BURHAN

# Équations différentielles : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/equations-differentielles/exercices/entrainement

| Chapitre | Palier | Exercices |
| --- | --- | --- |
| Équations différentielles | Entraînement | 5 |

**Exercice 1**

## Du premier ordre à l'étude d'une fonction

On considère l'équation différentielle $(E)$ : $2y' + 5y = 10$.

### 1.

Écris $(E)$ sous la forme $y' = ay + b$ et donne les réels $a$ et $b$.

INDICE

Isole $2y'$, puis divise les deux membres par $2$.

CORRIGÉ

On isole $2y'$ : $2y' = -5y + 10$. On divise ensuite les deux membres par $2$ :

$$y' = -\frac{5}{2}y + 5.$$

**Conclusion.** L'équation $(E)$ s'écrit $y' = ay + b$, avec $a = -\dfrac{5}{2}$ et $b = 5$.

### 2.

Résous l'équation $(E)$.

INDICE

Calcule $-\dfrac{b}{a}$, puis vérifie que c'est bien une solution constante.

CORRIGÉ

**Solution constante.** Comme $a \neq 0$ :

$$\begin{aligned} -\frac{b}{a} &= -\frac{5}{-\frac{5}{2}} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Contrôle : pour la fonction constante $2$, on a $2 \times 0 + 5 \times 2 = 10$.

**Conclusion.** D'après F03 (forme des solutions de $y' = ay + b$ quand $a \neq 0$), les solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$x \longmapsto \lambda e^{-\frac{5}{2}x} + 2,$$

où $\lambda$ est un réel quelconque.

### 3.

Détermine la solution $f$ de $(E)$ qui vérifie $f(0) = 0$.

INDICE

Remplace $x$ par $0$ dans la solution générale : $e^0 = 1$.

CORRIGÉ

D'après la question 2, il existe un réel $\lambda$ tel que, pour tout réel $x$, $f(x) = \lambda e^{-\frac{5}{2}x} + 2$. Comme $e^0 = 1$, on a $f(0) = \lambda + 2$, et la condition $f(0) = 0$ donne $\lambda = -2$.

**Conclusion.** La solution cherchée est la fonction $f$ définie, pour tout réel $x$, par :

$$f(x) = 2 - 2e^{-\frac{5}{2}x}.$$

### 4.

Calcule les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$, puis étudie le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Regarde vers quoi tend l'exposant $-\dfrac{5}{2}x$ dans chaque cas. Pour les variations, dérive $e^{-\frac{5}{2}x}$ comme $e^{u(x)}$.

CORRIGÉ

**Limite en $+\infty$.** Quand $x$ tend vers $+\infty$, $-\dfrac{5}{2}x$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-\frac{5}{2}x}$ tend vers $0$ :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2.$$

La droite d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe de $f$ en $+\infty$.

**Limite en $-\infty$.** Quand $x$ tend vers $-\infty$, $-\dfrac{5}{2}x$ tend vers $+\infty$, donc $e^{-\frac{5}{2}x}$ tend vers $+\infty$ :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

**Variations.** La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel $x$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2 \times \left(-\frac{5}{2}\right) e^{-\frac{5}{2}x} \\ &= 5e^{-\frac{5}{2}x}. \end{aligned}$$

Une exponentielle est strictement positive : $5e^{-\frac{5}{2}x} > 0$ pour tout réel $x$.

**Conclusion.** La fonction $f$ tend vers $2$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$ ; elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

### 5.

Résous l'équation $f(x) = 1$. Donne la valeur exacte de la solution, puis une valeur approchée à $10^{-2}$ près.

INDICE

Isole $e^{-\frac{5}{2}x}$, puis applique la fonction $\ln$ aux deux membres.

