BURHAN

Dérivation et étude de fonctions : fiche de révision

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/derivation-etude-fonctions/resume

Chapitre	Semestre
Dérivation et étude de fonctions	Semestre 1

L'essentiel du chapitre

> **À retenir : Quatre idées à garder en tête**
>
> - $f'(a)$ est une **pente** : celle de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a. On l'obtient comme limite **réelle** du taux d'accroissement.
> - Le **signe de f' sur un intervalle** donne le sens de variation de f sur cet intervalle.
> - Le signe de f'' donne la **concavité** ; un changement de signe de f'' signale un **point d'inflexion**.
> - Aux bornes, les limites de $f(x)$, de $\dfrac{f(x)}{x}$ et de $f(x) - ax$ décrivent les **branches infinies** de la courbe.

Ce que tu dois citer, selon la question posée. D'abord la dérivabilité et les dérivées.

Pour montrer que…	il suffit d'établir…
f est dérivable en a	une limite **réelle** du taux $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$; si la formule change en a, une limite à droite et une à gauche, **égales**
la courbe a une demi-tangente verticale en A	une limite **infinie** du taux d'un côté de a
(T) est la tangente en $A(a, f(a))$	$y = f'(a)(x-a) + f(a)$
$f'(x) = \ldots$	la règle nommée : somme, produit, quotient ou composée
f^{-1} est dérivable en b	f continue et strictement monotone, $f(a) = b$, f dérivable en a et $f'(a) \neq 0$
$\mathcal{C}_{f^{-1}}$ a une tangente verticale en (b, a)	les mêmes hypothèses, avec $f'(a) = 0$

Ensuite les variations et la forme de la courbe.

Pour montrer que…	il suffit d'établir…
f est strictement croissante sur I	$f'(x) \geq 0$ sur l'intervalle I, nulle en un nombre fini de points seulement
f a un extremum local en a	f dérivable sur un intervalle ouvert contenant a ; $f'(a) = 0$ **et** f' change de signe en a

Pour montrer que…	il suffit d'établir…
$A(a, f(a))$ est un point d'inflexion	$f''(a) = 0$ **et** f'' change de signe en a

Enfin les branches infinies et la position de la courbe.

Pour montrer que…	il suffit d'établir…
$x = a$ est asymptote verticale	une limite infinie de f en a^+ ou en a^-
$y = \ell$ est asymptote horizontale en $+\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, avec ℓ réel
$y = ax + b$ est asymptote oblique en $+\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$
la courbe a une branche parabolique	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ infinie, puis la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$, puis celle de $f(x) - ax$ si elle est un réel $a \neq 0$
$\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D) sur I	$f(x) - (ax+b) > 0$ pour tout x de I

Dérivabilité en un point

Définition : Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$.

On dit que f est **dérivable en** a lorsque le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite **réelle** quand x tend vers a. Cette limite est le **nombre dérivé** de f en a, noté $f'(a)$:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \end{aligned}$$

Taux d'accroissement entre a et x

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Dérivable à droite en a

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_d(a) \in \mathbb{R}$$

Dérivable à gauche en a

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_g(a) \in \mathbb{R}$$

Dérivable en a (point intérieur)

$$f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a)$$

Propriété : Demi-tangentes et interprétation géométrique

Soit f une fonction continue en a, définie à droite de a.

- Si f est dérivable à droite en a, $\mathcal{C}_f$ admet au point $A(a, f(a))$ une **demi-tangente** à droite, de coefficient directeur $f'_d(a)$, d'équation $y = f'_d(a)(x-a) + f(a)$ avec $x \geq a$.
- Si $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ ou $-\infty$, f n'est pas dérivable à droite en a, et $\mathcal{C}_f$ admet au point A une **demi-tangente verticale**.

On définit de même les demi-tangentes à gauche. Lorsque f est dérivable à droite et à gauche en a avec $f'_d(a) \neq f'_g(a)$, les deux demi-tangentes forment un angle : le point A est un **point anguleux**.

