BURHAN

Devoir surveillé n° 1, semestre 2

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/devoirs/devoir-1-semestre-2

Semestre	Durée	Barème
Semestre 2	2h	20 pts (barème indicatif BURHAN)

Durée : deux heures. Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix ; la lettre f désigne une fonction différente dans chacun. La calculatrice non programmable est autorisée. Chaque réponse doit être justifiée : la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements comptent dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 — 3,5 pts

Calculs avec la fonction exponentielle

Les questions 1, 2 et 3 de cet exercice sont indépendantes.

1 — 0,5 pts

Écrire plus simplement les nombres $A = \dfrac{e^{3+\ln 2} \times e^{-1}}{e^{2}}$ et $B = e^{-\ln 4} + \ln\left(\sqrt{e}\right)$.

2.a — 0,75 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} - e^{x} - 12 = 0$.

INDICE

Poser $t = e^{x}$ et ne garder que les valeurs strictement positives de t.

2.b — 1 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3e^{x} + 3e^{-x} < 10$.

3.a — 0,75 pts

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \left(e^{2x} - 3x\, e^{x}\right)$.

3.b — 0,5 pts

Calculer $\lim_{x \to -\infty} (2x + 1)\, e^{x}$.

Exercice 2 4,5 pts

Équations différentielles

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes. Dans la partie A, y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$; dans les parties B et C, une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1.a 0,75 pts

Partie A. On considère l'équation différentielle (E_1) : $2y' + y = 3$. Résoudre (E_1) sur $\mathbb{R}$.

1.b 0,5 pts

Déterminer la solution g de (E_1) qui vérifie $g(0) = 1$, puis calculer $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.

2.a 0,75 pts

Partie B. On considère l'équation différentielle (E_2) : $y'' - 2y' + 10y = 0$. Résoudre (E_2) sur $\mathbb{R}$.

2.b 1 pts

Déterminer la solution h de (E_2) qui vérifie $h(0) = 1$ et $h'(0) = 4$.

3.a 0,25 pts

Partie C. On considère l'équation différentielle (F) : $y'' + 2y' - 3y = 1 - 6x$, et la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 2x + 1$. Vérifier que u est une solution de (F).

3.b 1,25 pts

On note (H) l'équation homogène $y'' + 2y' - 3y = 0$, et l'on admet qu'une fonction y est solution de (F) si et seulement si $y - u$ est solution de (H). Résoudre (H) sur $\mathbb{R}$, puis en déduire les solutions de (F).

Exercice 3 — 5 pts

Calcul intégral

Les questions 1 et 2 sont indépendantes de la question 3.

1 — 0,5 pts

Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 (x+1)\, e^{x^2+2x}\, \mathrm{d}x$.

INDICE

Poser $w(x) = x^2 + 2x$, calculer $w'(x)$ et reconnaître la forme $w'\, e^{w}$ à une constante près.

2 — 1,25 pts

À l'aide d'une intégration par parties, calculer $K = \displaystyle\int_0^1 (4x+1)\, e^{-2x}\, \mathrm{d}x$.

INDICE

Dériver le facteur $4x+1$ et primitiver le facteur e^{-2x}.

3.a — 1 pts

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\, \mathrm{d}x$. Calculer u_1.

INDICE

Reconnaître la forme $\dfrac{w'}{w}$, au signe près, avec $w(x) = 1 + e^{-x}$.

3.b — 1 pts

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n + u_{n+1} = \dfrac{1 - e^{-n}}{n}$.

3.c — 1,25 pts

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$, puis calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

INDICE

Le signe de u_{n+1} et la question 3.b permettent de majorer u_n.

Exercice 4 7 pts

Étude d'une fonction exponentielle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 - x - 1\right) e^x$. On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique 1 cm.

1 0,75 pts

Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat.

2 0,75 pts

Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis préciser la nature de la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

3.a 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (x - 1)(x + 2)\, e^x$.

3.b 1 pts

Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

4 1 pts

Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $1{,}7 < \alpha < 1{,}8$. On pourra comparer 2 au maximum de f sur $]-\infty ; 1]$. On donne $e^2 > 2{,}5$, $f(1{,}7) \approx 1{,}04$ et $f(1{,}8) \approx 2{,}66$.

5 1,5 pts

Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0, puis tracer (T) et $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, pour x compris entre -3 et 2.

6 1,25 pts

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \left(x^2 - 3x + 2\right) e^x$. Vérifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, puis calculer, en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan limité par $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

SOURCES

BURHAN