CORRIGÉ

Soit $x \in \mathbb{R}$. On isole l'exponentielle, puis on applique la fonction $\ln$ :

$$\begin{aligned} & f(x) = 1 \\ \iff\ & 2e^{-\frac{5}{2}x} = 1 \\ \iff\ & e^{-\frac{5}{2}x} = \frac{1}{2} \\ \iff\ & -\frac{5}{2}x = -\ln 2 \\ \iff\ & x = \frac{2}{5}\ln 2. \end{aligned}$$

**Conclusion.** L'équation $f(x) = 1$ a une seule solution : $x = \frac{2}{5}\ln 2 \approx 0{,}28$.

### Exercice 2

## Une culture de bactéries avec prélèvements

En SVT, on cultive des bactéries dans un milieu nutritif et on en prélève régulièrement pour des analyses. On note $N(t)$ le nombre de bactéries, en millions, à l'instant $t$, en heures. On admet que $N$ est la restriction à $[0, +\infty[$ de la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = 0{,}2y - 1$ telle que $N(0) = 8$.

### 1.

Résous l'équation différentielle $y' = 0{,}2y - 1$ sur $\mathbb{R}$. On ne garde ensuite que $t \geq 0$.

INDICE

L'équation est déjà sous la forme $y' = ay + b$ : lis $a$ et $b$ avec leur signe, puis calcule $-\dfrac{b}{a}$.

CORRIGÉ

**Lecture de $a$ et $b$.** L'équation est de la forme $y' = ay + b$, avec $a = 0{,}2$ et $b = -1$ ; ainsi $a \neq 0$.

**Solution constante.**

$$-\frac{b}{a} = \frac{1}{0{,}2} = 5.$$

Contrôle : $0{,}2 \times 5 - 1 = 0$.

**Conclusion.** D'après F03 (forme des solutions de $y' = ay + b$ quand $a \neq 0$), les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$t \longmapsto \lambda e^{0{,}2t} + 5,$$

où $\lambda$ est un réel quelconque.

### 2.

Déduis-en l'expression de $N(t)$ pour $t \geq 0$.

INDICE

Utilise la population initiale : $N(0) = 8$.

CORRIGÉ

D'après la question 1, il existe un réel $\lambda$ tel que, pour tout $t \geq 0$, $N(t) = \lambda e^{0{,}2t} + 5$. Alors $N(0) = \lambda + 5$, et la condition $N(0) = 8$ donne $\lambda = 3$.

**Conclusion.** Pour tout $t \geq 0$ :

$$N(t) = 3e^{0{,}2t} + 5.$$

### 3.

Étudie le sens de variation de $N$, puis calcule la limite de $N(t)$ quand $t$ tend vers $+\infty$. Que se passerait-il si la culture contenait au départ $5$ millions de bactéries ?

INDICE

Calcule $N'(t)$ et regarde son signe. Pour la dernière question, pense à la solution constante trouvée à la question 1.

CORRIGÉ

**Variations.** La fonction $N$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et, pour tout $t \geq 0$ :

$$\begin{aligned} N'(t) &= 3 \times 0{,}2e^{0{,}2t} \\ &= 0{,}6e^{0{,}2t} > 0. \end{aligned}$$

Donc $N$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ : les prélèvements ne compensent pas la croissance.

**Limite.** Quand $t$ tend vers $+\infty$, $0{,}2t$ tend vers $+\infty$, donc $e^{0{,}2t}$ aussi :

$$\lim_{t \to +\infty} N(t) = +\infty.$$

Dans ce modèle, la population augmente sans limite.

**Départ à $5$ millions.** La condition $N(0) = 5$ donne $\lambda + 5 = 5$, soit $\lambda = 0$ : la solution est la fonction constante $5$. La population resterait égale à $5$ millions : c'est un état d'équilibre, où les prélèvements compensent exactement la croissance.

**Conclusion.** La fonction $N$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$ ; avec $5$ millions de bactéries au départ, la population resterait constante.

### 4.

Au bout de combien de temps la culture atteint-elle $20$ millions de bactéries ? Donne la valeur exacte, puis une valeur approchée au centième d'heure.

INDICE

Résous $3e^{0{,}2t} + 5 = 20$ : isole $e^{0{,}2t}$, puis utilise $\ln$.