Méthode : dérivabilité puis interprétation

1. **Taux** : écris $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ avec la formule valable du côté étudié.
2. **Limite** : calcule-la quand x tend vers a, ou vers a^+ et a^-.
3. **Conclusion** : limite réelle ℓ, donc f est dérivable et le nombre dérivé vaut ℓ ; limite infinie, donc f n'est pas dérivable de ce côté.
4. **Interprétation, dans une phrase à part** : tangente, demi-tangente ou demi-tangente verticale. Elle est notée séparément au bac.

Exemple : une racine qui se redresse

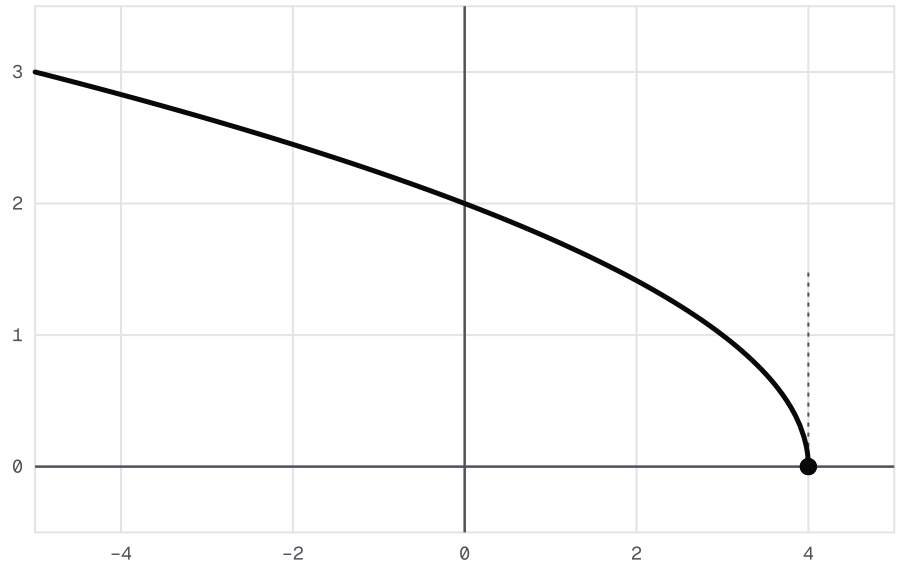
Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 4]$ par $f(x) = \sqrt{4-x}$; on a $f(4) = 0$. Pour $x < 4$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} &= \frac{\sqrt{4-x}}{x-4} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{4-x}}, \end{aligned}$$

qui tend vers $-\infty$ quand x tend vers 4^-.

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 4.

Interprétation : $\mathcal{C}_f$ admet au point $A(4, 0)$ une demi-tangente verticale, dirigée vers le haut car $f(x) \geq 0$.



$\mathcal{C}_f$ ● Point plein A ····· demi-tangente verticale ● Point du graphe

Avec f(x) = √(4 − x), la courbe arrive en A(4, 0) en se redressant : en ce point, la demi-tangente est verticale et monte au-dessus de A.

Dérivées usuelles et règles de calcul

Constante k, sur $\mathbb{R}$

$$(k)' = 0$$

Puissance, n entier ≥ 1, sur $\mathbb{R}$

$$(x^n)' = n\,x^{n-1}$$

Inverse, sur]−∞, 0[et sur]0, +∞[

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Racine carrée, sur]0, +∞[seulement

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Sinus, sur $\mathbb{R}$

$$(\sin x)' = \cos x$$

Cosinus, sur $\mathbb{R}$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

Tangente, sur chaque intervalle de définition

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$$

Somme

$$(u+v)' = u' + v'$$

Multiple, k réel

$$(k\,u)' = k\,u'$$

Produit

$$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$$

Inverse, v ne s'annule pas sur I

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

Quotient, v ne s'annule pas sur I

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$$

Théorème : Dérivée d'une fonction composée

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle J tel que $u(I) \subset J$.

