x) = e^{x} - e^{-x}$, factorise par e^{-x} et compare e^{2x} à 1.

CORRIGÉ

Symétrie. Pour tout réel x, $-x$ est un réel et :

$$\begin{aligned} f(-x) &= e^{-x} + e^{x} - 2 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

La fonction f est paire : sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Limites. Quand x tend vers $+\infty$, e^{x} tend vers $+\infty$ et e^{-x} vers 0 :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Quand x tend vers $-\infty$, $-x$ tend vers $+\infty$; comme $f(x) = f(-x)$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

Dérivée et signe. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x} - e^{-x} \\ &= e^{-x}\left(e^{2x} - 1\right). \end{aligned}$$

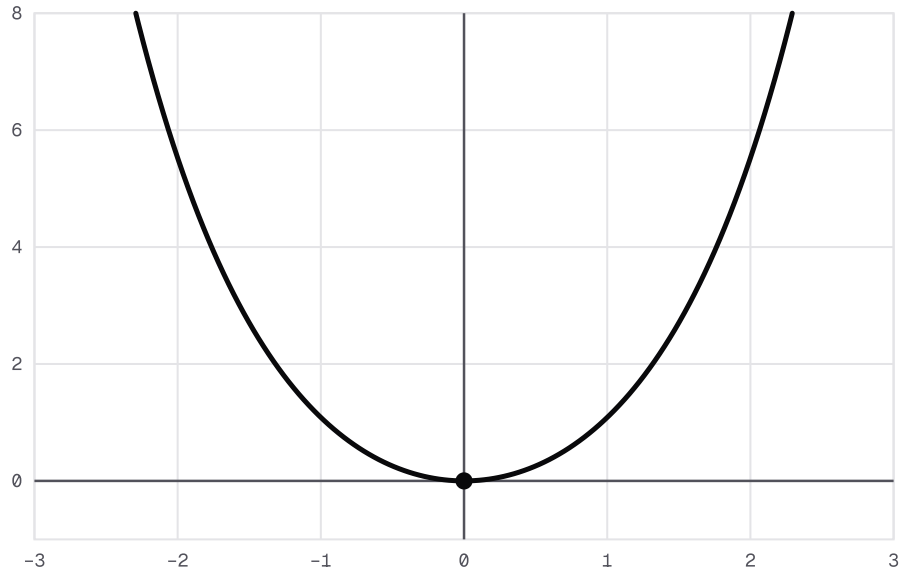
Comme $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $e^{2x} - 1$: $f'(x) < 0$ si $x < 0$, $f'(0) = 0$ et $f'(x) > 0$ si $x > 0$.

Tableau de variations.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	$+\infty$	décroissante	0	croissante	$+\infty$

Signe de $f(x)$. La fonction f admet un minimum égal à $f(0) = 0$. Donc $f(x) \geq 0$ pour tout réel x, avec égalité seulement en 0.

Conclusion. La fonction f est paire et tend vers $+\infty$ en $-\infty$ comme en $+\infty$. Elle est décroissante sur $]-\infty, 0]$, croissante sur $[0, +\infty[$, et positive sur $\mathbb{R}$.



La courbe de f(x) = $e^x + e^{-x} - 2$, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, avec son minimum 0 atteint en 0.

B.2. 0,5 pts

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$. Vérifie que le résultat est cohérent avec la question B.1.

INDICE

Multiplie les deux membres par $e^x > 0$, puis pose $X = e^x$: tu obtiens une équation du second degré.

CORRIGÉ

Équation en e^x. Soit $x \in \mathbb{R}$. On multiplie les deux membres par $e^x > 0$, ce qui donne une équation équivalente :

$$\begin{aligned} & f(x) = \frac{1}{2} \\ \iff\ & e^{2x} + 1 - 2e^x = \frac{1}{2}e^x \\ \iff\ & 2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0. \end{aligned}$$

Équation du second degré. Posons $X = e^x$: $2X^2 - 5X + 2 = 0$. Son discriminant est $25 - 16 = 9$, et ses racines sont :

$$X = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2},$$
$$X = \frac{5+3}{4} = 2.$$

Toutes deux sont strictement positives.

Retour à x. L'égalité $e^x = 2$ équivaut à $x = \ln 2$, et $e^x = \dfrac{1}{2}$ équivaut à $x = -\ln 2$.

Cohérence. Les deux solutions sont opposées, comme l'impose la symétrie de la courbe. Il y en a une de chaque côté de 0, car f est strictement monotone sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$, de $+\infty$ à 0 puis de 0 à $+\infty$.

Conclusion. Les solutions de l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ sont $-\ln 2$ et $\ln 2$, avec $\ln 2 \approx 0{,}69$.

