BURHAN

Dérivation et étude de fonctions : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/derivation-etude-fonctions/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivation et étude de fonctions	Niveau examen	5

Exercice 1 7 pts

Une fonction auxiliaire au service de f'

Partie A. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + x - 2$.

Partie B. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - x + 1}{x^2}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 0,75 pts

A.1. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$, puis calculer $g(1)$.

INDICE

Le signe de $g'(x)$ se lit sans chercher de racines.

2. 0,5 pts

A.2. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

INDICE

g est strictement croissante et s'annule en 1 : compare $g(x)$ avec $g(1)$.

3. 1 pts

B.1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter géométriquement les limites en 0.

INDICE

En 0, regarde la limite du numérateur et le signe de x^2. En l'infini, écris d'abord $f(x)$ comme une somme de termes simples.

4. 1 pts

B.2. Vérifier que, pour tout $x \neq 0$, $f(x) = x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$. Montrer que la droite $(D) : y = x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

INDICE

Divise chaque terme du numérateur par x^2, puis étudie $f(x) - x$.

5. 0,75 pts

B.3. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (D).

INDICE

Écris $f(x) - x$ sous la forme d'un seul quotient.

6. 1,25 pts

B.4. Montrer que, pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Pars de l'écriture de B.2 : c'est une somme de termes faciles à dériver. Pour le signe, combine la partie A et le signe de x^3.

7. 1 pts

B.5. On admet que, pour tout $x \neq 0$, $f''(x) = \dfrac{2(3-x)}{x^4}$. Étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$ et montrer qu'elle admet un point d'inflexion dont on précisera les coordonnées.

INDICE

Le signe de $f''(x)$ ne dépend que d'un facteur. Un point d'inflexion demande un changement de signe de f''.

8. 0,75 pts

B.6. Construire $\mathcal{C}_f$ et (D) dans le repère. On précisera la tangente au point d'abscisse 1.

INDICE

Commence par les droites (asymptotes, tangente), puis les points remarquables.

Exercice 2 6,5 pts

Une racine carrée, une demi-tangente et une réciproque

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. 0,75 pts

Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter géométriquement le résultat.

INDICE

Écris le taux d'accroissement entre 0 et $x > 0$, puis simplifie $\dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

2. 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement.

INDICE

Pour $x > 0$, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x-3}{\sqrt{x}}$: sépare en deux termes.

3. 1 pts

Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$.

INDICE

Nomme la règle, puis réduis au même dénominateur $2\sqrt{x}$.

4. 0,75 pts

Dresser le tableau de variations de f. Préciser les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

INDICE

Le signe de $f'(x)$ se lit sur son numérateur. Pour les intersections, un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul.

5. 0,5 pts

On admet que, pour tout $x > 0$, $f''(x) = \dfrac{3(x+1)}{4x\sqrt{x}}$. Étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$ sur $]0, +\infty[$.

INDICE

Quel est le signe de chaque facteur pour $x > 0$?

6. 1,25 pts

Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [1, +\infty[$. Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. Calculer $h(4)$, puis montrer que h^{-1} est dérivable en 2 et calculer $\left(h^{-1}\right)'(2)$.

INDICE

Pour le nombre dérivé, travaille avec l'antécédent de 2 et vérifie une condition avant d'appliquer la formule.

7. 0,5 pts

La fonction h^{-1} est-elle dérivable à droite en -2 ? Interpréter géométriquement.

INDICE

Quel est l'antécédent de -2 par h, et que vaut la dérivée en ce point ? Raisonne par l'absurde avec $h\big(h^{-1}(y)\big) = y$.

8. 1 pts

Construire $\mathcal{C}_f$ dans le repère.

INDICE

Place d'abord les points où la tangente est connue.

Exercice 3 4,75 pts

Lire le tableau de g, puis étudier f

Partie A. Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=2x^3-3x^2-1$. Son tableau de variations est donné ci-dessous.

x	0		1		$+\infty$
Variations de g	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

Lecture du tableau : ↗ signifie « strictement croissante », ↘ « strictement décroissante ».

Partie B. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x^2-3x+\dfrac{1}{x}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. 0,75 pts

A.1. Par lecture du tableau, justifier que $g(x)<0$ pour tout $x\in[0,1]$. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $]1,+\infty[$, et vérifier que $1{,}5<\alpha<2$.