Alors $v \circ u$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$:

$$(v \circ u)'(x) = v'\big(u(x)\big) \times u'(x).$$

Puissance d'une fonction, n entier ≥ 1

$$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$$

Racine d'une fonction, si u > 0 sur I

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Inverse d'une puissance, si u ne s'annule pas sur I

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{n\,u'}{u^{n+1}}$$

Trigonométrie, a et b réels

$$\big(\sin(ax+b)\big)' = a\cos(ax+b)$$

Racine n-ième (n ≥ 2), si u > 0 sur I

$$\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

Exemple : Exemples : la règle d'abord, le calcul ensuite

- **Quotient**, sur $\mathbb{R}$ (car $x^2+1>0$) : soit $g(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+1}$. Le numérateur $u'v - uv'$ vaut :

  $$\begin{aligned} &2(x^2+1) - (2x-1)\times 2x \\ &= -2x^2 + 2x + 2. \end{aligned}$$

  Donc, pour tout réel x :

  $$g'(x) = \frac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}.$$

- **Composée** $\sqrt{u}$, avec $u(x) = x^2+2x+5 = (x+1)^2+4 > 0$: soit $h(x) = \sqrt{x^2+2x+5}$. Pour tout réel x :

  $$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}} \\ &= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}. \end{aligned}$$

- **Composée** avec sin : $\big(\sin(3x-1)\big)' = 3\cos(3x-1)$.
- **Racine cubique** de $u(x) = x^2+1 > 0$: $\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)' = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$.

Méthode : Rédiger « montrer que f'(x) = … »

1. **Dérivabilité** : « g est dérivable sur $\mathbb{R}$, quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. »
2. **Formule** : écris la règle avec u, u', v, v'.
3. **Calcul** jusqu'à l'expression demandée, puis factorise : c'est le signe qui servira.

Dans les barèmes consultés, la formule et le calcul rapportent des points séparés. Si le calcul coince, garde l'expression donnée par l'énoncé pour la suite.

Propriété : Tangente en un point

Soit f une fonction dérivable en a, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère.

La **tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point $A(a, f(a))$ est la droite qui passe par A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$. Son équation est :

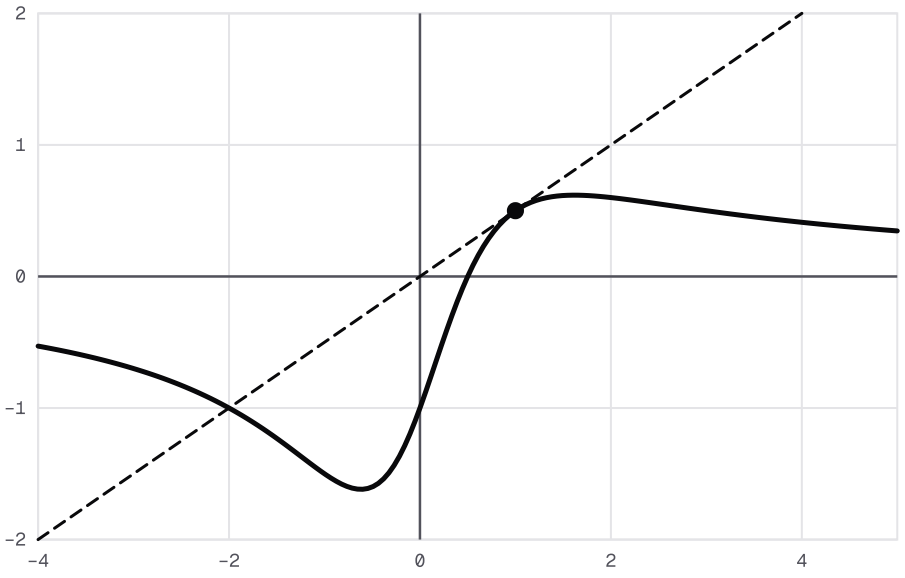
$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Exemple : tangente en un point

Pour $g(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 + 1}$ en $a = 1$: $g(1) = \dfrac{1}{2}$ et $g'(1) = \dfrac{-2 + 2 + 2}{4} = \dfrac{1}{2}$. La tangente a pour équation :

$$y = \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x.$$

Contrôle : en $x = 1$, on retrouve $y = \dfrac{1}{2} = g(1)$. Cette tangente passe par l'origine.



La courbe de g(x) = (2x − 1)/(x² + 1) et sa tangente au point d'abscisse 1, de pente g'(1) = 1/2 : la droite y = x/2 passe par l'origine.

Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème : Dérivée de la fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et $J = f(I)$. Soit $a \in I$ et $b = f(a)$.

- Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)'(b) &= \frac{1}{f'(a)} \\ &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.\end{aligned}$$

- Si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et $\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Méthode : calculer (f⁻¹)'(b)

1. **Antécédent** : trouve a tel que $f(a) = b$.
2. **Vérification** : f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$. Ce contrôle vient **avant** la formule.
3. **Conclusion** : f^{-1} est dérivable en b et $\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Cas $f'(a) = 0$ (propriété « dérivée nulle et réciproque ») : f^{-1} n'est pas dérivable en b, et sa courbe admet au point (b, a) une tangente verticale, ou une demi-tangente verticale si a est une borne de I.

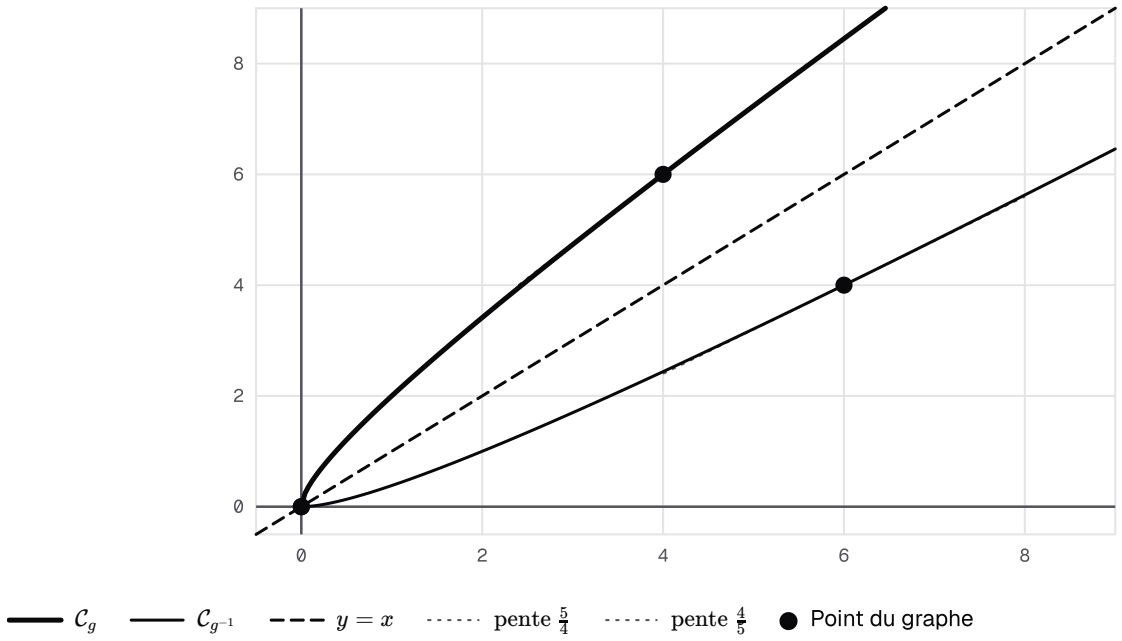
Exemple : avec une racine

Soit $g(x) = x + \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$. Somme de deux fonctions continues et strictement croissantes, g est continue et strictement croissante.

Avec $g(0) = 0$ et une limite $+\infty$ en $+\infty$, elle admet une réciproque g^{-1} définie sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Pour $b = 6$: l'antécédent est $a = 4$, car $4 + \sqrt{4} = 6$. Puis $g'(4) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \neq 0$.

Donc g^{-1} est dérivable en 6 et $\left(g^{-1}\right)'(6) = \frac{1}{g'(4)} = \frac{4}{5}$.



Les courbes de g(x) = x + √x et de g⁻¹, reflets l'une de l'autre dans la droite y = x, avec leurs tangentes en (4, 6) et en (6, 4), de pentes 5/4 et 4/5.

Variations et extremums

Théorème : Signe de la dérivée et variations

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, et si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points de I, alors f est **strictement croissante** sur I.
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, et si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points de I, alors f est **strictement décroissante** sur I.
- f est **constante** sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Propriété : Extremum et dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

- Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.
- Si f' s'annule en a **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en a : un maximum si f' passe de positive à négative, un minimum si f' passe de négative à positive.

La réciproque du premier point est fausse : $f'(a) = 0$ ne suffit pas.

