BURHAN

Devoir surveillé n° 2, semestre 1

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/devoirs/devoir-2-semestre-1

Semestre	Durée	Barème
Semestre 1	2h	20 pts (barème indicatif BURHAN)

Durée : deux heures. Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être abordés dans n'importe quel ordre. Une calculatrice non programmable est permise. Toute réponse doit être justifiée ; la rigueur des raisonnements, la qualité de la rédaction et la présentation de la copie seront prises en compte.

Exercice 1 — 4 pts

Fonctions primitives

Dans chaque question, on cherche des primitives sur l'intervalle indiqué ; on justifiera la forme reconnue.

1.a — 1 pts

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_1 définie par $f_1(x) = (2x+1)\left(x^2+x+3\right)^3$.

1.b — 1 pts

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_2 définie par $f_2(x) = \dfrac{3x}{x^2+9}$.

2 — 1,25 pts

Soit g la fonction définie sur $I =]-1;+\infty[$ par $g(x) = 3x^2 - 4x + \dfrac{2}{(x+1)^2}$. Déterminer la primitive G de g sur I qui vérifie $G(0) = 1$.

INDICE

Pour le terme $\dfrac{2}{(x+1)^2}$, penser à la dérivée de $\dfrac{1}{x+1}$.

3 — 0,75 pts

Soit h la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$. Vérifier que $H : x \mapsto x\sqrt{x+1}$ est une primitive de h sur $]-1;+\infty[$, puis en déduire la primitive K de h sur cet intervalle telle que $K(3) = 1$.

Exercice 2 5 pts

Nombres complexes

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1 1 pts

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 8 = 0$.

2 0,75 pts

On pose $a = 2 + 2i$ et $b = 2 - 2i$. Écrire a sous forme trigonométrique, puis en déduire la forme trigonométrique de b.

3 1,25 pts

On considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et $c = -2 + 2i$. Placer ces points dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, puis calculer le quotient $\dfrac{b-a}{c-a}$ et en déduire la nature du triangle ABC.

4.a 0,75 pts

Soit R la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Montrer que l'écriture complexe de R est $z' = iz + 4$.

4.b 1,25 pts

Déterminer l'affixe d du point D, image de O par R, puis montrer que le quadrilatère $OADB$ est un carré.

Exercice 3 3,5 pts

Équations et inéquation avec ln

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1 1,25 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x-1) + \ln(x+2) = 2\ln 2$.

2 1,25 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(2x-1) \leq \ln(x+3)$.

3 1 pts

Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$.

INDICE

Poser $t = \ln x$.

Exercice 4 — 7,5 pts

Étude d'une fonction logarithmique

Partie A. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

Partie B. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \dfrac{\ln x}{x}$, et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note (D) la droite d'équation $y = x - 1$.

A.1 — 1 pts

Étudier le sens de variation de g sur $]0;+\infty[$, calculer $g(1)$, puis en déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

B.1 — 0,75 pts

Calculer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

B.2.a — 1 pts

Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, puis montrer que (D) est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

B.2.b — 0,75 pts

Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et de (D).

B.3 — 1,5 pts

Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$, puis dresser le tableau de variations de f.

B.4 — 1,25 pts

Tracer (D) et $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne $f(0{,}5) \approx 0{,}89$, $f(2) \approx 0{,}65$ et $f(4) \approx 2{,}65$.

B.5 — 1,25 pts

Vérifier que $x \mapsto \dfrac{(\ln x)^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0;+\infty[$, puis déterminer la primitive F de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.

INDICE

Reconnaître dans $\dfrac{\ln x}{x}$ une expression de la forme $u'u$.

SOURCES

BURHAN