BURHAN

Devoir surveillé n° 1, semestre 1

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/devoirs/devoir-1-semestre-1

Semestre	Durée	Barème
Semestre 1	2h	20 pts (barème indicatif BURHAN)

Durée : deux heures. Les exercices sont indépendants ; les notations f et g sont redéfinies dans chacun. L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. La clarté de la rédaction, la précision des justifications et le soin de la copie entrent dans l'appréciation.

Exercice 1 4 pts

Limites et continuité

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

1.a 0,75 pts

Calculer $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$.

1.b 0,5 pts

Calculer $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-x-2}$.

2.a 0,5 pts

Soit m un nombre réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+m & \text{si } x\leq 1 \\ \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Calculer $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

2.b 0,75 pts

Déterminer la valeur de m pour laquelle f est continue en 1.

3.a 1 pts

Soit g la fonction définie sur $D=[0;1[\cup]1;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x}-1}.$$

Calculer $\lim_{x\to 1} g(x)$.

INDICE

Factoriser le numérateur, puis écrire $x-1=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$.

3.b 0,5 pts

En déduire que g admet un prolongement par continuité en 1, et définir ce prolongement.

Exercice 2 — 5 pts

Valeurs intermédiaires et fonction réciproque

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x - 1$.

1 — 1 pts

Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2 — 1 pts

Justifier que f s'annule en un seul réel, noté α, puis vérifier que α appartient à $]0\,;1[$.

3 — 0,75 pts

Par la méthode de dichotomie, déterminer un encadrement de α d'amplitude $0{,}25$.

INDICE

Calculer $f(0{,}5)$ et comparer son signe à ceux de $f(0)$ et $f(1)$; recommencer une fois sur la moitié retenue.

4.a — 0,5 pts

Établir que f possède une fonction réciproque, notée f^{-1}, et préciser son ensemble de définition J.

4.b — 0,75 pts

Calculer $f^{-1}(-1)$ et $f^{-1}(3)$, puis dresser le tableau de variations de f^{-1}. Montrer que f^{-1} est dérivable en -1 et calculer $\left(f^{-1}\right)'(-1)$.

5 — 1 pts

Cette question est indépendante des précédentes. Calculer $A = \dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} - 8^{\frac{2}{3}} + \sqrt[4]{81}$, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x-1)^3 = 8$.

Exercice 3 6 pts

Étude d'une fonction

On étudie la fonction f donnée sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x-4\sqrt{x}+3$. On note $(\mathcal{C}_f)$ son graphe, tracé dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1 0,5 pts

Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2.a 0,75 pts

Étudier la dérivabilité de f à droite en 0.

INDICE

Simplifier le taux de variation $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ en écrivant $x=\sqrt{x}\times\sqrt{x}$.

2.b 0,5 pts

Interpréter géométriquement le résultat de la question 2.a.

3.a 0,75 pts

Montrer que, pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$.

3.b 1 pts

Déterminer le signe de $f'(x)$ pour $x>0$, et en déduire le tableau de variations de f.

4 1 pts

Étudier la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

INDICE

Calculer successivement $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, puis la limite de $f(x)-ax$ pour la valeur a obtenue.

5 0,5 pts

Résoudre dans $[0;+\infty[$ l'équation $f(x)=0$, et en déduire où $(\mathcal{C}_f)$ rencontre l'axe des abscisses.

INDICE

Poser $t=\sqrt{x}$.

6 1 pts

Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, en plaçant ses points d'abscisses 0, 1, 4, 9 et 16.

Exercice 4 — 5 pts

Suite définie par une relation de récurrence

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+2}$. On construit la suite (u_n) à partir de son premier terme $u_0=0$ et de la relation $u_{n+1}=f(u_n)$, valable pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1 — 0,5 pts

Montrer que f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et dresser son tableau de variations. On donne $f(0)=\frac{1}{2}$ et $f(1)=1$.

2 — 0,5 pts

Calculer u_1 et u_2.

3 — 1 pts

Montrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq u_n<1$.

INDICE

Pour l'hérédité, utiliser le sens de variation de f obtenu à la question 1.

4 — 0,75 pts

Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{u_n+2}$, puis en déduire que la suite (u_n) est strictement croissante.

5 — 0,75 pts

Justifier la convergence de la suite (u_n), puis calculer sa limite.

INDICE

La limite ℓ vérifie $f(\ell)=\ell$; justifier avec la continuité de f.

6.a — 1 pts

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$. Prouver que (v_n) est géométrique, de raison $\dfrac{1}{3}$, et donner v_0.

INDICE

Calculer séparément $u_{n+1}-1$ et $u_{n+1}+1$ en fonction de u_n.

6.b — 0,5 pts

Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n, et retrouver la limite de la suite (u_n).

SOURCES

BURHAN