Exemple : Fil rouge : f(x) = x³/(x² + 3)

Soit $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+3}$, définie sur $\mathbb{R}$ car $x^2 + 3 > 0$. Cette fonction sert jusqu'à la fin de la fiche.

Quotient : pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x^2+3) - 2x^4}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{x^4 + 9x^2}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{x^2(x^2+9)}{(x^2+3)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi $f'(x) \geq 0$ pour tout réel x, et f' ne s'annule qu'en 0 : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$f'(0) = 0$, mais f' ne change pas de signe en 0 : **aucun extremum** en 0.

Variations de f(x) = x³/(x² + 3) : f′ positive sauf en 0 où elle s'annule sans changer de signe ; f croît de −∞ à +∞.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Concavité et points d'inflexion

Théorème : Dérivée seconde et concavité

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I ; on note f'' la dérivée de f'.

- Si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors $\mathcal{C}_f$ est convexe sur I.
- Si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors $\mathcal{C}_f$ est concave sur I.

Propriété : Point d'inflexion

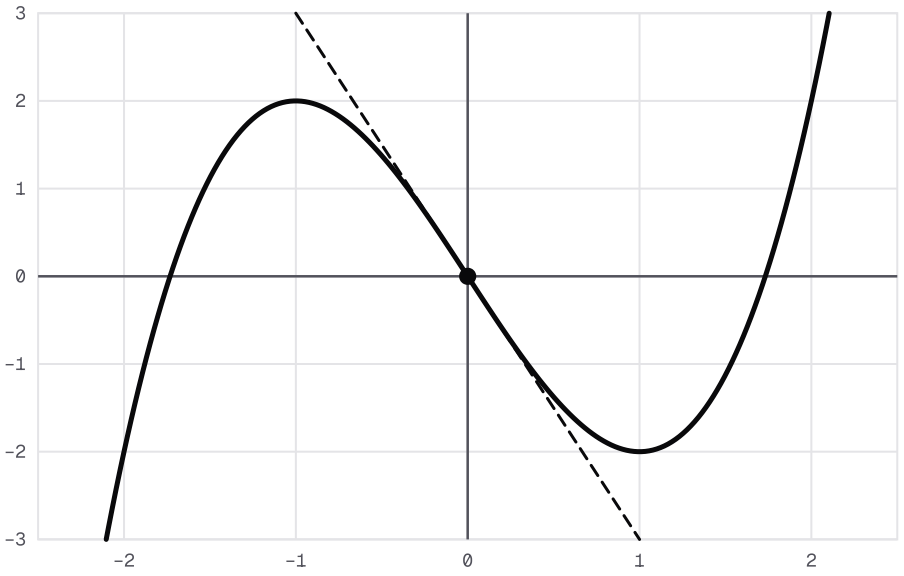
Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

Le point $A(a, f(a))$ est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$ lorsque la courbe change de concavité en A ; la courbe y traverse alors sa tangente.

Si f'' s'annule en a **en changeant de signe**, alors $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Remarque : En clair

Convexe : la courbe a la forme d'un **bol**, elle reste au-dessus de ses tangentes. **Concave** : elle a la forme d'un **parapluie**, elle reste au-dessous. Au point d'inflexion, elle passe d'une forme à l'autre et traverse sa tangente.



Exemple de x ↦ x³ − 3x : un parapluie à gauche de l'origine, un bol à droite, et au point d'inflexion O la courbe traverse sa tangente y = −3x.

Exemple : Fil rouge : signe de f″

En dérivant $f'(x) = \dfrac{x^4 + 9x^2}{(x^2+3)^2}$ comme un quotient, puis en simplifiant par $x^2 + 3$, pour tout réel x :

$$f''(x) = \frac{-6x(x-3)(x+3)}{(x^2+3)^3}.$$

f'' s'annule en changeant de signe en -3, en 0 et en 3 : la courbe a **trois points d'inflexion**, $\left(-3, -\dfrac{9}{4}\right)$, $O(0,0)$ et $\left(3, \dfrac{9}{4}\right)$.

En O, la tangente est horizontale, $y = 0$, et la courbe la traverse.

Signe de f″(x) pour f(x) = x³/(x² + 3) : convexe sur]−∞, −3] et sur [0, 3], concave sur [−3, 0] et sur [3, +∞[.

