BURHAN

Équations différentielles

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/equations-differentielles/cours

Chapitre	Semestre
Équations différentielles	Semestre 2

Une tasse de thé qui refroidit

Un thé posé sur le bureau

Il fait 20 degrés dans ta chambre. Tu poses sur ton bureau un verre de thé à la menthe à 80 degrés. Tu oublies le thé pendant une heure de révision.

Que devient sa température pendant ce temps ?

Devine : La courbe de la température

Comment la température du thé évolue-t-elle au fil des minutes ?

A. Elle baisse de la même quantité chaque minute, jusqu'à 0 degré.

Faux.
La pièce est à 20 degrés : le thé ne peut pas devenir plus froid que l'air qui l'entoure.

B. Elle baisse de moins en moins vite vers 20 degrés.

Juste.
Plus l'écart avec la pièce est petit, plus le thé perd lentement sa chaleur.

C. Elle descend jusqu'à 20 degrés, puis continue de baisser.

Faux.
Une fois à la température de la pièce, le thé n'a plus de raison de se refroidir.

D. Elle baisse de plus en plus vite.

Faux.
C'est l'inverse : le thé brûlant perd beaucoup de chaleur, le thé tiède très peu.

Correction
Le thé se refroidit d'autant plus vite que l'écart avec la pièce est grand. Au début, l'écart vaut 60 degrés : la baisse est rapide. Ensuite l'écart diminue, et la baisse ralentit. La température se rapproche de 20 degrés sans descendre en dessous.

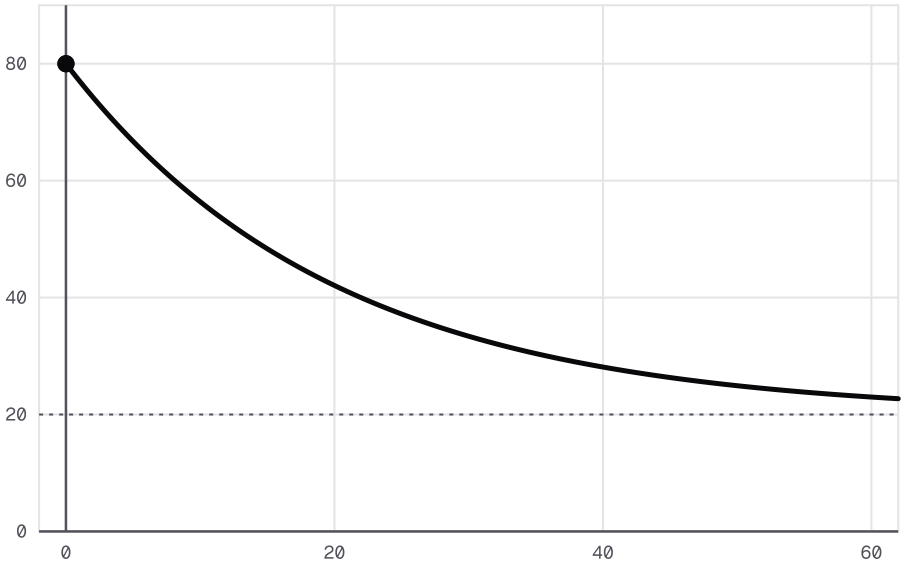
Une vitesse qui dépend de la valeur

La vitesse à laquelle la température θ change, c'est sa dérivée θ'. Ici, cette vitesse dépend de θ elle-même.

On obtient une égalité qui relie une fonction inconnue et sa dérivée. Un physicien te donnerait par exemple $\theta' = -0{,}05\,\theta + 1$.

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à **vérifier** qu'une fonction est solution, puis à **résoudre** $y' = ay + b$ et $y'' + ay' + by = 0$.

Tu sauras aussi **choisir** la solution qui part de la bonne valeur, et **te ramener** à une équation connue.



Le thé posé à 80 degrés dans une chambre à 20 degrés : sa température chute vite au début, puis de plus en plus lentement, en approchant 20 sans y descendre.

Petit rappel, qui sert tout de suite. Si u est dérivable sur $\mathbb{R}$, la dérivée de $x \mapsto e^{u(x)}$ est $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$.

Par exemple, la dérivée de $x \mapsto e^{-2x}$ est $x \mapsto -2e^{-2x}$.

Le mot exact

Devine : Une fonction dont la dérivée est son triple

On cherche une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) = 3f(x)$ pour tout réel x. Laquelle convient ?

A. $x \mapsto e^{3x}$

Juste.
Sa dérivée est $3e^{3x}$: c'est bien le triple de la fonction, pour tout réel x.

B. $x \mapsto 3x$

Faux.
Sa dérivée vaut 3, alors que le triple de la fonction vaut $9x$. Ces deux nombres diffèrent dès que $x \neq \dfrac{1}{3}$.

C. $x \mapsto x^3$

Faux.
Sa dérivée est $3x^2$, et le triple de la fonction est $3x^3$: ce n'est pas la même chose.

D. $x \mapsto 3$

Faux.
Sa dérivée est nulle, alors que son triple vaut 9.

Correction
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x}$. D'après la dérivée de $x \mapsto e^{u(x)}$, pour tout réel x :

$$f'(x) = 3e^{3x} = 3f(x).$$

Les autres fonctions ne vérifient pas l'égalité pour tous les réels.

Définition : Équation différentielle et solution

Une **équation différentielle** relie une fonction inconnue y, écrite sans sa variable, à ses dérivées y' et y''. Dans ce chapitre, a et b désignent des réels, et les deux équations de référence s'écrivent

$$y' = ay + b \qquad \text{ou} \qquad y'' + ay' + by = 0.$$

Une **solution** sur $\mathbb{R}$ est une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ (deux fois pour la seconde forme) qui vérifie l'égalité pour tout réel x : par exemple, $f'(x) = af(x) + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. **Résoudre** l'équation, c'est déterminer toutes ses solutions.

En clair. L'inconnue n'est plus un nombre : c'est une fonction.

Au lieu d'écrire « $f'(x) = 3f(x)$ pour tout x », on écrit plus court $y' = 3y$. Une **solution** doit vérifier l'égalité pour **tous** les réels x, pas pour un seul.

Vérifie : Une égalité vraie en un point

La fonction $k : x \mapsto 3x$ vérifie $k'(x) = 3k(x)$ pour $x = \dfrac{1}{3}$. Est-elle solution de $y' = 3y$?

A. Oui, car l'égalité $k'(x) = 3k(x)$ est vraie pour au moins un réel, $x = \dfrac{1}{3}$.

Faux.
Une solution vérifie l'égalité pour **tous** les réels. Ici elle échoue en $x = 0$.

B. Non : en $x = 0$, l'égalité est fausse.

Juste.
$k'(0) = 3$ alors que $3k(0) = 0$: un seul réel où l'égalité échoue suffit à rejeter k.

C. Oui, car k est une fonction affine, donc dérivable sur tout $\mathbb{R}$.

Faux.
Être dérivable est nécessaire, mais il faut aussi que l'égalité soit vraie pour tout x.

Correction

En $x = \dfrac{1}{3}$: $k'\left(\dfrac{1}{3}\right) = 3$ et $3k\left(\dfrac{1}{3}\right) = 3$.

Mais en $x = 0$: $k'(0) = 3$ et $3k(0) = 0$.

L'égalité n'est pas vraie pour tout réel, donc k n'est **pas** solution de $y' = 3y$.

Vérifier une solution

Méthode : vérifier qu'une fonction est solution

1. **Dérive** la fonction proposée : $f'(x)$, et aussi $f''(x)$ pour une équation avec y''.
2. **Remplace** y par $f(x)$, y' par $f'(x)$ et y'' par $f''(x)$.
3. **Calcule** les deux membres et montre qu'ils sont égaux pour tout réel x.
4. **Conclus** par une phrase : « donc f est solution de l'équation sur $\mathbb{R}$ ».

Exemple : Exemple guidé : une équation du premier ordre

Montrons que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5e^{-2x} + 2$ est solution de $y' = -2y + 4$.

Soit x un réel. D'une part :

$$f'(x) = -10e^{-2x}.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} &- 2f(x) + 4 \\ &= -10e^{-2x} - 4 + 4 \\ &= -10e^{-2x}. \end{aligned}$$

Les deux membres sont égaux pour tout réel x : donc f est solution de $y' = -2y + 4$ sur $\mathbb{R}$.

À toi : une équation avec y seconde

Vérifie que la fonction u définie par $u(x) = \cos(2x)$ est solution de l'équation $y'' + 4y = 0$.

Indice 1

Dérive deux fois. Rappel : la dérivée de $x \mapsto \cos(kx)$ est $x \mapsto -k\sin(kx)$.

Indice 2

$u'(x) = -2\sin(2x)$, puis $u''(x) = -4\cos(2x)$.

Indice 3

Remplace dans $u''(x) + 4u(x)$ et simplifie.

Réponse

Pour tout réel x : $u'(x) = -2\sin(2x)$ et $u''(x) = -4\cos(2x)$. Donc

$$\begin{aligned} u''(x) + 4u(x) &= -4\cos(2x) \\ &\quad + 4\cos(2x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

L'égalité est vraie pour tout réel x : u est solution de $y'' + 4y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Attention : Vérifier n'est pas résoudre

Une vérification prouve qu'**une** fonction est solution. Elle ne prouve jamais que ce sont **toutes** les solutions : d'autres fonctions peuvent convenir aussi.