C. 0,25 pts

Partie C. Détermine la solution k de (E) qui vérifie $k(0) = 0$ et qui admet une limite finie en $+\infty$. Précise cette limite.

INDICE

Écris $k(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x} - 2$ et regarde ce que devient le terme αe^x en $+\infty$ lorsque $\alpha \neq 0$.

CORRIGÉ

Forme de k. D'après la question A.2, il existe deux réels α et β tels que, pour tout réel x, $k(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x} - 2$.

Condition de limite. En $+\infty$, $\beta e^{-x} - 2$ tend vers -2. Si $\alpha \neq 0$, αe^x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ selon le signe de α, et k n'a pas de limite finie. Donc $\alpha = 0$; réciproquement, si $\alpha = 0$, k tend vers -2.

Condition en 0. On a $k(0) = \beta - 2$, et la condition $k(0) = 0$ donne $\beta = 2$.

Conclusion. La solution cherchée est la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = 2e^{-x} - 2$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = -2$.

Ici, la condition de limite en $+\infty$ remplace la condition sur $k'(0)$: avec $k(0) = 0$, elle suffit à fixer α et β.

Exercice 5 3 pts

Trois billes dans un même liquide

Premier ordre dans une situation de physique : forme non observée dans les 15 sujets consultés.

En physique, on fait descendre des billes identiques dans un même liquide visqueux. On note $v(t)$ la vitesse d'une bille, en m/s, à l'instant t, en secondes. Un modèle donne : la vitesse de chaque bille est la restriction d'une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y' = -4y + 12$, chaque bille ayant sa propre condition initiale.

A.1. 0,5 pts

Partie A. Résous l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Lis a et b dans $y' = ay + b$, puis calcule la solution constante $-\dfrac{b}{a}$.

CORRIGÉ

Lecture de a et b. L'équation (E) est de la forme $y' = ay + b$, avec $a = -4$ et $b = 12$; ainsi $a \neq 0$.

Solution constante.

$$-\frac{b}{a} = -\frac{12}{-4} = 3.$$

Conclusion. D'après F03 (forme des solutions de $y' = ay + b$ quand $a \neq 0$), les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$t \longmapsto \lambda e^{-4t} + 3,$$

où λ est un réel quelconque.

A.2. 0,5 pts

À l'instant $t = 0$, la bille 1 est lâchée sans vitesse : $v_1(0) = 0$. Au même instant, la bille 2 est lancée vers le bas : $v_2(0) = 5$. Détermine $v_1(t)$ et $v_2(t)$ pour $t \geq 0$.

INDICE

Impose chaque condition à la solution générale entière, constante 3 comprise.

CORRIGÉ

D'après la question A.1, la vitesse de chaque bille s'écrit $t \longmapsto \lambda e^{-4t} + 3$, pour un réel λ propre à cette bille ; en 0, elle vaut $\lambda + 3$.

Bille 1. La condition $v_1(0) = \lambda + 3 = 0$ donne $\lambda = -3$.

Bille 2. La condition $v_2(0) = \lambda + 3 = 5$ donne $\lambda = 2$.

Conclusion. Pour tout $t \geq 0$:

$$v_1(t) = 3 - 3e^{-4t},$$
$$v_2(t) = 3 + 2e^{-4t}.$$

A.3. 0,5 pts

Étudie les variations de v_1 et de v_2 sur $[0, +\infty[$ et calcule leurs limites en $+\infty$. Interprète.

INDICE

Dérive e^{-4t} : $\left(e^{-4t}\right)' = -4e^{-4t}$.

CORRIGÉ

Variations. Pour tout $t \geq 0$:

$$v_1'(t) = 12e^{-4t} > 0,$$
$$v_2'(t) = -8e^{-4t} < 0.$$

Donc v_1 est strictement croissante et v_2 strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

Limites. Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-4t} = 0$:

$$\lim_{t \to +\infty} v_1(t) = 3,$$
$$\lim_{t \to +\infty} v_2(t) = 3.$$

Conclusion. La bille 1 accélère, la bille 2 ralentit, et toutes deux tendent vers la même vitesse limite 3 m/s. Cette vitesse ne dépend pas de la vitesse initiale : c'est la solution constante de (E).

B.1. 0,75 pts

Partie B. On pose $d = v_2 - v_1$, où v_1 et v_2 sont vues comme des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. Sans utiliser les expressions de la question A.2, montre que $d' = -4d$, puis déduis-en $d(t)$. Montre que $v_2(t) > v_1(t)$ pour tout $t \geq 0$, puis détermine à partir de quel instant l'écart $d(t)$ est inférieur ou égal à 1 m/s.