CORRIGÉ

Soit $t \geq 0$. On isole l'exponentielle, puis on applique la fonction $\ln$ :

$$\begin{aligned} & N(t) = 20 \\ \iff\ & 3e^{0{,}2t} = 15 \\ \iff\ & e^{0{,}2t} = 5 \\ \iff\ & 0{,}2t = \ln 5 \\ \iff\ & t = 5 \ln 5. \end{aligned}$$

**Conclusion.** La culture atteint $20$ millions de bactéries au bout de $5 \ln 5 \approx 8{,}05$ heures.

### Exercice 3

## Racine double et racines complexes, avec conditions

Cet exercice traite deux équations du second ordre. Pour chacune, tu la résous, puis tu imposes deux conditions initiales.

### 1.

Résous l'équation $(E_1)$ : $4y'' - 4y' + y = 0$.

INDICE

Divise d'abord par $4$ pour obtenir la forme $y'' + ay' + by = 0$.

CORRIGÉ

**Mise en forme.** On divise par $4$, qui n'est pas nul :

$$y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0.$$

**Équation caractéristique.** Elle s'écrit $r^2 - r + \frac{1}{4} = 0$, de discriminant :

$$\Delta = 1 - 4 \times \frac{1}{4} = 0.$$

Elle a une racine double : $r_0 = \frac{1}{2}$.

**Conclusion.** D'après F09 (cas $\Delta = 0$), les solutions de $(E_1)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$x \longmapsto (\alpha x + \beta)e^{\frac{1}{2}x},$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont deux réels quelconques.

### 2.

Détermine la solution $f$ de $(E_1)$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

INDICE

Dérive $(\alpha x + \beta)e^{\frac{1}{2}x}$ comme un produit, puis remplace $x$ par $0$.

CORRIGÉ

**Dérivée.** D'après la question 1, il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que, pour tout réel $x$, $f(x) = (\alpha x + \beta)e^{\frac{1}{2}x}$. D'après la dérivée d'un produit, pour tout réel $x$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha e^{\frac{1}{2}x} \\ &\quad + \frac{1}{2}(\alpha x + \beta)e^{\frac{1}{2}x}. \end{aligned}$$

**Conditions.** On a $f(0) = \beta$, donc $\beta = 1$. Puis $f'(0) = \alpha + \frac{1}{2}\beta = \alpha + \frac{1}{2}$, et la condition $f'(0) = 0$ donne $\alpha = -\frac{1}{2}$.

**Contrôle.** Pour tout réel $x$, $f'(x) = -\frac{x}{4}e^{\frac{1}{2}x}$, donc $f'(0) = 0$.

**Conclusion.** La solution cherchée est la fonction $f$ définie, pour tout réel $x$, par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x}.$$

### 3.

Résous l'équation $(E_2)$ : $y'' - 2y' + 5y = 0$.

INDICE

Le discriminant est négatif : écris les racines sous la forme $p \pm iq$ avec $q > 0$.

CORRIGÉ

**Équation caractéristique.** Elle s'écrit $r^2 - 2r + 5 = 0$, de discriminant $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$.

**Racines.** Comme $\sqrt{-\Delta} = 4$, les deux racines complexes conjuguées sont :

$$\frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i.$$

Donc $p = 1$ et $q = 2$.

**Conclusion.** D'après F10 (cas $\Delta < 0$), les solutions de $(E_2)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$x \longmapsto e^x\big(\alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)\big),$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont deux réels quelconques.

### 4.

Détermine la solution $g$ de $(E_2)$ telle que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 2$.

INDICE

Commence par $g(0)$ : $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$. La valeur de $\alpha$ simplifie ensuite la dérivée.

CORRIGÉ

**Condition sur $g(0)$.** D'après la question 3, il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que, pour tout réel $x$, $g(x) = e^x\left(\alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)\right)$.

Comme $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$, on a $g(0) = \alpha$ ; la condition $g(0) = 0$ donne $\alpha = 0$. Ainsi, pour tout réel $x$, $g(x) = \beta e^x \sin(2x)$.

**Dérivée.** D'après la dérivée d'un produit, pour tout réel $x$ :

$$g'(x) = \beta e^x \sin(2x) + 2\beta e^x \cos(2x).$$

**Condition sur $g'(0)$.** On a $g'(0) = 2\beta$, et la condition $g'(0) = 2$ donne $\beta = 1$.

**Conclusion.** La solution cherchée est la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x \sin(2x)$.

### 5.

Détermine les réels $x$ de l'intervalle $[0, \pi]$ tels que $g(x) = 0$.

