BURHAN

Équations différentielles : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/equations-differentielles/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Équations différentielles	Application	6

Exercice 1

Vérifier sans résoudre : la substitution

Pour savoir si une fonction est solution d'une équation différentielle, tu calcules ses dérivées, puis tu remplaces dans l'équation. L'égalité doit être vraie pour **tout** réel x.

1.

On considère l'équation (E_1) : $y' = -4y - 4$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{-4x} - 1$. Montre que f est une solution de (E_1).

INDICE

Calcule $f'(x)$ d'un côté, $-4f(x) - 4$ de l'autre, puis compare les deux résultats.

2.

On considère l'équation (E_2) : $y'' - y' - 12y = 0$ et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{4x} + 2e^{-3x}$. Montre que g est une solution de (E_2).

INDICE

Il te faut g' et g''. Regroupe ensuite les termes en e^{4x} d'un côté et les termes en e^{-3x} de l'autre.

3.

La fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = xe^{4x}$ est-elle une solution de (E_2) ? Justifie ta réponse.

INDICE

Dérive le produit $x \times e^{4x}$ avec la règle $(uv)' = u'v + uv'$. Un seul réel où l'égalité est fausse suffit pour répondre non.

Exercice 2

Isoler y′ avant de lire a et b

Pour chaque équation, commence par isoler y'. Lis ensuite a et b, puis écris toutes les solutions sur $\mathbb{R}$.

1.

Résous l'équation $4y' + y = 0$.

INDICE

Divise par 4 : tu obtiens une équation de la forme $y' = ay$. Quelle est la valeur de a ?

2.

Résous l'équation $y' - 4y = 8$.

INDICE

Après avoir isolé y', calcule la solution constante $-\dfrac{b}{a}$ en surveillant les signes.

3.

Résous l'équation $3y' + 2y = 6$.

INDICE

Divise toute l'équation par 3 avant de lire a et b : le coefficient de y' doit valoir 1.

4.

Résous l'équation $2y' - 3 = 0$.

INDICE

Ici, y n'apparaît pas : $a = 0$. Cherche les primitives d'une fonction constante.

Exercice 3

Choisir la solution qui passe par un point

Une équation $y' = ay + b$ possède une infinité de solutions. Une condition initiale en sélectionne une seule.

1.

Détermine la solution f de l'équation $y' = -4y + 2$ qui vérifie $f(0) = 1$.

INDICE

Écris d'abord la solution générale avec λ. Remplace ensuite x par 0 dans toute l'expression, constante comprise.

2.

Détermine la solution g de l'équation $3y' + y = 0$ qui vérifie $g(3) = 2$.

INDICE

La condition est donnée en $x = 3$, pas en 0. Remplace x par 3 : l'exposant devient un nombre simple.

Exercice 4

L'équation caractéristique dans les trois cas

Pour chaque équation, écris l'équation caractéristique, calcule son discriminant Δ, puis donne la forme des solutions sur $\mathbb{R}$. Ces formes sont admises dans le cours.

1.

$(E_1) : y'' + y' - 6y = 0.$

INDICE

Remplace y'' par r^2, y' par r et y par 1.

2.

$(E_2) : y'' - 6y' + 9y = 0.$

INDICE

Si $\Delta = 0$, la racine double vaut $r_0 = -\dfrac{a}{2}$, et un facteur x apparaît dans la forme des solutions.

3.

$(E_3) : y'' + 4y' + 13y = 0.$

INDICE

Ici $\Delta < 0$: calcule les racines complexes $p \pm iq$ avec $\sqrt{-\Delta}$, puis lis p et q.

4.

$(E_4) : y'' + 16y = 0.$

INDICE

Il n'y a pas de terme en y' : le coefficient a vaut 0, donc $p = 0$.

Exercice 5

Deux conditions initiales pour une seule solution

Au second ordre, la solution générale contient deux constantes α et β. Il faut donc deux conditions : une sur la fonction, une sur sa dérivée.

1.

On admet que les solutions de $y'' - y' - 6y = 0$ sont les fonctions $x \longmapsto \alpha e^{3x} + \beta e^{-2x}$, avec α et β réels. Détermine la solution f qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 8$.

INDICE

Calcule $f'(x)$ en gardant α et β, puis écris un système de deux équations.

2.

On admet que les solutions de $y'' + 2y' + y = 0$ sont les fonctions $x \longmapsto (\alpha x + \beta)e^{-x}$, avec α et β réels. Détermine la solution g qui vérifie $g(0) = 2$ et $g'(0) = -1$.

INDICE

Pour dériver $(\alpha x + \beta)e^{-x}$, utilise la dérivée d'un produit. En 0, le terme αx s'annule.

Exercice 6

Une constante pour se ramener à l'équation homogène

On considère l'équation (E) : $y'' + 3y' - 4y = -12$. Son second membre est une constante non nulle.

1.

Détermine le réel c tel que la fonction constante $x \longmapsto c$ soit une solution de (E).

INDICE

Une fonction constante a des dérivées première et seconde nulles.

2.

On pose $z = y - 3$. Montre que y est une solution de (E) si et seulement si z est une solution de (E_0) : $z'' + 3z' - 4z = 0$.

INDICE

Exprime z' et z'' à l'aide de y' et y'', puis calcule $z'' + 3z' - 4z$.

3.

Résous (E_0), puis déduis-en les solutions de (E).

INDICE

Résous d'abord l'équation homogène, puis reviens à y grâce à $y = z + 3$.