INDICE

Écris $v_1' = -4v_1 + 12$ et $v_2' = -4v_2 + 12$, puis soustrais. La fonction d vérifie alors une équation $y' = ay$, et $d(0) = 5$.

CORRIGÉ

Équation vérifiée par d. Comme v_1 et v_2 sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}$, on a $v_1' = -4v_1 + 12$ et $v_2' = -4v_2 + 12$. Par différence, sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} d' &= v_2' - v_1' \\ &= (-4v_2 + 12) \\ &\quad - (-4v_1 + 12) \\ &= -4(v_2 - v_1) \\ &= -4d. \end{aligned}$$

Expression de d. D'après F02 (forme des solutions de $y' = ay$), il existe un réel λ tel que $d(t) = \lambda e^{-4t}$ pour tout réel t. Comme $d(0) = v_2(0) - v_1(0) = 5$, on obtient $\lambda = 5$:

$$d(t) = 5e^{-4t}.$$

On retrouve bien le résultat avec les expressions de la question A.2 :

$$\begin{aligned} &\left(3 + 2e^{-4t}\right) \\ &\quad - \left(3 - 3e^{-4t}\right) \\ &= 5e^{-4t}. \end{aligned}$$

Comparaison. Pour tout $t \geq 0$, $5e^{-4t} > 0$, donc $v_2(t) > v_1(t)$: la bille 2 reste plus rapide.

Écart d'au plus 1 m/s. Soit $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} & d(t) \leq 1 \\ \iff\ & e^{-4t} \leq \frac{1}{5} \\ \iff\ & -4t \leq -\ln 5 \\ \iff\ & t \geq \frac{\ln 5}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel t, $d(t) = 5e^{-4t}$, et $v_2(t) > v_1(t)$ pour tout $t \geq 0$. L'écart est inférieur ou égal à 1 m/s à partir de l'instant $\dfrac{\ln 5}{4} \approx 0{,}40$ s.

B.2. 0,25 pts

Détermine l'instant t_1 où la vitesse de la bille 1 atteint $2{,}7$ m/s. Donne une valeur approchée de t_1 à $0{,}01$ près.

INDICE

Isole e^{-4t}, puis applique la fonction $\ln$.

CORRIGÉ

Soit $t \geq 0$. On isole l'exponentielle, puis on applique la fonction $\ln$:

$$\begin{aligned} & v_1(t) = 2{,}7 \\ \iff\ & 3e^{-4t} = 0{,}3 \\ \iff\ & e^{-4t} = \frac{1}{10} \\ \iff\ & -4t = -\ln 10 \\ \iff\ & t = \frac{\ln 10}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion. La bille 1 atteint $2{,}7$ m/s à l'instant $t_1 = \dfrac{\ln 10}{4} \approx 0{,}58$ s.

C. 0,5 pts

Partie C. La bille 3 est lâchée sans vitesse à l'instant $t = 1$: sa vitesse v_3 est la restriction à $[1, +\infty[$ de la solution de (E) telle que $v_3(1) = 0$. Détermine $v_3(t)$, montre que $v_3(t) = v_1(t-1)$ pour tout $t \geq 1$, et déduis-en l'instant où la bille 3 atteint $2{,}7$ m/s.

INDICE

La condition porte en $t = 1$: $\lambda e^{-4} + 3 = 0$. Écris ensuite $e^{4}e^{-4t} = e^{-4(t-1)}$.

CORRIGÉ

Constante. D'après la question A.1, il existe un réel λ tel que, pour tout $t \geq 1$, $v_3(t) = \lambda e^{-4t} + 3$. La condition $v_3(1) = \lambda e^{-4} + 3 = 0$ donne $\lambda = -3e^{4}$.

Lien avec v_1. Pour tout $t \geq 1$, on a $t - 1 \geq 0$ et :

$$\begin{aligned} v_3(t) &= 3 - 3e^{4}e^{-4t} \\ &= 3 - 3e^{-4(t-1)} \\ &= v_1(t-1). \end{aligned}$$

La bille 3 a donc, avec 1 seconde de retard, la vitesse de la bille 1.

Instant cherché. La bille 3 atteint $2{,}7$ m/s lorsque $t - 1 = t_1$, c'est-à-dire :

$$t = 1 + \frac{\ln 10}{4} \approx 1{,}58.$$

Conclusion. Pour tout $t \geq 1$, $v_3(t) = 3 - 3e^{-4(t-1)}$, soit $v_1(t-1)$; la bille 3 atteint $2{,}7$ m/s à l'instant $1 + \dfrac{\ln 10}{4} \approx 1{,}58$ s.