INDICE

Le facteur $e^x$ n'est jamais nul. Il reste à résoudre $\sin(2x) = 0$.

CORRIGÉ

Soit $x \in [0, \pi]$. Comme $e^x > 0$, l'égalité $g(x) = 0$ équivaut à $\sin(2x) = 0$, c'est-à-dire à $2x = k\pi$ pour un entier $k$, soit :

$$x = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dans $[0, \pi]$, seuls $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$ conviennent.

**Conclusion.** Les réels de $[0, \pi]$ tels que $g(x) = 0$ sont $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ et $x = \pi$.

### Exercice 4

## Une solution particulière donnée : changer d'inconnue

On considère l'équation $(E)$ : $y' + y = 2x$ et la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x - 2$.

**1.**

Vérifie que $h$ est une solution de $(E)$.

INDICE

Calcule $h'(x) + h(x)$ et compare avec $2x$.

CORRIGÉ

La fonction $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel $x$, $h'(x) = 2$. Donc, pour tout réel $x$ :

$$\begin{aligned} &h'(x) + h(x) \\ &= 2 + 2x - 2 \\ &= 2x. \end{aligned}$$

**Conclusion.** La fonction $h$ est une solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$.

**2.**

Soit $y$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z = y - h$. Montre que $y$ est solution de $(E)$ si et seulement si $z$ est solution de $(E_0)$ : $z' = -z$.

INDICE

Calcule $z' + z$ en remplaçant $z$ par $y - h$, puis utilise la question 1.

CORRIGÉ

**Calcul de $z' + z$.** La fonction $z$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z' = y' - h'$. D'après la question 1, $h'(x) + h(x) = 2x$ pour tout réel $x$. Donc, sur $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} &z' + z \\ &= (y' + y) - (h' + h) \\ &= (y' + y) - 2x. \end{aligned}$$

**Équivalence.** Ainsi $z' + z = 0$ équivaut à $y' + y = 2x$.

**Conclusion.** La fonction $z$ est solution de $(E_0)$ si et seulement si $y$ est solution de $(E)$.

### 3.

Résous $(E_0)$, puis déduis-en les solutions de $(E)$.

INDICE

$(E_0)$ est de la forme $z' = az$. Pour revenir à $y$, ajoute $h$.

CORRIGÉ

**Solutions de $(E_0)$.** L'équation $(E_0)$ s'écrit $z' = -z$ : c'est la forme $z' = az$, avec $a = -1$. D'après F02 (forme des solutions de $y' = ay$), ses solutions sont les fonctions $x \longmapsto \lambda e^{-x}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Retour à $y$.** D'après la question 2, $y$ est solution de $(E)$ si et seulement si $z = y - h$ est solution de $(E_0)$, c'est-à-dire $y = z + h$.

**Conclusion.** Les solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$x \longmapsto \lambda e^{-x} + 2x - 2,$$

où $\lambda$ est un réel quelconque.

### 4.

Détermine la solution $f$ de $(E)$ qui vérifie $f(0) = 1$.

INDICE

Remplace $x$ par $0$ dans toute l'expression : le terme $2x - 2$ vaut alors $-2$.

CORRIGÉ

D'après la question 3, il existe un réel $\lambda$ tel que, pour tout réel $x$, $f(x) = \lambda e^{-x} + 2x - 2$. En $0$, le terme $2x - 2$ vaut $-2$ : $f(0) = \lambda - 2$. La condition $f(0) = 1$ donne $\lambda = 3$.

**Conclusion.** Pour tout réel $x$ :

$$f(x) = 3e^{-x} + 2x - 2.$$

### 5.

Montre que la droite $D$ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à la courbe de $f$ en $+\infty$. Précise la position de la courbe par rapport à $D$.

INDICE

Étudie la limite et le signe de $f(x) - (2x - 2)$.