Pour les trouver toutes, il faut un théorème. C'est l'objet des sections suivantes.

Le premier ordre : y′ = ay + b

Combien de solutions

Devine : Toutes les solutions

Tu sais que $x \mapsto e^{3x}$ est solution de $y' = 3y$. Combien cette équation a-t-elle de solutions sur $\mathbb{R}$?

A. Une seule : $x \mapsto e^{3x}$.
Faux.
La fonction $x \mapsto 2e^{3x}$ a pour dérivée $6e^{3x}$, le triple d'elle-même : elle convient aussi.

B. Deux : $x \mapsto e^{3x}$ et la fonction nulle.
Faux.
Tout multiple de e^{3x} convient, par exemple $x \mapsto -7e^{3x}$.

C. Une infinité : les fonctions $x \mapsto e^{3x} + \lambda$, avec λ réel quelconque.
Faux.
La dérivée de $e^{3x} + \lambda$ est $3e^{3x}$, et le triple de la fonction est $3e^{3x} + 3\lambda$. Ils diffèrent si $\lambda \neq 0$.

D. Une infinité : les $x \mapsto \lambda e^{3x}$, λ réel.
Juste.
Et le théorème qui suit dit qu'il n'y en a pas d'autres.

Correction
Pour tout réel λ, la dérivée de $x \mapsto \lambda e^{3x}$ est $x \mapsto 3\lambda e^{3x}$: c'est trois fois la fonction. L'équation a donc une infinité de solutions. Le théorème suivant prouve que ce sont les seules.

Reste une question : existe-t-il d'autres solutions que les $x \mapsto \lambda e^{3x}$? Le théorème suivant répond **non**. Il est **démontré**.

Sa preuve dérive un produit : rappelle-toi que $(uv)' = u'v + uv'$.

Le théorème démontré

Théorème : Solutions de l'équation y′ = ay

Soit a un réel. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions

$$x \longmapsto \lambda e^{ax}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Démonstration

Pour tout réel λ, la fonction $f : x \mapsto \lambda e^{ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \lambda a e^{ax} = af(x)$: c'est une solution.

Réciproquement, soit f une solution. On pose $g(x) = f(x)e^{-ax}$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{-ax} - af(x)e^{-ax} \\ &= \left(f'(x) - af(x)\right)e^{-ax} = 0. \end{aligned}$$

Une fonction de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ y est constante : il existe un réel λ tel que $g(x) = \lambda$ pour tout x, c'est-à-dire $f(x) = \lambda e^{ax}$.

En clair. Les solutions de $y' = ay$ sont les multiples de $x \mapsto e^{ax}$.

L'idée de la preuve : si $f' = af$, le produit $x \mapsto f(x)e^{-ax}$ a une dérivée nulle. Or une fonction de dérivée nulle sur un intervalle y est constante.

Vérifie : Une équation à lire avec soin

Quelles sont les solutions de l'équation $2y' = y$?

A. Les fonctions $x \mapsto \lambda e^{2x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Faux.
Le 2 multiplie y' : il faut d'abord isoler y'.

B. Les fonctions $x \mapsto 2\lambda e^{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Faux.
Pour $\lambda \neq 0$, leur dérivée est égale à elles-mêmes, alors qu'il faudrait la moitié d'elles-mêmes.

C. Les fonctions $x \mapsto e^{\frac{1}{2}x} + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Faux.
La dérivée efface la constante, mais le membre de droite la garde : l'égalité est perdue.

D. Les fonctions $x \mapsto \lambda e^{\frac{1}{2}x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Juste.
En divisant par 2, on obtient $y' = \dfrac{1}{2}y$, donc $a = \dfrac{1}{2}$.

Correction

On divise par 2 : $y' = \frac{1}{2}y$. C'est la forme $y' = ay$ avec $a = \frac{1}{2}$. Les solutions sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda e^{\frac{1}{2}x}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ajouter une constante

Devine : Une solution qui ne bouge pas

On cherche une fonction **constante** $x \mapsto c$ solution de $y' = -2y + 4$. Que vaut c ?

A. $c = 4$

Faux.

On a $-2 \times 4 + 4 = -4$, qui n'est pas nul.

B. $c = 2$

Juste.

La dérivée d'une constante est nulle, et $-2 \times 2 + 4 = 0$.

C. $c = -2$

Faux.

On a $-2 \times (-2) + 4 = 8$, qui n'est pas nul.

D. Aucune constante ne convient, car sa dérivée est nulle.

Faux.

Une dérivée nulle convient très bien : il suffit que le second membre soit nul aussi.

Correction

Une constante c a une dérivée nulle. Elle est solution si et seulement si $0 = -2c + 4$, c'est-à-dire $c = 2$.

La fonction constante $x \mapsto 2$ est la **solution constante**. Si f est solution de $y' = -2y + 4$, alors la fonction $f - 2$ vérifie

$$\begin{aligned}(f-2)' = f' &= -2f + 4 \\ &= -2(f-2).\end{aligned}$$

Donc $f - 2$ est solution de $y' = -2y$: il existe un réel λ tel que, pour tout réel x, $f(x) - 2 = \lambda e^{-2x}$, soit $f(x) = \lambda e^{-2x} + 2$.

Le cas général suit ce chemin, et il est démontré aussi.

Théorème : Solutions de l'équation y′ = ay + b, avec a ≠ 0

Soit a et b deux réels, avec $a \neq 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions

$$x \longmapsto \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Parmi elles, la seule solution constante est la fonction $x \longmapsto -\dfrac{b}{a}$.

Démonstration

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et g la fonction définie par $g(x) = f(x) + \dfrac{b}{a}$. Alors $g' = f'$ et $ag(x) = af(x) + b$. Donc f est solution de $y' = ay + b$ si et seulement si g est solution de $y' = ay$, c'est-à-dire s'il existe un réel λ tel que $g(x) = \lambda e^{ax}$ pour tout x, soit $f(x) = \lambda e^{ax} - \dfrac{b}{a}$.

Une fonction constante égale à c a une dérivée nulle : elle est solution si et seulement si $0 = ac + b$, soit $c = -\dfrac{b}{a}$.

La méthode en quatre gestes

Méthode : résoudre y′ = ay + b

1. **Isole** y' : il doit être seul à gauche, avec le coefficient 1.
2. **Lis** a **et** b, chacun avec son signe.
3. **Calcule la constante** $-\dfrac{b}{a}$, lorsque $a \neq 0$.
4. **Conclus**, pour $a \neq 0$: « les solutions sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{ax} - \dfrac{b}{a}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ ».

Exemple : Exemple guidé : un coefficient devant y′

Résolvons $2y' + y = 4$.

1. **Isoler.** On passe y à droite, puis on divise par 2 : $y' = -\dfrac{1}{2}y + 2$.
2. **Lire.** $a = -\dfrac{1}{2}$ et $b = 2$.
3. **Constante.** $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{2}{-1/2} = 4$.
4. **Conclure.** Les solutions sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{2}x} + 4$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

À toi : Exemple à compléter

L'équation $y' = -0{,}5y + 1$ est déjà isolée. Complète les étapes 2 à 4 : lis a et b, calcule $-\dfrac{b}{a}$, puis conclus.

Indice 1
a est le nombre qui multiplie y, avec son signe.
Indice 2
$a = -0{,}5$ et $b = 1$, donc $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{1}{-0{,}5}$.

Indice 3

Diviser par $-0{,}5$, c'est multiplier par -2.

Réponse

On lit $a = -0{,}5$ et $b = 1$. Alors

$$-\frac{b}{a} = -\frac{1}{-0{,}5} = 2.$$

Les solutions sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-0{,}5x} + 2$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Contrôle : la constante 2 vérifie bien $0 = -0{,}5 \times 2 + 1$.

Deux pièges à éviter

Attention : Isole y′ avant de lire a

Dans $y' + 3y = 6$, le nombre écrit devant y est 3. Pourtant a ne vaut pas 3.

On fait passer $3y$ à droite : $y' = -3y + 6$. Ainsi $a = -3$, $b = 6$, et les solutions sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-3x} + 2$.

Avec $a = 3$, tu obtiendrais des exponentielles croissantes : c'est faux.

Trouve l'erreur : Une copie à corriger

Un élève résout $y' = 2y + 6$ ainsi : « $a = 2$ et $b = 6$. La constante vaut $\frac{b}{a} = 3$. Les solutions sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{2x} + 3$. » Où est l'erreur ?

A. Dans la lecture de a : l'équation n'est pas isolée, il fallait $a = -2$.

Faux.

L'équation est déjà isolée, et le coefficient de y est bien 2.

B. Dans la constante : c'est $-\frac{b}{a} = -3$.

Juste.

L'élève a oublié le signe moins : la solution constante est $x \mapsto -\frac{b}{a}$.

C. Dans l'exponentielle : avec $a = 2$, il fallait écrire e^{-2x}.

Faux.

Avec $a = 2$, l'exponentielle est bien e^{2x}.

D. Nulle part : la copie est juste.

Faux.