INDICE

Sur $[0,1]$, regarde la plus grande valeur prise par g. Sur $[1,+\infty[$, pense à la stricte monotonie.

2. 0,5 pts

A.2. En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0,+\infty[$.

INDICE

Combine les deux résultats de A.1.

3. 1 pts

B.1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter géométriquement. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter.

INDICE

En $+\infty$, factorise x^2-3x par x. Pour la seconde limite, divise chaque terme par x.

4. 1 pts

B.2. Montrer que, pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$. En déduire le tableau de variations de f.

INDICE

Dérive terme à terme, puis réduis au même dénominateur x^2. Le signe de $f'(x)$ vient de la partie A.

5. 0,75 pts

B.3. Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{3\left(1-\alpha^2\right)}{2\alpha}$. En déduire le signe de $f(\alpha)$.

INDICE

Écris $f(\alpha)$ avec le seul dénominateur α, puis utilise $g(\alpha)=0$ pour remplacer α^3.

6. 0,75 pts

B.4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $]0, +\infty[$.

INDICE

Travaille sur chacun des deux intervalles du tableau de f.

Exercice 4 6,75 pts

Une inflexion à tangente horizontale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 1 pts

Calculer les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$, à gauche et à droite en -1. Interpréter géométriquement les limites en -1.

INDICE

En -1, étudie séparément le numérateur et le signe du dénominateur. En l'infini, mets x^2 en facteur au dénominateur.

2. 1 pts

Vérifier que, pour tout $x \neq -1$, $f(x) = x - 2 + \dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$. En déduire que la droite $(D) : y = x - 2$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

INDICE

Réduis le membre de droite au même dénominateur et développe.

3. 0,75 pts

Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (D).

INDICE

Le dénominateur de la différence est un carré.

4. 1,25 pts

Montrer que, pour tout $x \neq -1$, $f'(x) = \dfrac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$. Étudier son signe et dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Dérive un quotient, puis mets en facteur ce qui est commun au numérateur, avant de simplifier.

5. 0,75 pts

Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ à l'origine. La fonction f admet-elle un extremum en 0 ?

INDICE

Lis le tableau : quelle est la monotonie de f autour de 0 ?

6. 1 pts

On admet que, pour tout $x \neq -1$, $f''(x) = \dfrac{6x}{(x+1)^4}$. Étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$ et montrer que l'origine est un point d'inflexion.

INDICE

Le dénominateur est une puissance paire : quel facteur décide du signe ?

7. 1 pts

Construire $\mathcal{C}_f$ et (D) dans le repère.

INDICE

Les droites d'abord, puis les points où la tangente est connue.

Exercice 5 6 pts

Une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-2, 2[$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Interpréter géométriquement.

INDICE

Factorise x^2 sous la racine. Attention : $\sqrt{x^2} = |x|$.

2. 1 pts

Montrer que, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{8}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}.$$

En déduire le sens de variation de f.

INDICE

C'est un quotient dont le dénominateur est une racine composée : vérifie les hypothèses, puis réduis au même dénominateur.

3. 0,75 pts

Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]-2, 2[$.

INDICE

Continuité, stricte monotonie, puis les limites de la question 1.

4. 1 pts

Calculer $f\left(2\sqrt{3}\right)$. Montrer que f^{-1} est dérivable en $\sqrt{3}$ et calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt{3}\right)$.

INDICE

Repère l'antécédent de $\sqrt{3}$, puis vérifie la condition sur la dérivée avant d'appliquer la formule.

5. 1 pts

On admet que, pour tout réel x, $f''(x) = \dfrac{-24x}{(x^2+4)^2\sqrt{x^2+4}}$. Étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$ et préciser son point d'inflexion.

INDICE

Le dénominateur est strictement positif : seul le numérateur décide du signe.

6. 0,75 pts

Vérifier que la droite $(\Delta) : y = x$ est la tangente à $\mathcal{C}_f$ à l'origine, puis étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (Δ).

INDICE

Pour la position, factorise $f(x) - x$ par x et compare $\sqrt{x^2+4}$ à 2.

7. 0,75 pts

Construire $\mathcal{C}_f$ dans le repère.

INDICE

Trace d'abord les deux asymptotes et la droite (Δ).