CORRIGÉ

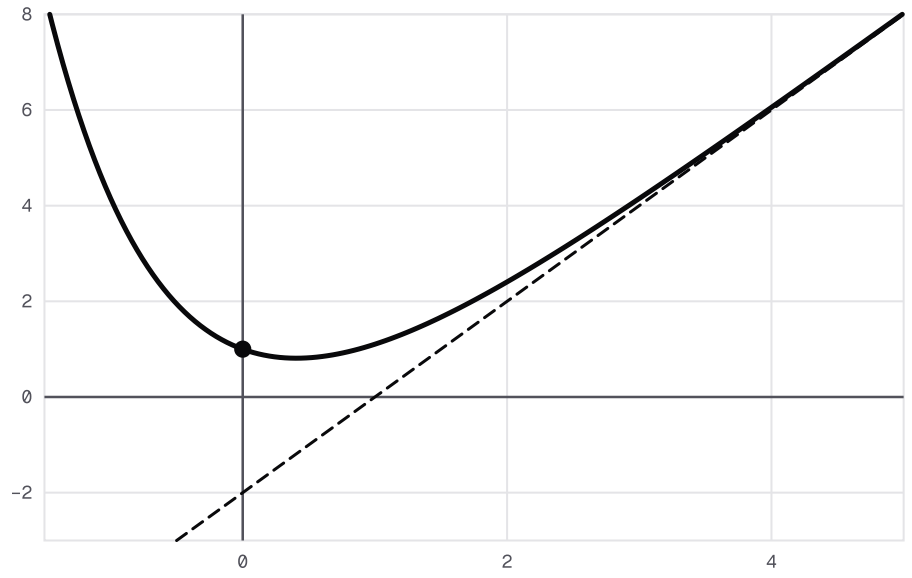
**Écart entre la courbe et $D$.** Pour tout réel $x$ :

$$f(x) - (2x - 2) = 3e^{-x}.$$

**Asymptote.** Quand $x$ tend vers $+\infty$, $e^{-x}$ tend vers $0$, donc $f(x) - (2x - 2)$ tend vers $0$ : $D$ est asymptote à la courbe de $f$ en $+\infty$.

**Position.** Pour tout réel $x$, $3e^{-x} > 0$ : la courbe de $f$ est toujours au-dessus de $D$.

**Conclusion.** La droite $D$ est asymptote à la courbe de $f$ en $+\infty$, et la courbe est située strictement au-dessus de $D$.




**La courbe de f(x) = 2x − 2 + 3e⁻ˣ au-dessus de la droite D : y = 2x − 2, dont elle se rapproche quand x tend vers +∞.**

### Exercice 5

## Un pendule amorti

En physique, on écarte un pendule de sa position d'équilibre, puis on le lâche sans vitesse. On note $\theta(t)$ son angle, en radians, à l'instant $t$, en secondes. On admet que $\theta$ est la restriction à $[0, +\infty[$ de la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + 4y' + 20y = 0$ telle que $\theta(0) = 0{,}1$ et $\theta'(0) = 0$.

### 1.

Écris l'équation caractéristique de $y'' + 4y' + 20y = 0$ et détermine ses racines.

INDICE

Calcule $\Delta = a^2 - 4b$. S'il est négatif, utilise $i\sqrt{-\Delta}$.

CORRIGÉ

**Équation caractéristique.** Elle s'écrit $r^2 + 4r + 20 = 0$, de discriminant :

$$\Delta = 16 - 80 = -64 < 0.$$

**Racines.** Comme $\sqrt{-\Delta} = 8$, les deux racines complexes conjuguées sont :

$$\frac{-4 \pm 8i}{2} = -2 \pm 4i.$$

**Conclusion.** Les racines sont $-2 + 4i$ et $-2 - 4i$ : $p = -2$ et $q = 4$.

### 2.

Déduis-en les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$. Pour le pendule, on ne garde ensuite que $t \geq 0$.

INDICE

Utilise la forme $e^{pt}\left(\alpha\cos(qt) + \beta\sin(qt)\right)$.

CORRIGÉ

On applique F10 (cas $\Delta < 0$) avec $p = -2$ et $q = 4$, trouvés à la question 1.

**Conclusion.** Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$t \longmapsto e^{-2t}\big(\alpha\cos(4t) + \beta\sin(4t)\big),$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont deux réels quelconques.