Teste la constante 3 : $2 \times 3 + 6 = 12$, qui n'est pas nul.

Correction

On lit $a = 2$ et $b = 6$, donc $-\frac{b}{a} = -3$. Les solutions sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{2x} - 3$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Contrôle : la constante -3 vérifie $2 \times (-3) + 6 = 0$.

Attention : La solution constante est –b/a

La solution constante vaut $-\dfrac{b}{a}$, pas $\dfrac{b}{a}$.

Un contrôle évite l'erreur : une constante a une dérivée nulle, donc elle doit annuler le membre de droite. Pour $y' = 2y + 6$, la constante 3 donne $2 \times 3 + 6 = 12$: elle ne convient pas.

Le cas a égal à zéro

Devine : Quand y n'apparaît plus

Dans $y' = 5$, on a $a = 0$: la formule $-\dfrac{b}{a}$ n'a plus de sens. Quelles sont les solutions ?

A. Les fonctions $x \mapsto 5x + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Juste.

Ce sont les fonctions dont la dérivée vaut 5, c'est-à-dire les primitives de 5.

B. Les fonctions $x \mapsto \lambda e^{5x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Faux.

Leur dérivée est $5\lambda e^{5x}$: elle n'est jamais la constante 5.

C. La seule fonction constante $x \mapsto 5$, puisque $b = 5$.

Faux.

Sa dérivée est nulle, pas égale à 5.

Correction

Une solution de $y' = 5$ est une fonction de dérivée constante égale à 5 : c'est une primitive de $x \mapsto 5$. Ce sont les fonctions $x \mapsto 5x + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Propriété : Le cas a = 0 : l'équation y' = b

Soit b un réel. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = b$ sont les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction constante $x \mapsto b$, c'est-à-dire les fonctions

$$x \longmapsto bx + k, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Exemple : une primitive suffit

Les solutions de $y' = 5$ sont les fonctions $x \mapsto 5x + k$, $k \in \mathbb{R}$. Par exemple, $x \mapsto 5x - 1$ a pour dérivée 5. Ce cas se règle avec les primitives : aucune exponentielle n'apparaît.

Une solution qui part de la bonne valeur

Une infinité de courbes

Devine : Un point de départ imposé

Les solutions de $y' = -0{,}5y + 1$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-0{,}5x} + 2$. Combien d'entre elles valent $3{,}5$ en $x = 0$?

A. Une infinité, car λ peut prendre n'importe quelle valeur réelle.

Faux.

λ est quelconque au départ ; la condition le fixe.

B. Aucune.

Faux.

La valeur en 0 vaut $\lambda + 2$, et λ peut être n'importe quel réel.

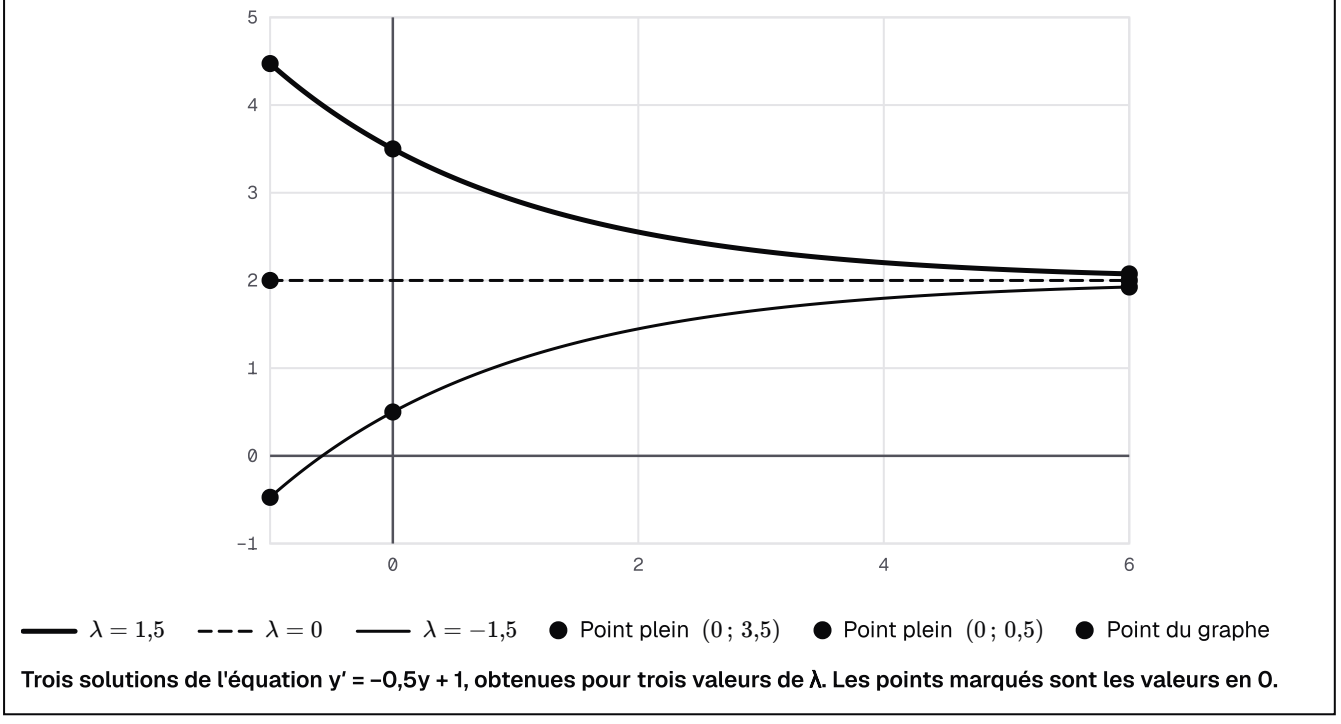
C. Exactement une.

Juste.

La valeur en 0 est $\lambda + 2$: elle vaut $3{,}5$ pour une seule valeur de λ.

Correction

En $x = 0$, la solution vaut $\lambda e^0 + 2 = \lambda + 2$. L'égalité $\lambda + 2 = 3{,}5$ donne une seule valeur : $\lambda = 1{,}5$. Une seule solution part donc de $3{,}5$.



Trois solutions de l'équation y′ = −0,5y + 1, obtenues pour trois valeurs de λ. Les points marqués sont les valeurs en 0.

Chaque valeur de λ donne une courbe. Deux de ces courbes ne se croisent jamais : leur écart vaut $(\lambda - \lambda')e^{-0{,}5x}$, qui n'est jamais nul si $\lambda \neq \lambda'$.

Imposer la valeur en 0, c'est **choisir une courbe**.

Le théorème suivant le garantit dans tous les cas où $a \neq 0$. Il est **démontré** : tout revient à résoudre une équation d'inconnue λ.

Le théorème et la méthode

Théorème : Solution vérifiant une condition initiale (premier ordre)

Soit a, b, x_0 et y_0 des réels, avec $a \neq 0$. L'équation différentielle $y' = ay + b$ admet une **unique** solution f qui vérifie la condition initiale $f(x_0) = y_0$: c'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{a(x - x_0)} - \frac{b}{a}.$$

Démonstration

D'après la forme des solutions, $f(x) = \lambda e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ avec λ réel. La condition $f(x_0) = y_0$ équivaut à $\lambda e^{ax_0} = y_0 + \dfrac{b}{a}$, soit $\lambda = \left(y_0 + \dfrac{b}{a}\right) e^{-ax_0}$: une seule valeur de λ convient. On obtient $f(x) = \left(y_0 + \dfrac{b}{a}\right) e^{a(x - x_0)} - \dfrac{b}{a}$.

Méthode : imposer une condition initiale

1. **Écris d'abord la solution générale** $f(x) = \lambda e^{ax} - \dfrac{b}{a}$, avec $a \neq 0$.
2. **Traduis la condition** $f(x_0) = y_0$ en remplaçant x par x_0.
3. **Résous** l'équation obtenue, d'inconnue λ.
4. **Écris la fonction**, puis contrôle la condition par un calcul.

Exemple : Exemple guidé : une équation à remettre en forme

On cherche la solution f de $2y' + 6y = 3$ telle que $f(0) = 2$.

1. **Mise en forme.** $y' = -3y + \dfrac{3}{2}$, donc $a = -3$, $b = \dfrac{3}{2}$ et $-\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{2}$.
2. **Solution générale.** $f(x) = \lambda e^{-3x} + \dfrac{1}{2}$.
3. **Condition.** $f(0) = \lambda + \dfrac{1}{2} = 2$, donc $\lambda = \dfrac{3}{2}$.
4. **Conclusion.** $f(x) = \dfrac{3}{2}e^{-3x} + \dfrac{1}{2}$. Contrôle : $f(0) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} = 2$.

Le piège du lambda

Trouve l'erreur : La condition au mauvais endroit

Pour $y' = -y + 4$ avec $f(0) = 1$, un élève écrit : « $f(x) = \lambda e^{-x} + 4$. Comme $f(0) = 1$, on a $\lambda = 1$, donc $f(x) = e^{-x} + 4$. » Où est l'erreur ?

A. Dans la solution générale : avec $a = -1$, il fallait $\lambda e^{x} + 4$.

Faux.