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
$f''(x)$	+	−	+	−	

Branches infinies et position relative

Définition : Asymptotes verticale et horizontale

Soit f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

- Si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ vaut $+\infty$ ou $-\infty$, la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$.

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ (ou en $-\infty$), avec b réel, la droite d'équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$).

Exemple : asymptotes verticale et horizontale

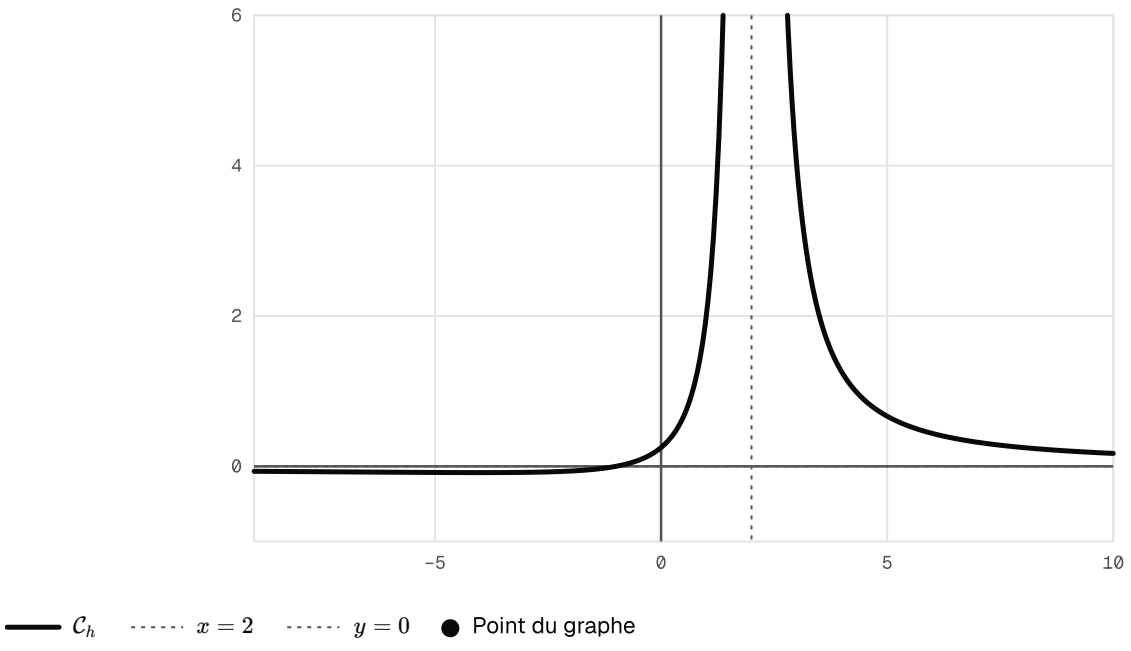
Soit $h(x) = \dfrac{x+1}{(x-2)^2}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

- En 2 : le numérateur tend vers 3 et $(x-2)^2$ tend vers 0 en restant positif. Donc $h(x)$ tend vers $+\infty$, à gauche comme à droite de 2.

  Interprétation : la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_h$.

- En $\pm\infty$: $h(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1+\frac{1}{x}}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^2}$ tend vers 0.

  Interprétation : la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_h$ en $+\infty$ et en $-\infty$.



La courbe de h(x) = (x + 1)/(x − 2)² : elle file vers le haut des deux côtés de x = 2 et rejoint l'axe des abscisses, asymptote y = 0, aux deux bouts.

Exemple : Le même exemple en tableau

Quotient, puis simplification par $x - 2$: pour tout $x \neq 2$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(x-2) - 2(x+1)}{(x-2)^3} \\ &= \frac{-x-4}{(x-2)^3}. \end{aligned}$$

h' s'annule en -4 en changeant de signe : minimum local $h(-4) = -\dfrac{1}{12}$. La double barre marque la valeur interdite 2.

Variations de h(x) = (x + 1)/(x − 2)² : h décroît de 0 à −1/12, croît vers +∞ en 2⁻, puis décroît de +∞ (en 2⁺) vers 0.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$h'(x)$		−	0	+	‖	−	
$h(x)$	0	↘	$-\dfrac{1}{12}$	↗	‖	↘	0

En $+\infty$ (de même en $-\infty$), on enchaîne au plus trois limites.