### 3.

Détermine l'expression de $\theta(t)$.

INDICE

$\theta(0)$ donne $\alpha$. Dérive ensuite le produit de $e^{-2t}$ par la parenthèse avant de calculer $\theta'(0)$.

CORRIGÉ

**Valeur de $\alpha$.** D'après la question 2, il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que, pour tout $t \geq 0$, $\theta(t) = e^{-2t}\left(\alpha\cos(4t) + \beta\sin(4t)\right)$.

Comme $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$, on obtient $\theta(0) = \alpha = 0{,}1$.

**Dérivée.** D'après la dérivée d'un produit, pour tout $t \geq 0$ :

$$\begin{aligned}\theta'(t) = -2e^{-2t}\big(&\alpha\cos(4t)\\ &+ \beta\sin(4t)\big)\\ + e^{-2t}\big(&-4\alpha\sin(4t)\\ &+ 4\beta\cos(4t)\big).\end{aligned}$$

**Valeur de $\beta$.** En $t = 0$, on a $\theta'(0) = -2\alpha + 4\beta$. La condition $\theta'(0) = 0$ s'écrit $-2\alpha + 4\beta = 0$, d'où $\beta = \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}05$.

**Conclusion.** Pour tout $t \geq 0$ :

$$\begin{aligned}\theta(t) = e^{-2t}\big(&0{,}1\cos(4t)\\ &+ 0{,}05\sin(4t)\big).\end{aligned}$$

### 4.

Montre que, pour tout $t \geq 0$, $|\theta(t)| \leq 0{,}15e^{-2t}$. Déduis-en la limite de $\theta(t)$ quand $t$ tend vers $+\infty$, puis interprète.

INDICE

Utilise $|\cos(4t)| \leq 1$ et $|\sin(4t)| \leq 1$, puis le théorème des gendarmes.

CORRIGÉ

**Majoration.** Soit $t \geq 0$. Comme $|\cos(4t)| \leq 1$ et $|\sin(4t)| \leq 1$, la valeur absolue de $0{,}1\cos(4t) + 0{,}05\sin(4t)$ est au plus :

$$0{,}1 + 0{,}05 = 0{,}15.$$

Comme $e^{-2t} > 0$, on en déduit :

$$|\theta(t)| \leq 0{,}15e^{-2t}.$$

**Limite.** Pour tout $t \geq 0$ :

$$\begin{aligned} -0{,}15e^{-2t} &\leq \theta(t) \\ &\leq 0{,}15e^{-2t}. \end{aligned}$$

Les deux bornes tendent vers $0$ quand $t$ tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{t \to +\infty} \theta(t) = 0.$$

**Interprétation.** Le pendule oscille, mais l'écart à l'équilibre diminue : les oscillations sont amorties.

**Conclusion.** Pour tout $t \geq 0$, $|\theta(t)| \leq 0{,}15e^{-2t}$, et $\theta(t)$ tend vers $0$ : le pendule revient vers sa position d'équilibre.

### 5.

Calcule $\theta\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, puis donne une valeur approchée à $10^{-3}$ près. Compare son signe avec celui de $\theta(0)$.

INDICE

Pour $t = \dfrac{\pi}{4}$, on a $4t = \pi$ : utilise $\cos\pi = -1$ et $\sin\pi = 0$.

CORRIGÉ

**Calcul.** Pour $t = \dfrac{\pi}{4}$, on a $4t = \pi$, avec $\cos\pi = -1$ et $\sin\pi = 0$ :

$$\begin{aligned} \theta\left(\frac{\pi}{4}\right) &= e^{-\frac{\pi}{2}}\big(0{,}1 \times (-1) \\ &\qquad + 0{,}05 \times 0\big) \\ &= -0{,}1e^{-\frac{\pi}{2}} \\ &\approx -0{,}021. \end{aligned}$$

**Signe.** Ce nombre est négatif, alors que $\theta(0) = 0{,}1 > 0$.

**Conclusion.** On a $\theta\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \approx -0{,}021$, de signe contraire à $\theta(0)$ : le pendule est passé de l'autre côté de l'équilibre, avec un écart plus petit.