Ici $a = -1$: l'exponentielle e^{-x} est la bonne.

B. Dans la constante : il fallait -4, c'est-à-dire $\dfrac{b}{a}$.

Faux.

$-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{4}{-1} = 4$: la constante 4 est juste.

C. Dans la condition : $\lambda = -3$.

Juste.

$f(0) = \lambda + 4$: l'élève a imposé la condition à λe^{-x} seul, en oubliant la constante 4.

D. Nulle part, car $e^{0} = 1$.

Faux.

Avec sa fonction, $f(0) = 1 + 4 = 5$, et non 1.

Correction

La condition porte sur la fonction entière : $f(0) = \lambda e^{0} + 4 = \lambda + 4$. L'égalité $\lambda + 4 = 1$ donne $\lambda = -3$.

Donc $f(x) = -3e^{-x} + 4$ pour tout réel x, et l'on vérifie $f(0) = -3 + 4 = 1$.

À toi : une condition en 1

Détermine la solution f de l'équation $y' = 3y$ qui vérifie $f(1) = 2$.

Indice 1

Commence par la solution générale de $y' = 3y$.

Indice 2

$f(x) = \lambda e^{3x}$, donc $f(1) = \lambda e^{3} = 2$.

Indice 3

$\lambda = 2e^{-3}$: regroupe ensuite les deux exponentielles.

Réponse

Les solutions de $y' = 3y$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{3x}$, avec λ réel. La condition $f(1) = 2$ donne $\lambda e^{3} = 2$, donc $\lambda = 2e^{-3}$. Ainsi, pour tout réel x :

$$f(x) = 2e^{-3}e^{3x} = 2e^{3x-3}.$$

Contrôle : $f(1) = 2e^{0} = 2$.

Retenir et rédiger

Attention : La condition s'applique à toute la solution

La condition $f(x_0) = y_0$ porte sur la fonction **entière**, constante comprise. Poser $\lambda = y_0$ revient à oublier la constante $-\dfrac{b}{a}$.

Termine toujours par un contrôle : calcule $f(x_0)$ avec ta fonction, tu dois retrouver y_0.

Méthode : Coin rédaction : une condition initiale

Voici une rédaction complète pour la copie corrigée plus haut :

« L'équation s'écrit $y' = -y + 4$, avec $a = -1$ et $b = 4$. Ses solutions sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-x} + 4$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Or $f(0) = 1$, donc $\lambda + 4 = 1$ et $\lambda = -3$. Donc $f(x) = -3e^{-x} + 4$. »

Chaque ligne justifie la suivante. Ce type de question n'apparaît pas dans les sujets consultés.

Le second ordre : y″ + ay′ + by = 0

Essayer une exponentielle

Devine : Une exponentielle pour le second ordre

On cherche des solutions de $y'' - 5y' + 6y = 0$ de la forme $x \mapsto e^{rx}$. Quelles valeurs de r conviennent ?

A. $r = -2$ et $r = -3$

Faux.
Ces nombres annulent $r^2 + 5r + 6$: les signes ont été inversés.

B. $r = 5$ et $r = 6$

Faux.
On a lu les coefficients au lieu de résoudre. Pour $r = 5$: $25 - 25 + 6 = 6 \neq 0$.

C. $r = 2$ et $r = 3$

Juste.
On obtient $(r^2 - 5r + 6)e^{rx}$, et $r^2 - 5r + 6 = (r - 2)(r - 3)$.

D. Aucune : une exponentielle ne résout pas une équation avec y''.

Faux.
Les dérivées de e^{rx} sont encore des multiples de e^{rx} : tout se simplifie.

Correction
Soit r un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{rx}$. Pour tout réel x, $f'(x) = re^{rx}$ et $f''(x) = r^2e^{rx}$, donc

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x)$$
$$= \left(r^2 - 5r + 6\right) e^{rx}.$$

Comme $e^{rx} > 0$, cette expression est nulle pour tout x si et seulement si $r^2 - 5r + 6 = 0$, soit $r = 2$ ou $r = 3$.

Définition : Équation caractéristique

Soit a et b deux réels. L'**équation caractéristique** de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ est l'équation du second degré, d'inconnue r,

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Son discriminant est $\Delta = a^2 - 4b$.

Propriété : Quand x ↦ e^(rx) est-elle solution ?

Soit a, b et r des réels. La fonction $x \longmapsto e^{rx}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ si et seulement si r est une racine de l'équation caractéristique : $r^2 + ar + b = 0$.

Démonstration

La fonction $f : x \mapsto e^{rx}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = re^{rx}$ et $f''(x) = r^2e^{rx}$. Pour tout réel x,

$$f''(x) + af'(x) + bf(x) = \left(r^2 + ar + b\right) e^{rx}.$$

Comme $e^{rx} > 0$, cette expression est nulle pour tout x si et seulement si $r^2 + ar + b = 0$.

Écrire l'équation caractéristique

Vérifie : Un terme par dérivée

Quelle est l'équation caractéristique de $y'' - 4y = 0$?

A. $r^2 - 4r = 0$

Faux.
Le terme $-4r$ viendrait de $-4y'$, absent ici.

B. $r - 4 = 0$

Faux.
y'' donne toujours r^2 : l'équation caractéristique est du second degré.

C. $r^2 + 4 = 0$

Faux.
Le signe de $-4y$ se garde : on obtient -4.

D. $r^2 - 4 = 0$

Juste.
y'' donne r^2, il n'y a pas de y', et $-4y$ donne -4.

Correction
On remplace y'' par r^2, y' par r et y par 1. Ici, il n'y a pas de terme en y' : l'équation caractéristique est $r^2 - 4 = 0$. Ses racines sont 2 et -2.

Le calcul avec e^{rx} **démontre** quand une exponentielle est solution. Il ne démontre **pas** que toutes les solutions s'écrivent ainsi. Les trois résultats suivants sont **admis** : tu les appliques sans les démontrer.

Petit rappel du second degré. Si $\Delta \geq 0$, les racines de $r^2 + ar + b = 0$ sont $\dfrac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$. Attention aux lettres : ici le coefficient de r est a, le terme constant est b, donc $\Delta = a^2 - 4b$.

Discriminant positif

Théorème : Solutions de y″ + ay′ + by = 0 lorsque Δ > 0

Soit a et b deux réels tels que $\Delta = a^2 - 4b > 0$, et r_1, r_2 les deux racines réelles distinctes de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions

$$x \longmapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}, \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Exemple : deux racines réelles

Résolvons $y'' - y' - 2y = 0$.

1. **Caractéristique.** $r^2 - r - 2 = 0$, donc $a = -1$ et $b = -2$.
2. **Discriminant.** $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-2) = 9 > 0$, d'où $r_1 = \dfrac{1+3}{2} = 2$ et $r_2 = \dfrac{1-3}{2} = -1$.
3. **Conclusion.** Les solutions sont les fonctions $x \mapsto \alpha e^{2x} + \beta e^{-x}$, avec α et β réels.

Discriminant nul

Devine : Une seule racine

Pour $y'' - 4y' + 4y = 0$, l'équation $r^2 - 4r + 4 = 0$ n'a qu'une racine, $r_0 = 2$. Quelle fonction est une solution qui n'est **pas** un multiple de $x \mapsto e^{2x}$? Rappel utile : $(uv)' = u'v + uv'$.

A. $x \mapsto 2e^{2x}$

Faux.
Elle est bien solution, mais c'est un multiple de e^{2x} : rien de nouveau.

B. $x \mapsto xe^{2x}$

Juste.

Ses dérivées sont $(2x+1)e^{2x}$ et $(4x+4)e^{2x}$, et la somme s'annule.

C. $x \mapsto e^{-2x}$

Faux.

-2 n'est pas racine : $4+8+4=16\neq 0$.

D. $x \mapsto e^{4x}$

Faux.

4 n'est pas racine : $16-16+4=4\neq 0$.

Correction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^{2x}$. La règle du produit donne, pour tout réel x, $f'(x)=(2x+1)e^{2x}$ et $f''(x)=(4x+4)e^{2x}$. Donc

$$\begin{aligned} &f''(x)-4f'(x)+4f(x)\\ &=(4x+4-8x-4+4x)e^{2x}\\ &=0. \end{aligned}$$

Quand la racine est double, le facteur x fournit une seconde solution.

Théorème : Solutions de y″ + ay′ + by = 0 lorsque Δ = 0

Soit a et b deux réels tels que $\Delta=a^2-4b=0$, et $r_0=-\dfrac{a}{2}$ la racine double de l'équation caractéristique $r^2+ar+b=0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''+ay'+by=0$ sont les fonctions

$$x\longmapsto(\alpha x+\beta)e^{r_0x},\qquad \alpha\in\mathbb{R},\ \beta\in\mathbb{R}.$$

À toi : Exemple à compléter

Résous $y''+6y'+9y=0$: écris l'équation caractéristique, calcule Δ et la racine, puis la forme des solutions.

Indice 1

L'équation caractéristique est $r^2+6r+9=0$.

Indice 2

$\Delta=36-36=0$: la racine double est $r_0=-\dfrac{6}{2}$.

Indice 3

Avec $\Delta=0$, la forme est $(\alpha x+\beta)e^{r_0x}$.