Limite calculée	Résultat	Conclusion
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	réel ℓ	asymptote horizontale $y = \ell$
puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$	$+\infty$ ou $-\infty$	branche parabolique de direction l'axe des ordonnées
	0	branche parabolique de direction l'axe des abscisses
	réel $a \neq 0$	on calcule la limite suivante
puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - ax\big)$	réel b	asymptote oblique $y = ax + b$
	$+\infty$ ou $-\infty$	branche parabolique de direction la droite $y = ax$

Exemple : Fil rouge : asymptote oblique et position

Pour $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+3}$: $f(x) - x = \dfrac{-3x}{x^2+3}$, qui tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Donc la droite $(D) : y = x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Position : le signe de $f(x) - x$ est celui de $-3x$.

- Sur $]-\infty, 0[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D).
- Sur $]0, +\infty[$, elle est au-dessous.
- Elles se coupent en O.

Exemple : une branche parabolique

Pour $g(x) = x + \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\dfrac{g(x)}{x} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers 1.

Puis $g(x) - x = \sqrt{x}$ tend vers $+\infty$: pas d'asymptote oblique.

$\mathcal{C}_g$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite $y = x$.

Plan d'étude d'une fonction

Méthode : Les six étapes, dans cet ordre

1. **Ensemble de définition** D_f, et éventuels éléments de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
2. **Limites aux bornes et branches infinies** de $\mathcal{C}_f$: chaque limite, puis son interprétation géométrique.
3. **Dérivabilité** sur D_f (points particuliers compris), **calcul et signe de** f', **tableau de variations** de f.
4. **Concavité et points d'inflexion**, si c'est demandé : signe de f''.
5. **Tangentes particulières, position relative, intersections avec les axes** : signe de $f(x) - (ax + b)$, solutions de $f(x) = 0$.
6. **Construction** : d'abord les asymptotes et les tangentes, ensuite les points remarquables, et la courbe en dernier.

Sept pièges à éviter

Attention : Hauteur, pente, et continue n'est pas dérivable

- $h(a)$ est une **hauteur**, $h'(a)$ une **pente**. Pour $h(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$ en -1 : $h(-1) = 2$ et $h'(-1) = 0$. La tangente au point $(-1, 2)$ est horizontale, d'équation $y = 2$.
- Une fonction continue en a peut ne pas y être dérivable : $\sqrt{4 - x}$ est continue en 4, mais son taux tend vers $-\infty$ à gauche.

Attention : La dérivée intérieure, et l'antécédent

- Dans une composée, n'oublie pas u' : $\big((3x + 1)^2\big)' = 2(3x + 1) \times 3$, soit $6(3x + 1)$, et non $2(3x + 1)$. Test en $x = 0$: 6 contre 2 ; en développant $9x^2 + 6x + 1$, on trouve bien $18x + 6$.
- $\big(f^{-1}\big)'(b)$ se calcule avec l'**antécédent** a de b. Pour $g(x) = x + \sqrt{x}$: $\big(g^{-1}\big)'(6) = \dfrac{1}{g'(4)}$, et non $\dfrac{1}{g'(6)}$.

Attention : Une annulation ne suffit pas

- $f'(a) = 0$ ne donne pas d'extremum à lui seul. Dans le fil rouge, $f'(0) = 0$ et f reste strictement croissante.
- $f''(a) = 0$ ne donne pas d'inflexion à lui seul. Pour $k(x) = (x - 1)^4$: $k''(x) = 12(x - 1)^2$ s'annule en 1 sans changer de signe ; la courbe reste convexe.
- Et l'équation de la tangente est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, jamais $y = f'(a)\,x + f(a)$: contrôle toujours en $x = a$.

Au bac

Ce relevé porte sur **16 sujets nationaux 2BAC SE** consultés (sessions 2016 à 2025) et sur **7 barèmes** de ces sujets. Une fréquence décrit ces sujets-là, pas l'examen de demain.

