BURHAN

Équations différentielles : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/equations-differentielles/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Équations différentielles	Application	6

Exercice 1

Vérifier sans résoudre : la substitution

Pour savoir si une fonction est solution d'une équation différentielle, tu calcules ses dérivées, puis tu remplaces dans l'équation. L'égalité doit être vraie pour **tout** réel x.

1.

On considère l'équation (E_1) : $y' = -4y - 4$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{-4x} - 1$. Montre que f est une solution de (E_1).

INDICE

Calcule $f'(x)$ d'un côté, $-4f(x) - 4$ de l'autre, puis compare les deux résultats.

CORRIGÉ

Dérivée de f. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \times (-4)e^{-4x} \\ &= -12e^{-4x}. \end{aligned}$$

Membre de droite. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &-4f(x) - 4 \\ &= -12e^{-4x} + 4 - 4 \\ &= -12e^{-4x}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = -4f(x) - 4$: la fonction f est une solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$.

2.

On considère l'équation (E_2) : $y'' - y' - 12y = 0$ et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{4x} + 2e^{-3x}$. Montre que g est une solution de (E_2).

INDICE

Il te faut g' et g''. Regroupe ensuite les termes en e^{4x} d'un côté et les termes en e^{-3x} de l'autre.

CORRIGÉ

Dérivées de g. La fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 4e^{4x} - 6e^{-3x}, \\ g''(x) &= 16e^{4x} + 18e^{-3x}. \end{aligned}$$

Substitution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On regroupe les termes en e^{4x}, puis ceux en e^{-3x} :

$$\begin{aligned} &g''(x) - g'(x) - 12g(x) \\ &= (16 - 4 - 12)e^{4x} \\ &\quad + (18 + 6 - 24)e^{-3x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $g''(x) - g'(x) - 12g(x) = 0$: la fonction g est une solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$.

3.

La fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = xe^{4x}$ est-elle une solution de (E_2) ? Justifie ta réponse.

INDICE

Dérive le produit $x \times e^{4x}$ avec la règle $(uv)' = u'v + uv'$. Un seul réel où l'égalité est fausse suffit pour répondre non.

CORRIGÉ

Dérivées de k. D'après la dérivée d'un produit, k est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} k'(x) &= e^{4x} + 4xe^{4x} \\ &= (4x+1)e^{4x}, \\ k''(x) &= 4e^{4x} \\ &\quad + 4(4x+1)e^{4x} \\ &= (16x+8)e^{4x}. \end{aligned}$$

Substitution. Soit $x \in \mathbb{R}$. Dans $k''(x) - k'(x) - 12k(x)$, les termes en xe^{4x} ont pour coefficient $16 - 4 - 12 = 0$, les autres $8 - 1 = 7$:

$$\begin{aligned} &k''(x) - k'(x) - 12k(x) \\ &= 7e^{4x}. \end{aligned}$$

Test en $x = 0$. On obtient $7e^{0} = 7$, et $7 \neq 0$.

Conclusion. L'égalité $k''(x) - k'(x) - 12k(x) = 0$ est fausse pour $x = 0$: la fonction k n'est pas une solution de (E_2).

À retenir. Une vérification montre qu'**une** fonction est solution. Elle ne donne pas **toutes** les solutions : ce n'est pas une résolution.

Exercice 2

Isoler y′ avant de lire a et b

Pour chaque équation, commence par isoler y'. Lis ensuite a et b, puis écris toutes les solutions sur $\mathbb{R}$.

1.

Résous l'équation $4y' + y = 0$.

INDICE

Divise par 4 : tu obtiens une équation de la forme $y' = ay$. Quelle est la valeur de a ?

CORRIGÉ

Mise en forme. On isole $4y'$, puis on divise par 4, qui n'est pas nul :

$$y' = -\frac{1}{4}y.$$

C'est la forme $y' = ay$, avec $a = -\frac{1}{4}$.

Conclusion. D'après F02 (forme des solutions de $y' = ay$), les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$x \longmapsto \lambda e^{-\frac{1}{4}x},$$

où λ est un réel quelconque.

2.

Résous l'équation $y' - 4y = 8$.

INDICE

Après avoir isolé y', calcule la solution constante $-\frac{b}{a}$ en surveillant les signes.