Réponse

L'équation caractéristique $r^2+6r+9=0$ s'écrit $(r+3)^2=0$. Son discriminant est $\Delta=36-36=0$, et la racine double est $r_0=-3$.

Les solutions sont les fonctions $x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{-3x}$, avec α et β réels.

Attention : Racine double : un x devant α

Écrire $\alpha e^{r_0 x} + \beta e^{r_0 x}$ ne donne qu'une famille à une seule constante, car c'est $(\alpha + \beta)e^{r_0 x}$. La solution $x \mapsto xe^{r_0 x}$ lui échappe. La bonne écriture est $(\alpha x + \beta)e^{r_0 x}$.

Discriminant négatif

Petit rappel du chapitre des nombres complexes. Si $\Delta < 0$, l'équation $r^2 + ar + b = 0$ a deux racines complexes conjuguées $\dfrac{-a + i\sqrt{-\Delta}}{2}$ et $\dfrac{-a - i\sqrt{-\Delta}}{2}$. On note p leur partie réelle et $q > 0$ la partie imaginaire de la première.

Théorème : Solutions de y″ + ay′ + by = 0 lorsque Δ < 0

Soit a et b deux réels tels que $\Delta = a^2 - 4b < 0$. L'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ admet deux racines complexes conjuguées $p + iq$ et $p - iq$, avec

$$p = -\frac{a}{2} \qquad \text{et} \qquad q = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} > 0.$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions

$$x \longmapsto e^{px}\left(\alpha\cos(qx) + \beta\sin(qx)\right), \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Exemple : des racines complexes

Résolvons $y'' + 2y' + 5y = 0$.

1. **Caractéristique.** $r^2 + 2r + 5 = 0$, avec $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$.
2. **Racines.** $\dfrac{-2 \pm 4i}{2}$, soit $-1 + 2i$ et $-1 - 2i$: $p = -1$ et $q = 2$.
3. **Conclusion.** Les solutions sont les fonctions $x \mapsto e^{-x}\left(\alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)\right)$, avec α et β réels.

Attention : p va dans l'exponentielle, q dans cos et sin

Pour $y'' + 2y' + 10y = 0$: $\Delta = 4 - 40 = -36$, et les racines sont $-1 \pm 3i$. Donc $p = -1$ et $q = 3$.

Les solutions sont $x \mapsto e^{-x}\left(\alpha\cos(3x) + \beta\sin(3x)\right)$.

N'écris pas e^{3x} : ce serait échanger p et q. N'oublie pas non plus le facteur e^{-x}.

Sans terme en y prime

Devine : Une caractéristique sans racine réelle

Pour $y'' + 9y = 0$, l'équation caractéristique est $r^2 + 9 = 0$. Quelles sont les solutions ?

A. Les fonctions $x \mapsto \alpha e^{3x} + \beta e^{-3x}$

Faux.

Ce serait le cas de $r^2 - 9 = 0$. Ici, $r^2 = -9$ n'a pas de racine réelle.

B. Les fonctions $x \mapsto \alpha \cos(9x) + \beta \sin(9x)$

Faux.

q est la racine carrée de 9, pas 9.

C. Les fonctions $x \mapsto e^{3x}\left(\alpha \cos x + \beta \sin x\right)$

Faux.

La partie réelle des racines est nulle : il n'y a pas d'exponentielle.

D. Les fonctions $x \mapsto \alpha \cos(3x) + \beta \sin(3x)$

Juste.

Les racines sont $3i$ et $-3i$: $p = 0$ et $q = 3$.

Correction

Ici $\Delta = -36 < 0$: les racines sont $3i$ et $-3i$, donc $p = 0$ et $q = 3$.

Comme $e^{0x} = 1$, les solutions sont les fonctions $x \mapsto \alpha \cos(3x) + \beta \sin(3x)$, avec α et β réels. C'est le cas $p = 0$ du résultat admis précédent.

Propriété : L'équation y″ + ω²y = 0

Soit ω un réel strictement positif. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions

$$x \longmapsto \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x), \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Exemple : le cosinus du début

Pour $y'' + 4y = 0$, on a $\omega^2 = 4$, donc $\omega = 2$. Les solutions sont les fonctions $x \mapsto \alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x)$.

Au début du chapitre, tu as vérifié que $x \mapsto \cos(2x)$ en est une : c'est le cas $\alpha = 1$ et $\beta = 0$.

La méthode et deux conditions initiales

La méthode en un coup d'œil

Vérifie : Quel cas, quelle forme

Quelle forme ont les solutions de $y'' - 2y' + 2y = 0$?

A. $x \mapsto e^{x}\left(\alpha\cos x + \beta\sin x\right)$

Juste.

$\Delta = -4$, racines $1 \pm i$, donc $p = 1$ et $q = 1$.

B. $x \mapsto \alpha e^{2x} + \beta e^{-2x}$

Faux.

Cette forme suppose deux racines réelles ; or $\Delta = 4 - 8 < 0$.

C. $x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{x}$

Faux.

Cette forme suppose $\Delta = 0$; ici $\Delta = -4$.

D. $x \mapsto e^{-x}\left(\alpha\cos x + \beta\sin x\right)$

Faux.

$p = -\dfrac{a}{2}$ avec $a = -2$: $p = 1$, pas -1.

Correction

L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 2 = 0$, avec $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$. Les racines sont $\dfrac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$, donc $p = 1$ et $q = 1$.

Les solutions sont les fonctions $x \mapsto e^{x}\left(\alpha\cos x + \beta\sin x\right)$, avec α et β réels.

Méthode : résoudre y″ + ay′ + by = 0

1. **Traduis** l'équation : y'' devient r^2, y' devient r, y devient 1.
2. **Calcule** $\Delta = a^2 - 4b$, puis les racines.
3. **Choisis la forme** selon le signe de Δ :
   - si $\Delta > 0$: $\alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$;
   - si $\Delta = 0$: $(\alpha x + \beta)e^{r_0 x}$;
   - si $\Delta < 0$: $e^{px}\left(\alpha\cos(qx) + \beta\sin(qx)\right)$.
4. **Conclus** par une phrase, avec « α et β réels ».

À toi : une équation sans y

Résous l'équation $y'' - 4y' = 0$.

Indice 1

Ici, c'est le terme en y qui manque : la caractéristique n'a pas de terme constant.

Indice 2

$r^2 - 4r = 0$ se factorise en $r(r - 4) = 0$.

Indice 3

Une racine nulle donne $e^{0x} = 1$.

Réponse
L'équation caractéristique est $r^2 - 4r = 0$, soit $r(r-4) = 0$, avec $\Delta = 16 > 0$. Les racines sont 0 et 4.

Comme $e^{0x} = 1$, les solutions sont les fonctions $x \mapsto \alpha + \beta e^{4x}$, avec α et β réels.

Deux constantes, deux conditions

Devine : Combien de conditions

Les solutions de $y'' - y' - 2y = 0$ dépendent de deux constantes α et β. Combien de conditions faut-il pour isoler une seule solution ?

A. Une seule, par exemple la valeur $f(0)$ de la fonction en 0.
Faux.
Une seule égalité ne fixe pas deux inconnues : il reste une infinité de couples.

B. Deux, par exemple $f(0)$ et $f'(0)$.
Juste.
Deux égalités pour deux inconnues.

C. Aucune : la forme des solutions suffit à les déterminer.
Faux.
Sans condition, α et β restent quelconques.

Correction
Deux constantes inconnues demandent deux équations. On impose en général la valeur de f et celle de f' au même point.

Théorème : Solution vérifiant deux conditions initiales (second ordre)

Soit a, b, x_0, y_0 et y_1 des réels. L'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ admet une **unique** solution f qui vérifie les deux conditions initiales

$$f(x_0) = y_0 \qquad \text{et} \qquad f'(x_0) = y_1.$$

Ce résultat est **admis**. **En clair** : la valeur de f et celle de f' en un même point déterminent une seule solution.

Méthode : écris la solution générale, dérive-la **entièrement**, traduis les deux conditions en un système, puis résous-le.

Exemple guidé

Exemple : deux racines réelles et deux conditions

On cherche la solution de $y'' - y' - 2y = 0$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 3$.

1. **Solution générale.** $f(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{-x}$.
2. **Dérivée.** $f'(x) = 2\alpha e^{2x} - \beta e^{-x}$.
3. **Système.** $f(0) = \alpha + \beta = 0$ et $f'(0) = 2\alpha - \beta = 3$.
4. **Résolution.** En ajoutant : $3\alpha = 3$, donc $\alpha = 1$ et $\beta = -1$. Ainsi $f(x) = e^{2x} - e^{-x}$.

À toi : Exemple à compléter

Les solutions de $y'' - 4y' + 4y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{2x}$. Détermine celle qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

Indice 1
$f(0) = \beta$: la première condition donne β directement.
Indice 2
f est un produit : $f'(x) = \alpha e^{2x} + 2(\alpha x + \beta)e^{2x}$, donc $f'(0) = \alpha + 2\beta$.
Indice 3
Remplace β par sa valeur dans $\alpha + 2\beta = 0$.

Réponse
Première condition. $f(0) = \beta = 1$.