La dérivation y vit dans un **problème d'étude de fonction**, noté de 7 à 11 points sur 20. Dans ces sujets, les fonctions étudiées sont construites avec les fonctions logarithme et exponentielle, que tu étudieras plus tard : les méthodes de cette fiche s'y appliquent telles quelles.

Les questions les plus fréquentes :

Question	Sujets consultés	Barème constaté
Calcul de $f'(x)$, le résultat presque toujours donné : « montrer que $f'(x) = \dots$ »	16 des 16	0,5 à 1
Signe de f' et tableau de variations	16 des 16	0,25 à 0,75
Limites aux bornes et interprétation	16 des 16	0,5 à 0,75
Construction de la courbe	14	0,75 à 1,5
Branche parabolique	13	0,25 à 0,75
Position relative courbe et droite	11	0,25 à 0,75
Lecture graphique	9	non constaté

Les questions moins fréquentes :

Question	Sujets consultés	Barème constaté
Asymptote oblique	7	0,5 à 0,75
Concavité et points d'inflexion	7	0,5 à 1,5
f' écrite avec une fonction auxiliaire	6	0,75 à 1
Nombre dérivé de f^{-1} en un point	5	0,5 à 0,75
Courbe de f^{-1}	3	0,75
Équation d'une tangente	3	0,25 à 0,5
Dérivabilité en un point et interprétation	2	0,25 à 0,75
Extremum, puis une inégalité	2	0,25 à 0,5

> **À retenir : Ce que les barèmes consultés récompensent**
>
> - Chaque **interprétation géométrique** est notée à part, le plus souvent $0{,}25$ point : écris-la toujours, dans une phrase séparée.

- Pour le tableau de variations : $0{,}25$ par intervalle, ou $0{,}5$ pour le signe et $0{,}25$ pour le tableau.
- Pour f^{-1} : un quart de point pour la dérivabilité, puis le calcul.
- Toute méthode correcte est acceptée, et les étapes sont notées : une question inachevée rapporte quand même.

Bonus : pour aller plus loin

Remarque : Pourquoi « Bonus »

Ces trois points ne figurent dans aucun des 16 sujets consultés, et leur place dans le programme reste à confirmer. Ils aident à comprendre ; demande à ton professeur s'ils sont exigés.

Exemple : Bonus : approximation affine et écriture différentielle

Près de a, la courbe se confond presque avec sa tangente : pour h proche de 0,

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)\,h.$$

Avec $\sqrt{x}$ en $a = 9$: $\sqrt{9+h} \approx 3 + \dfrac{h}{6}$. Pour $h = 0{,}06$: $\sqrt{9{,}06} \approx 3{,}01$ (la calculatrice donne $3{,}00998\ldots$).

On écrit aussi $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemple : Bonus : dérivée d'une puissance rationnelle

Pour r rationnel non nul, sur $]0, +\infty[$: $(x^r)' = r\,x^{r-1}$, la même forme que pour x^n.

Exemple : $\left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \dfrac{4}{3}\,x^{\frac{1}{3}} = \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}$.

Exemple : Bonus : axe et centre de symétrie

- Fil rouge : pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$, soit $f(-x) + f(x) = 0$. Le point $O(0,0)$ est **centre de symétrie** de $\mathcal{C}_f$.
- $h(x) = \sqrt{(x+1)^2 + 4}$, définie sur $\mathbb{R}$, vérifie $h(-2-x) = h(x)$: la droite d'équation $x = -1$ est **axe de symétrie** de $\mathcal{C}_h$.

Une symétrie permet d'étudier f sur une moitié du domaine, puis de compléter la courbe.

Checklist avant le devoir

À retenir : Je sais…

- étudier la dérivabilité en un point par le taux, à droite et à gauche, puis interpréter dans une phrase à part ;

- écrire l'équation d'une tangente et la contrôler en $x = a$;
- dériver en nommant la règle : somme, produit, quotient, composée ;
- calculer $\left(f^{-1}\right)'(b)$ avec l'antécédent de b, après avoir vérifié $f'(a) \neq 0$;
- déduire les variations du signe de f' sur chaque intervalle ;
- justifier un extremum ou une inflexion par un **changement de signe** ;
- enchaîner les limites d'une branche infinie ;
- situer une courbe par rapport à une droite ;
- suivre le plan d'étude dans l'ordre.