CORRIGÉ

Mise en forme. On isole y' :

$$y' = 4y + 8.$$

Donc $a = 4$ et $b = 8$, avec $a \neq 0$.

Solution constante.

$$-\frac{b}{a} = -\frac{8}{4} = -2.$$

Contrôle : la dérivée d'une constante est nulle, et $4 \times (-2) + 8 = 0$.

Conclusion. D'après F03 (forme des solutions de $y' = ay + b$ quand $a \neq 0$), les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$x \longmapsto \lambda e^{4x} - 2,$$

où λ est un réel quelconque.

3.

Résous l'équation $3y' + 2y = 6$.

INDICE

Divise toute l'équation par 3 avant de lire a et b : le coefficient de y' doit valoir 1.

CORRIGÉ

Mise en forme. On isole $3y'$, soit $3y' = -2y + 6$, puis on divise par 3 :

$$y' = -\frac{2}{3}y + 2.$$

Ainsi $a = -\dfrac{2}{3}$ et $b = 2$, avec $a \neq 0$.

Solution constante.

$$\begin{aligned} -\frac{b}{a} &= -\frac{2}{-\frac{2}{3}} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Contrôle : $-\dfrac{2}{3} \times 3 + 2 = 0$.

Conclusion. D'après F03 (forme des solutions de $y' = ay + b$ quand $a \neq 0$), les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$x \longmapsto \lambda e^{-\frac{2}{3}x} + 3,$$

où λ est un réel quelconque.

4.

Résous l'équation $2y' - 3 = 0$.

INDICE

Ici, y n'apparaît pas : $a = 0$. Cherche les primitives d'une fonction constante.

CORRIGÉ

Mise en forme. On isole y' :

$$y' = \frac{3}{2}.$$

La fonction y n'apparaît pas dans le membre de droite : $a = 0$ et $b = \dfrac{3}{2}$.

Primitives. On cherche les fonctions dont la dérivée est la constante $\dfrac{3}{2}$, donc les primitives de cette fonction constante sur $\mathbb{R}$ (F04, le cas $a = 0$).

Conclusion. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$x \longmapsto \frac{3}{2}x + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Attention. L'écriture $\lambda e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ n'a pas de sens ici : elle demande $a \neq 0$.

Exercice 3

Choisir la solution qui passe par un point

Une équation $y' = ay + b$ possède une infinité de solutions. Une condition initiale en sélectionne une seule.

1.

Détermine la solution f de l'équation $y' = -4y + 2$ qui vérifie $f(0) = 1$.

INDICE

Écris d'abord la solution générale avec λ. Remplace ensuite x par 0 dans toute l'expression, constante comprise.

CORRIGÉ

Solution générale. Ici $a = -4$ et $b = 2$, avec $a \neq 0$. La solution constante vaut :

$$-\frac{b}{a} = -\frac{2}{-4} = \frac{1}{2}.$$

D'après F03 (forme des solutions de $y' = ay + b$ quand $a \neq 0$), il existe un réel λ tel que, pour tout réel x :

$$f(x) = \lambda e^{-4x} + \frac{1}{2}.$$

Condition initiale. Comme $e^0 = 1$, on a $f(0) = \lambda + \frac{1}{2}$. L'égalité $\lambda + \frac{1}{2} = 1$ donne $\lambda = \frac{1}{2}$.

Contrôle. $f(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Conclusion. La solution cherchée est la fonction f définie, pour tout réel x, par :

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-4x} + \frac{1}{2}.$$

2.

Détermine la solution g de l'équation $3y' + y = 0$ qui vérifie $g(3) = 2$.

INDICE

La condition est donnée en $x = 3$, pas en 0. Remplace x par 3 : l'exposant devient un nombre simple.

CORRIGÉ

Solution générale. En divisant par 3, l'équation devient $y' = -\frac{1}{3}y$. D'après F02 (forme des solutions de $y' = ay$), il existe un réel λ tel que, pour tout réel x, $g(x) = \lambda e^{-\frac{1}{3}x}$.

Condition en $x = 3$. Comme $-\frac{1}{3} \times 3 = -1$, on a $g(3) = \lambda e^{-1}$. L'égalité $\lambda e^{-1} = 2$ donne $\lambda = 2e$.