Dérivée. Pour tout réel x :

$$f'(x) = \alpha e^{2x} + 2(\alpha x + \beta)e^{2x}.$$

Seconde condition. $f'(0) = \alpha + 2\beta$, donc la condition $f'(0) = 0$ s'écrit $\alpha + 2 = 0$, et $\alpha = -2$.

Conclusion. Pour tout réel x :

$$f(x) = (1 - 2x)e^{2x}.$$

Attention : Dérive toute la solution avant de remplacer

Avec une racine double, $f(x) = (\alpha x + \beta)e^{r_0 x}$ est un **produit**. Sa dérivée n'est pas $\alpha e^{r_0 x}$: pour tout réel x,

$$f'(x) = \alpha e^{r_0 x} + r_0(\alpha x + \beta)e^{r_0 x}.$$

En 0, on obtient $f'(0) = \alpha + r_0\beta$, et non α.

Avec cosinus et sinus

À toi : deux conditions et des racines complexes

Les solutions de $y'' + 2y' + 5y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto e^{-x}\left(\alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)\right)$. Détermine celle qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$.

Indice 1
Rappels : la dérivée de $x \mapsto \cos(kx)$ est $x \mapsto -k\sin(kx)$, celle de $x \mapsto \sin(kx)$ est $x \mapsto k\cos(kx)$. Comme $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$, la condition $f(0) = 1$ donne α.
Indice 2
Dérive le produit : $f'(x) = -e^{-x}\left(\alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)\right) + e^{-x}\left(-2\alpha\sin(2x) + 2\beta\cos(2x)\right)$.
Indice 3
En 0 : $f'(0) = -\alpha + 2\beta$.

Réponse
On a $f(0) = \alpha = 1$. En dérivant le produit, puis en remplaçant x par 0 : $f'(0) = -\alpha + 2\beta$. La condition $-1 + 2\beta = 1$ donne $\beta = 1$.

Ainsi, pour tout réel x :

$$f(x) = e^{-x}(\cos(2x) + \sin(2x)).$$

Devine : L'allure de la solution

Que fait $f(x) = e^{-x}\left(\cos(2x) + \sin(2x)\right)$ quand x devient grand ?

A. Elle oscille, de plus en plus fort à mesure que x grandit.
Faux.
Le facteur e^{-x} devient de plus en plus petit.

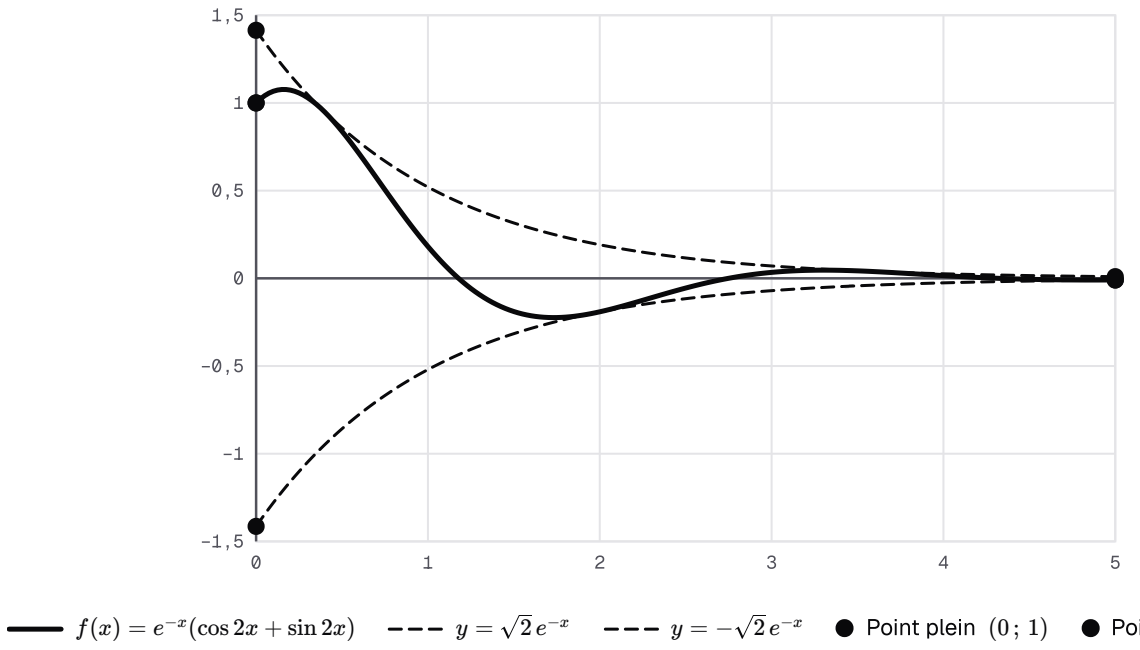
B. Elle décroît sans jamais changer de signe.
Faux.
$\cos(2x) + \sin(2x)$ change de signe, et $e^{-x} > 0$ ne l'en empêche pas.

C. Elle oscille toujours entre -1 et 1, sans s'atténuer.
Faux.
Les oscillations rétrécissent, car e^{-x} tend vers 0.

D. Ses oscillations s'éteignent.
Juste.
Le cosinus et le sinus font osciller, le facteur e^{-x} écrase les oscillations.

Correction
Le facteur $\cos(2x) + \sin(2x)$ prend des valeurs positives et négatives. Le facteur e^{-x} est positif et tend vers 0 en $+\infty$.

> La courbe oscille donc autour de l'axe des abscisses, avec des oscillations de plus en plus petites.



La solution trouvée pour y″ + 2y′ + 5y = 0 avec f(0) = 1 et f′(0) = 1, tracée de 0 à 5, avec deux courbes guides en pointillés.

Pour tout réel x, $|\cos(2x) + \sin(2x)| \leq 2$: la courbe reste donc entre celles de $x \mapsto -2e^{-x}$ et $x \mapsto 2e^{-x}$, qui tendent vers 0.

Bonus. On peut écrire $\cos(2x) + \sin(2x) = \sqrt{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$. La borne exacte est donc $\sqrt{2}$: ce sont les courbes en pointillés de la figure.

Coin examen

Dans les 15 sujets de bac consultés, une seule question porte sur ce chapitre : dans 1 des 15 sujets (2016 N), notée 1 point sur 20. C'est un second ordre avec $\Delta > 0$ et deux conditions initiales, sur $g(0)$ et $g'(0)$. La solution trouvée servait ensuite à définir une fonction étudiée.

Le premier ordre, les cas $\Delta = 0$ et $\Delta < 0$, le changement d'inconnue et les applications sont absents de ces 15 sujets. Ils figurent pourtant dans les orientations pédagogiques et la répartition consultées, documents non authentifiés.

Méthode : Coin examen : la rédaction complète

Question type : « Résoudre $y'' - 5y' + 6y = 0$, puis déterminer la solution telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. »

« L'équation caractéristique est $r^2 - 5r + 6 = 0$; $\Delta = 1 > 0$, racines 2 et 3. » ($0{,}25$ point pour les racines dans le barème lu en 2016 N)

« Les solutions sont $x \mapsto \alpha e^{2x} + \beta e^{3x}$, α et β réels. » ($0{,}25$ point pour la solution générale)

« On a $f'(x) = 2\alpha e^{2x} + 3\beta e^{3x}$. Donc $f(0) = \alpha + \beta = 1$ et $f'(0) = 2\alpha + 3\beta = 0$, d'où $\beta = -2$ et $\alpha = 3$. Donc $f(x) = 3e^{2x} - 2e^{3x}$. » ($0{,}5$ point pour la solution particulière)

Contrôle : $f(0) = 3 - 2 = 1$ et $f'(0) = 6 - 6 = 0$. Racines, puis forme, puis solution particulière : c'est l'ordre du barème lu en 2016 N.

Se ramener à une équation connue

Un second membre constant

Devine : Une constante solution

Quelle fonction constante $x \mapsto c$ est solution de $y'' + 3y' + 2y = 6$?

A. $c = 3$

Juste.
$0 + 0 + 2 \times 3 = 6$.

B. $c = 6$, le second membre

Faux.
Pour une constante, $y'' = y' = 0$: il reste $2 \times 6 = 12 \neq 6$.

C. $c = 2$, le coefficient de y

Faux.
On obtient $2 \times 2 = 4 \neq 6$.

Correction
Une constante a des dérivées nulles. L'équation devient $2c = 6$, donc $c = 3$: la fonction $x \mapsto 3$ est solution.

Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Posons $z = y - 3$. Comme $z' = y'$ et $z'' = y''$, on a

$$\begin{aligned} &z'' + 3z' + 2z \\ &= y'' + 3y' + 2y - 6. \end{aligned}$$

Donc y est solution de $y'' + 3y' + 2y = 6$ si et seulement si z est solution de $z'' + 3z' + 2z = 0$. On s'est ramené à une équation connue.

Le cas général se **démontre** de la même façon.

Le principe démontré

Propriété : Changement de fonction inconnue

Soit a et b deux réels, g une fonction définie sur $\mathbb{R}$, et (E) l'une des deux équations

$$y' = ay + g(x) \qquad \text{ou} \qquad y'' + ay' + by = g(x).$$

Son **équation homogène associée** (E_0) est $y' = ay$, ou $y'' + ay' + by = 0$. Si h est une solution de (E), alors une fonction f est solution de (E) si et seulement si $z = f - h$ est solution de (E_0). Les solutions de (E) sont donc les fonctions $z + h$, où z parcourt les solutions de (E_0).

