BURHAN

Équations différentielles : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/equations-differentielles/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Équations différentielles	Entraînement	5

Exercice 1

Du premier ordre à l'étude d'une fonction

On considère l'équation différentielle (E) : $2y' + 5y = 10$.

1.

Écris (E) sous la forme $y' = ay + b$ et donne les réels a et b.

INDICE

Isole $2y'$, puis divise les deux membres par 2.

2.

Résous l'équation (E).

INDICE

Calcule $-\dfrac{b}{a}$, puis vérifie que c'est bien une solution constante.

3.

Détermine la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = 0$.

INDICE

Remplace x par 0 dans la solution générale : $e^0 = 1$.

4.

Calcule les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis étudie le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Regarde vers quoi tend l'exposant $-\dfrac{5}{2}x$ dans chaque cas. Pour les variations, dérive $e^{-\frac{5}{2}x}$ comme $e^{u(x)}$.

5.

Résous l'équation $f(x) = 1$. Donne la valeur exacte de la solution, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

INDICE

Isole $e^{-\frac{5}{2}x}$, puis applique la fonction $\ln$ aux deux membres.

Exercice 2

Une culture de bactéries avec prélèvements

En SVT, on cultive des bactéries dans un milieu nutritif et on en prélève régulièrement pour des analyses. On note $N(t)$ le nombre de bactéries, en millions, à l'instant t, en heures. On admet que N est la restriction à $[0, +\infty[$ de la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = 0{,}2y - 1$ telle que $N(0) = 8$.

1.

Résous l'équation différentielle $y' = 0{,}2y - 1$ sur $\mathbb{R}$. On ne garde ensuite que $t \geq 0$.

INDICE

L'équation est déjà sous la forme $y' = ay + b$: lis a et b avec leur signe, puis calcule $-\dfrac{b}{a}$.

2.

Déduis-en l'expression de $N(t)$ pour $t \geq 0$.

INDICE

Utilise la population initiale : $N(0) = 8$.

3.

Étudie le sens de variation de N, puis calcule la limite de $N(t)$ quand t tend vers $+\infty$. Que se passerait-il si la culture contenait au départ 5 millions de bactéries ?

INDICE

Calcule $N'(t)$ et regarde son signe. Pour la dernière question, pense à la solution constante trouvée à la question 1.

4.

Au bout de combien de temps la culture atteint-elle 20 millions de bactéries ? Donne la valeur exacte, puis une valeur approchée au centième d'heure.

INDICE

Résous $3e^{0{,}2t} + 5 = 20$: isole $e^{0{,}2t}$, puis utilise $\ln$.

Exercice 3

Racine double et racines complexes, avec conditions

Cet exercice traite deux équations du second ordre. Pour chacune, tu la résous, puis tu imposes deux conditions initiales.

1.

Résous l'équation (E_1) : $4y'' - 4y' + y = 0$.

INDICE

Divise d'abord par 4 pour obtenir la forme $y'' + ay' + by = 0$.

2.

Détermine la solution f de (E_1) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

INDICE

Dérive $(\alpha x + \beta)e^{\frac{1}{2}x}$ comme un produit, puis remplace x par 0.

3.

Résous l'équation (E_2) : $y'' - 2y' + 5y = 0$.

INDICE

Le discriminant est négatif : écris les racines sous la forme $p \pm iq$ avec $q > 0$.

4.

Détermine la solution g de (E_2) telle que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 2$.

INDICE

Commence par $g(0)$: $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$. La valeur de α simplifie ensuite la dérivée.

5.

Détermine les réels x de l'intervalle $[0, \pi]$ tels que $g(x) = 0$.

INDICE

Le facteur e^x n'est jamais nul. Il reste à résoudre $\sin(2x) = 0$.

Exercice 4

Une solution particulière donnée : changer d'inconnue

On considère l'équation (E) : $y' + y = 2x$ et la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x - 2$.

1.

Vérifie que h est une solution de (E).

INDICE

Calcule $h'(x) + h(x)$ et compare avec $2x$.

2.

Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z = y - h$. Montre que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de (E_0) : $z' = -z$.

INDICE

Calcule $z' + z$ en remplaçant z par $y - h$, puis utilise la question 1.

3.

Résous (E_0), puis déduis-en les solutions de (E).

INDICE

(E_0) est de la forme $z' = az$. Pour revenir à y, ajoute h.

4.

Détermine la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = 1$.

INDICE

Remplace x par 0 dans toute l'expression : le terme $2x - 2$ vaut alors -2.

5.

Montre que la droite D d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$. Précise la position de la courbe par rapport à D.

INDICE

Étudie la limite et le signe de $f(x) - (2x - 2)$.

Exercice 5

Un pendule amorti

En physique, on écarte un pendule de sa position d'équilibre, puis on le lâche sans vitesse. On note $\theta(t)$ son angle, en radians, à l'instant t, en secondes. On admet que θ est la restriction à $[0, +\infty[$ de la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + 4y' + 20y = 0$ telle que $\theta(0) = 0{,}1$ et $\theta'(0) = 0$.

1.

Écris l'équation caractéristique de $y'' + 4y' + 20y = 0$ et détermine ses racines.

INDICE

Calcule $\Delta = a^2 - 4b$. S'il est négatif, utilise $i\sqrt{-\Delta}$.

2.

Déduis-en les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$. Pour le pendule, on ne garde ensuite que $t \geq 0$.

INDICE

Utilise la forme $e^{pt}\left(\alpha\cos(qt) + \beta\sin(qt)\right)$.

3.

Détermine l'expression de $\theta(t)$.

INDICE

$\theta(0)$ donne α. Dérive ensuite le produit de e^{-2t} par la parenthèse avant de calculer $\theta'(0)$.

4.

Montre que, pour tout $t \geq 0$, $|\theta(t)| \leq 0{,}15e^{-2t}$. Déduis-en la limite de $\theta(t)$ quand t tend vers $+\infty$, puis interprète.

INDICE

Utilise $|\cos(4t)| \leq 1$ et $|\sin(4t)| \leq 1$, puis le théorème des gendarmes.

5.

Calcule $\theta\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, puis donne une valeur approchée à 10^{-3} près. Compare son signe avec celui de $\theta(0)$.

INDICE

Pour $t = \dfrac{\pi}{4}$, on a $4t = \pi$: utilise $\cos\pi = -1$ et $\sin\pi = 0$.