Expression de g. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g(x) &= 2e \times e^{-\frac{1}{3}x} \\ &= 2e^{1-\frac{x}{3}}. \end{aligned}$$

Contrôle : $g(3) = 2e^{0} = 2$.

Conclusion. La solution cherchée est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^{1-\frac{x}{3}}$.

Exercice 4

L'équation caractéristique dans les trois cas

Pour chaque équation, écris l'équation caractéristique, calcule son discriminant Δ, puis donne la forme des solutions sur $\mathbb{R}$. Ces formes sont admises dans le cours.

1.

$(E_1) : y'' + y' - 6y = 0.$

INDICE

Remplace y'' par r^2, y' par r et y par 1.

CORRIGÉ

Équation caractéristique. Elle s'écrit $r^2 + r - 6 = 0$. Son discriminant vaut :

$$\begin{aligned}\Delta &= 1^2 - 4 \times (-6) \\ &= 25 > 0.\end{aligned}$$

Racines. Deux racines réelles distinctes :

$$r_1 = \frac{-1+5}{2} = 2,$$
$$r_2 = \frac{-1-5}{2} = -3.$$

Conclusion. D'après F08 (cas $\Delta > 0$), les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$x \longmapsto \alpha e^{2x} + \beta e^{-3x},$$

où α et β sont deux réels quelconques.

2.

$(E_2) : y'' - 6y' + 9y = 0.$

INDICE

Si $\Delta = 0$, la racine double vaut $r_0 = -\dfrac{a}{2}$, et un facteur x apparaît dans la forme des solutions.

CORRIGÉ

L'équation caractéristique s'écrit $r^2 - 6r + 9 = 0$, soit $(r-3)^2 = 0$. Son discriminant est $\Delta = 36 - 36 = 0$: elle a une racine double, $r_0 = 3$.

Conclusion. D'après F09 (cas $\Delta = 0$), les solutions de (E_2) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$x \longmapsto (\alpha x + \beta) e^{3x},$$

où α et β sont deux réels quelconques.

3.

$(E_3) : y'' + 4y' + 13y = 0.$

INDICE

Ici $\Delta < 0$: calcule les racines complexes $p \pm iq$ avec $\sqrt{-\Delta}$, puis lis p et q.

CORRIGÉ

Équation caractéristique. Elle s'écrit $r^2 + 4r + 13 = 0$. Son discriminant vaut :

$$\Delta = 16 - 52 = -36 < 0.$$

Racines. Comme $\sqrt{-\Delta} = 6$, les deux racines complexes conjuguées sont :

$$\frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i.$$

Donc $p = -2$ et $q = 3$.

Conclusion. D'après F10 (cas $\Delta < 0$), les solutions de (E_3) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$x \longmapsto e^{-2x}\big(\alpha \cos(3x) + \beta \sin(3x)\big),$$

où α et β sont deux réels quelconques.

4.

$(E_4) : y'' + 16y = 0.$

INDICE

Il n'y a pas de terme en y' : le coefficient a vaut 0, donc $p = 0$.

CORRIGÉ

Équation caractéristique. Elle s'écrit $r^2 + 16 = 0$. Son discriminant vaut :

$$\Delta = 0 - 64 = -64 < 0.$$

Racines. Ce sont $4i$ et $-4i$, donc $p = 0$ et $q = 4$. Le facteur e^{px} vaut alors 1.

Conclusion. D'après F10 (cas $\Delta < 0$), les solutions de (E_4) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$x \longmapsto \alpha \cos(4x) + \beta \sin(4x),$$

où α et β sont deux réels quelconques.

Exercice 5

Deux conditions initiales pour une seule solution

Au second ordre, la solution générale contient deux constantes α et β. Il faut donc deux conditions : une sur la fonction, une sur sa dérivée.

1.

On admet que les solutions de $y'' - y' - 6y = 0$ sont les fonctions $x \longmapsto \alpha e^{3x} + \beta e^{-2x}$, avec α et β réels. Détermine la solution f qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 8$.

INDICE

Calcule $f'(x)$ en gardant α et β, puis écris un système de deux équations.