Démonstration

Cas du second ordre (le premier ordre se traite de la même façon). Soit f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z = f - h$. Pour tout réel x, par linéarité de la dérivation,

$$z''(x) + az'(x) + bz(x) = (f''(x) + af'(x) + bf(x)) - (h''(x) + ah'(x) + bh(x))\,.$$

Comme h est solution, la seconde parenthèse vaut $g(x)$. Donc $z''(x) + az'(x) + bz(x) = 0$ pour tout x si et seulement si $f''(x) + af'(x) + bf(x) = g(x)$ pour tout x.

Propriété : Second membre constant

Soit a, b et c des réels, avec $b \neq 0$. La fonction constante $x \longmapsto \dfrac{c}{b}$ est solution de l'équation $y'' + ay' + by = c$, et les solutions de cette équation sont les fonctions $x \longmapsto z(x) + \dfrac{c}{b}$, où z parcourt les solutions de $y'' + ay' + by = 0$.

Exemple : finir le calcul

Terminons avec $y'' + 3y' + 2y = 6$. L'équation homogène $z'' + 3z' + 2z = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 + 3r + 2 = 0$. Son discriminant est $\Delta = 9 - 8 = 1$, et ses racines sont -1 et -2.

Donc, pour des réels α et β, $z(x) = \alpha e^{-x} + \beta e^{-2x}$. Les solutions de l'équation de départ sont les fonctions

$$x \longmapsto \alpha e^{-x} + \beta e^{-2x} + 3,$$

avec α et β réels.

La méthode

Méthode : changer de fonction inconnue

1. **Vérifie** que la fonction h donnée par l'énoncé est solution de (E). Quand le second membre est un nombre c, h est la solution constante :
   - $h = \dfrac{c}{b}$ pour $y'' + ay' + by = c$ (si $b \neq 0$) ;
   - $h = -\dfrac{b}{a}$ pour $y' = ay + b$ (si $a \neq 0$).
2. **Pose** $z = y - h$ et écris l'équation homogène (E_0) que vérifie z.

3. **Résous** (E_0) par la méthode du premier ou du second ordre.
4. **Reviens à** y : les solutions de (E) sont les fonctions $z + h$, et non z seule. Avec des constantes nulles, ta formule doit redonner h.

À toi : Exemple à compléter

Résous $y'' + y' - 2y = 4$ en suivant les quatre étapes.

Indice 1
La constante cherchée vérifie $-2c = 4$.
Indice 2
Avec $c = -2$, pose $z = y + 2$: $z'' + z' - 2z = 0$.
Indice 3
$r^2 + r - 2 = 0$ a pour discriminant 9.

Réponse
Solution constante. La fonction constante égale à -2 est solution, car $0 + 0 - 2 \times (-2) = 4$.

Équation homogène. On pose $z = y + 2$, solution de $z'' + z' - 2z = 0$. Son équation caractéristique $r^2 + r - 2 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 9$, et pour racines 1 et -2.

Conclusion. Les solutions sont les fonctions

$$x \longmapsto \alpha e^{x} + \beta e^{-2x} - 2,$$

avec α et β réels.

Une fonction h donnée

Vérifie : Une solution particulière proposée

On considère l'équation (E) : $y' = 2y - 2x + 1$ et la fonction h définie par $h(x) = x$. La fonction h est-elle solution de (E) ?

A. Non, car une solution doit contenir une exponentielle.
Faux.
Seules les solutions de l'équation homogène sont exponentielles ; h peut être affine.

B. Non, car $h'(x) = 1$ alors que $2h(x) = 2x$ pour tout réel x.
Faux.
Il faut comparer $h'(x)$ au membre de droite **entier**, $2h(x) - 2x + 1$.

C. Oui : les deux membres valent 1.
Juste.
$h'(x) = 1$ et $2x - 2x + 1 = 1$, pour tout réel x.

Correction

Pour tout réel x, $h'(x) = 1$ et $2h(x) - 2x + 1 = 2x - 2x + 1 = 1$. Les deux membres sont égaux : h est solution de (E).

À toi : terminer la résolution

Sachant que $h(x) = x$ est solution de (E) : $y' = 2y - 2x + 1$, résous (E).

Indice 1
L'équation homogène associée est $y' = 2y$.
Indice 2
Ses solutions sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{2x}$.
Indice 3
Ajoute h pour revenir aux solutions de (E).

Réponse
L'équation homogène associée est $y' = 2y$, de solutions $x \mapsto \lambda e^{2x}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Les solutions de (E) sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda e^{2x} + x$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Contrôle : pour tout réel x, la dérivée vaut $2\lambda e^{2x} + 1$, et

$$\begin{aligned} &2\left(\lambda e^{2x} + x\right) - 2x + 1 \\ &= 2\lambda e^{2x} + 1. \end{aligned}$$

Équations en physique

Retour au thé

Devine : La température après vingt minutes

On admet que la température du thé vérifie $\theta' = -0{,}05\,\theta + 1$, avec t en minutes et $\theta(0) = 80$. Que vaut à peu près $\theta(20)$?

A. Environ 22 degrés
Faux.
C'est $60e^{-1}$: il manque la valeur d'équilibre 20.

B. Environ 79 degrés, car on perd $0{,}05$ degré par minute
Faux.
La perte n'est pas constante : elle dépend de la température.

C. Environ 42 degrés
Juste.
$\theta(20) = 60e^{-1} + 20 \approx 42{,}1$.

D. Exactement 20 degrés
Faux.
20 degrés est la valeur d'équilibre, approchée sans jamais être atteinte.

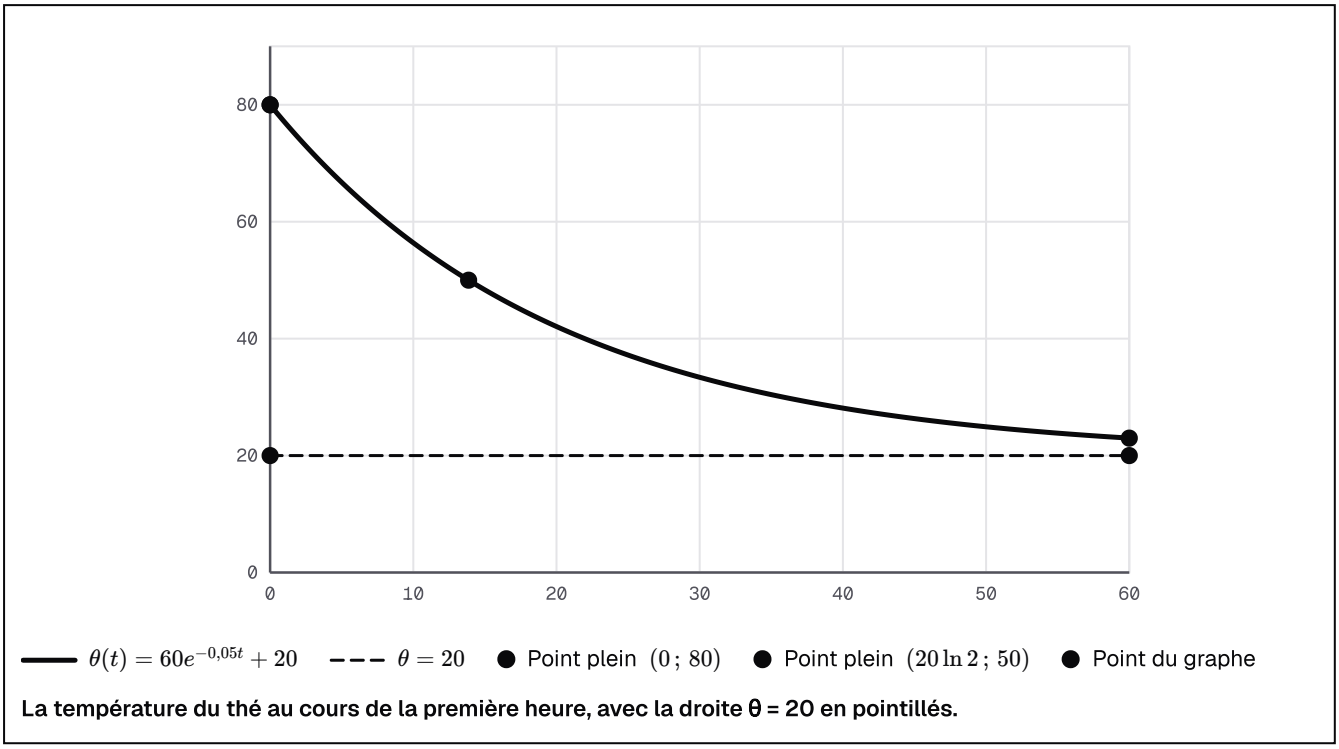
Correction

Ici $a = -0{,}05$ et $b = 1$, donc la valeur d'équilibre est $-\dfrac{b}{a} = 20$. La condition $\theta(0) = 80$ donne $\theta(t) = 60e^{-0{,}05t} + 20$.

Donc $\theta(20) = 60e^{-1} + 20 \approx 42{,}1$ degrés.

Exemple : Exemple guidé : le thé qui refroidit

1. **Solution générale.** $a = -0{,}05$, $b = 1$, $-\dfrac{b}{a} = 20$: $\theta(t) = \lambda e^{-0{,}05t} + 20$.
2. **Condition.** $\theta(0) = \lambda + 20 = 80$, donc $\lambda = 60$ et $\theta(t) = 60e^{-0{,}05t} + 20$.
3. **Instant.** $\theta(t) = 50$ équivaut à $e^{-0{,}05t} = \dfrac{1}{2}$, soit $-0{,}05t = -\ln 2$.
4. **Conclusion.** $t = 20\ln 2 \approx 13{,}9$: le thé est à 50 degrés après environ 14 minutes. Quand t tend vers $+\infty$, $\theta(t)$ tend vers 20 degrés.



La température du thé au cours de la première heure, avec la droite θ = 20 en pointillés.

Condensateur et décroissance

À toi : la charge d'un condensateur

Dans un circuit, la tension u_C (en volts) aux bornes d'un condensateur vérifie $0{,}5\,u_C' + u_C = 5$, avec t en secondes et $u_C(0) = 0$. Détermine $u_C(t)$, puis sa valeur à $t = 0{,}5$ seconde.

Indice 1

Isole u'_C : divise par $0{,}5$, c'est-à-dire multiplie par 2.

Indice 2

$u'_C = -2u_C + 10$, donc $u_C(t) = \lambda e^{-2t} + 5$.

Indice 3

La condition $u_C(0) = 0$ donne $\lambda = -5$.

Réponse

On isole la dérivée : $u'_C = -2u_C + 10$. Donc $a = -2$, $b = 10$ et $-\dfrac{b}{a} = 5$: $u_C(t) = \lambda e^{-2t} + 5$. La condition donne $\lambda + 5 = 0$, soit $\lambda = -5$. Ainsi

$$u_C(t) = 5\left(1 - e^{-2t}\right).$$

À $t = 0{,}5$: $u_C(0{,}5) = 5\left(1 - e^{-1}\right) \approx 3{,}16$ volts.

Comme $u'_C(t) = 10e^{-2t} > 0$, la tension augmente vers 5 volts sans les atteindre.

Devine : La moitié des noyaux

Dans un échantillon, le nombre N de noyaux radioactifs vérifie $N' = -0{,}1\,N$, avec t en années et $N(0) = 1000$. Au bout de combien de temps reste-t-il 500 noyaux ?

A. 5 ans, à raison de 100 noyaux perdus par an

Faux.

La perte vaut 100 noyaux par an au départ seulement : elle ralentit quand N diminue.

B. $10\ln 2 \approx 6{,}9$ ans

Juste.

$1000e^{-0{,}1t} = 500$ équivaut à $e^{-0{,}1t} = \dfrac{1}{2}$.

C. 10 ans, l'inverse de $0{,}1$

Faux.

Au bout de 10 ans, il reste $1000e^{-1}$, soit environ 368 noyaux : la moitié est atteinte plus tôt.

D. $\ln 2 \approx 0{,}69$ an

Faux.

En prenant le logarithme, il faut encore diviser par $0{,}1$.

Correction

Ici $b = 0$: $N(t) = \lambda e^{-0{,}1t}$, et $N(0) = 1000$ donne $N(t) = 1000e^{-0{,}1t}$.

L'égalité $N(t) = 500$ équivaut à $e^{-0{,}1t} = \dfrac{1}{2}$, soit $-0{,}1t = -\ln 2$. Donc $t = 10\ln 2 \approx 6{,}9$ ans.

Exemple : une durée qui ne dépend pas du départ

De 500 à 250 noyaux, il faut encore $10\ln 2$ ans : $N(20\ln 2) = 1000e^{-2\ln 2} = 250$.

Le ressort

Devine : Le mouvement du solide

La position s (en mètres) d'un solide accroché à un ressort vérifie $s'' + 25s = 0$, avec t en secondes, $s(0) = 0{,}02$ et $s'(0) = 0$. Comment le solide bouge-t-il ?

A. Il oscille sans s'amortir.

Juste.
La solution est $s(t) = 0{,}02\cos(5t)$.

B. Il revient en 0 et s'y arrête au bout d'un certain temps.

Faux.
Les solutions de $s'' + 25s = 0$ sont des cosinus et des sinus : elles ne s'arrêtent pas.

C. Il oscille de plus en plus faiblement, jusqu'à s'immobiliser.

Faux.
Sans terme en s', il n'y a pas de facteur exponentiel qui amortit.

D. Il s'éloigne de plus en plus de sa position de départ.

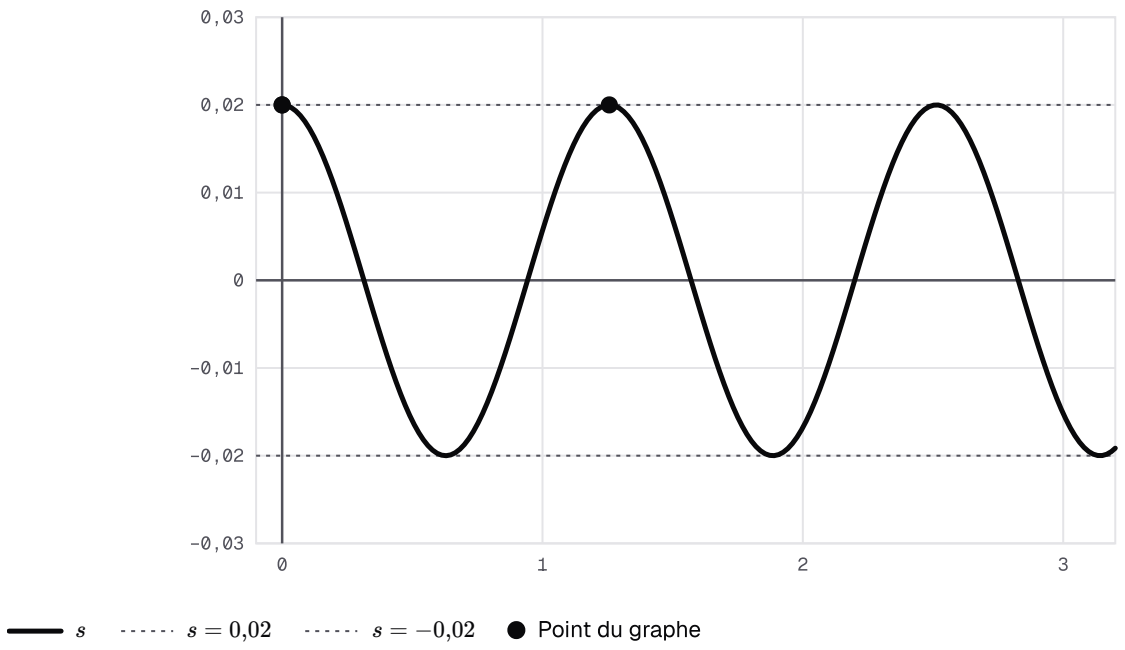
Faux.
Un cosinus et un sinus restent bornés.

Correction
On a $\omega^2 = 25$, donc $\omega = 5$, et $s(t) = \alpha\cos(5t) + \beta\sin(5t)$. Les conditions donnent $\alpha = 0{,}02$ et $\beta = 0$.

Le solide oscille donc entre $-0{,}02$ et $0{,}02$ mètre, indéfiniment.

Exemple : les deux conditions du ressort

1. **Forme.** $s(t) = \alpha\cos(5t) + \beta\sin(5t)$.
2. **Position.** $s(0) = \alpha = 0{,}02$.
3. **Vitesse.** $s'(t) = -5\alpha\sin(5t) + 5\beta\cos(5t)$, donc $s'(0) = 5\beta = 0$ et $\beta = 0$.
4. **Conclusion.** $s(t) = 0{,}02\cos(5t)$. Le mouvement se répète toutes les $\dfrac{2\pi}{5} \approx 1{,}26$ seconde.



La position s(t) = 0,02 cos(5t) du solide, en mètres, sur environ trois secondes : une oscillation régulière entre −0,02 et 0,02, qui se répète toutes les 2π/5 seconde.

Coin rédaction et le mot du prof

Méthode : Coin rédaction : exploiter une équation donnée

1. **Repère** la fonction inconnue, sa variable (le temps t) et les unités.
2. **Résous** l'équation, puis impose la ou les conditions initiales.
3. **Calcule et justifie** : « car $e^{-0{,}05t}$ tend vers 0 » ou « car $\ln$ est strictement croissante ».
4. **Conclus en français**, avec l'unité : « la température tend vers 20 degrés ».

Ce type de question n'apparaît pas dans les sujets consultés.

À retenir : Le mot du prof

Tu sais maintenant vérifier une solution, résoudre $y' = ay + b$ et $y'' + ay' + by = 0$, et imposer des conditions initiales. Avec ces gestes, une équation donnée par un physicien devient une fonction que tu sais étudier. Rends-toi aux exercices.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Équations différentielles » (2bac · sciences-experimentales · mathematiques)