CORRIGÉ

Dérivée de la solution générale. Soit f une solution : il existe deux réels α et β tels que, pour tout réel x, $f(x) = \alpha e^{3x} + \beta e^{-2x}$. Alors, pour tout réel x :

$$f'(x) = 3\alpha e^{3x} - 2\beta e^{-2x}.$$

Système. En 0, on a $f(0) = \alpha + \beta$ et $f'(0) = 3\alpha - 2\beta$. Les deux conditions donnent :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 3\alpha - 2\beta = 8 \end{cases}$$

On multiplie la première ligne par 2 et on l'ajoute à la seconde : $5\alpha = 10$, donc $\alpha = 2$. Puis $\beta = 1 - 2 = -1$.

Contrôle. $f(0) = 2 - 1 = 1$ et $f'(0) = 6 + 2 = 8$.

Conclusion. La solution cherchée est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{3x} - e^{-2x}$.

2.

On admet que les solutions de $y'' + 2y' + y = 0$ sont les fonctions $x \longmapsto (\alpha x + \beta)e^{-x}$, avec α et β réels. Détermine la solution g qui vérifie $g(0) = 2$ et $g'(0) = -1$.

INDICE

Pour dériver $(\alpha x + \beta)e^{-x}$, utilise la dérivée d'un produit. En 0, le terme αx s'annule.

CORRIGÉ

Dérivée. Soit g une solution : il existe deux réels α et β tels que, pour tout réel x, $g(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$. D'après la dérivée d'un produit, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) = \alpha e^{-x} \\ - (\alpha x + \beta)e^{-x}. \end{aligned}$$

Conditions. En 0, on a $g(0) = \beta$ et $g'(0) = \alpha - \beta$. La condition $g(0) = 2$ donne $\beta = 2$. Ensuite $\alpha - 2 = -1$ donne $\alpha = 1$.

Contrôle. Avec $\alpha = 1$ et $\beta = 2$, on obtient, pour tout réel x, $g'(x) = (-x - 1)e^{-x}$; donc $g'(0) = -1$.

Conclusion. La solution cherchée est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x + 2)e^{-x}$.

Exercice 6

Une constante pour se ramener à l'équation homogène

On considère l'équation (E) : $y'' + 3y' - 4y = -12$. Son second membre est une constante non nulle.

1.

Détermine le réel c tel que la fonction constante $x \longmapsto c$ soit une solution de (E).

INDICE

Une fonction constante a des dérivées première et seconde nulles.

CORRIGÉ

Soit c un réel. La fonction constante $x \longmapsto c$ a des dérivées première et seconde nulles. Elle est donc solution de (E) si et seulement si :

$$-4c = -12,$$

c'est-à-dire $c = 3$.

Conclusion. Le réel cherché est $c = 3$: la fonction constante $x \longmapsto 3$ est une solution de (E).

2.

On pose $z = y - 3$. Montre que y est une solution de (E) si et seulement si z est une solution de (E_0) : $z'' + 3z' - 4z = 0$.

INDICE

Exprime z' et z'' à l'aide de y' et y'', puis calcule $z'' + 3z' - 4z$.

CORRIGÉ

Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et $z = y - 3$.

Dérivées de z. Comme 3 est une constante, $z' = y'$ et $z'' = y''$.

Calcul. Sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &z'' + 3z' - 4z \\ &= y'' + 3y' - 4(y - 3) \\ &= y'' + 3y' - 4y + 12. \end{aligned}$$

Cette expression est nulle exactement lorsque $y'' + 3y' - 4y = -12$.

Conclusion. La fonction y est une solution de (E) si et seulement si z est une solution de (E_0).

3.

Résous (E_0), puis déduis-en les solutions de (E).

INDICE

Résous d'abord l'équation homogène, puis reviens à y grâce à $y = z + 3$.

CORRIGÉ

Équation caractéristique de (E_0). Elle s'écrit $r^2 + 3r - 4 = 0$, de discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25 > 0$. Ses racines sont :

$$r_1 = \frac{-3 + 5}{2} = 1,$$
$$r_2 = \frac{-3 - 5}{2} = -4.$$

Solutions de (E_0). D'après F08 (cas $\Delta > 0$), ce sont les fonctions $x \longmapsto \alpha e^{x} + \beta e^{-4x}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Retour à y. D'après la question 2, y est solution de (E) si et seulement si $z = y - 3$ est solution de (E_0), c'est-à-dire $y = z + 3$.

Conclusion. Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$x \longmapsto \alpha e^{x} + \beta e^{-4x} + 3,$$

où α et β sont deux réels quelconques.