BURHAN

Dérivation et étude de fonctions : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/derivation-etude-fonctions/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivation et étude de fonctions	Niveau examen	5

Exercice 1 — 7 pts

Une fonction auxiliaire au service de f'

Partie A. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + x - 2$.

Partie B. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - x + 1}{x^2}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. — 0,75 pts

A.1. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$, puis calculer $g(1)$.

INDICE

Le signe de $g'(x)$ se lit sans chercher de racines.

CORRIGÉ

Dérivée. g est une fonction polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $g'(x) = 3x^2 + 1$.

Variations. Pour tout réel x, $g'(x) \geq 1 > 0$: g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Valeur en 1. $g(1) = 1 + 1 - 2 = 0$.

Conclusion. g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $g(1) = 0$.

2. — 0,5 pts

A.2. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

INDICE

g est strictement croissante et s'annule en 1 : compare $g(x)$ avec $g(1)$.

CORRIGÉ

g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $g(1) = 0$:

- si $x < 1$, alors $g(x) < g(1) = 0$;
- si $x > 1$, alors $g(x) > g(1) = 0$.

Conclusion. $g(x) < 0$ sur $]-\infty, 1[$, $g(1) = 0$, et $g(x) > 0$ sur $]1, +\infty[$.

3. 1 pts

B.1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. Interpréter géométriquement les limites en 0.

INDICE

En 0, regarde la limite du numérateur et le signe de x^2. En l'infini, écris d'abord $f(x)$ comme une somme de termes simples.

CORRIGÉ

En 0. Le numérateur tend vers $1>0$ et x^2 tend vers 0 en restant strictement positif. Donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

Interprétation géométrique. La droite d'équation $x=0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

En l'infini. Pour tout $x\neq 0$, $f(x) = x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$, et les termes $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x^2}$ tendent vers 0. Donc $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

Conclusion. f tend vers $+\infty$ en 0^- et en 0^+, vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$; l'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

Barème indicatif : 0,5 pour les limites en 0, 0,25 pour l'interprétation, 0,25 pour les limites en l'infini.

4. 1 pts

B.2. Vérifier que, pour tout $x\neq 0$, $f(x) = x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$. Montrer que la droite $(D) : y = x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

INDICE

Divise chaque terme du numérateur par x^2, puis étudie $f(x) - x$.

CORRIGÉ

Écriture. Pour tout $x\neq 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3}{x^2} - \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \\ &= x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Asymptote. Pour tout $x\neq 0$, $f(x) - x = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$, qui tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Conclusion. Pour tout $x\neq 0$, $f(x) = x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$, et $(D) : y = x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

5. 0,75 pts

B.3. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (D).

INDICE

Écris $f(x) - x$ sous la forme d'un seul quotient.

CORRIGÉ

Différence. Pour tout $x \neq 0$:

$$f(x) - x = \frac{1 - x}{x^2}.$$

Le dénominateur est strictement positif sur $\mathbb{R}^*$: $f(x) - x$ a le signe de $1 - x$.

- Sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$: $f(x) - x > 0$, donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D).
- Sur $]1, +\infty[$: $f(x) - x < 0$, donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de (D).
- En $x = 1$: $f(1) = 1$, donc $\mathcal{C}_f$ et (D) se coupent au point $A(1, 1)$.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D) sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$, au-dessous sur $]1, +\infty[$, et coupe (D) au point $A(1, 1)$.

6. 1,25 pts

B.4. Montrer que, pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Pars de l'écriture de B.2 : c'est une somme de termes faciles à dériver. Pour le signe, combine la partie A et le signe de x^3.

CORRIGÉ

Dérivée. f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables. Les dérivées de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sont $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ et $x \mapsto -\dfrac{2}{x^3}$. Donc, pour tout $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \\ &= \frac{x^3 + x - 2}{x^3} \\ &= \frac{g(x)}{x^3}. \end{aligned}$$

Signe. On combine le signe de $g(x)$ (partie A) et celui de x^3, qui est le signe de x :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
Signe de x^3		$-$	‖	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Lecture du tableau : ↗ signifie « strictement croissante », ↘ « strictement décroissante ». La double barre ‖ marque la valeur interdite 0 : à gauche de ‖, la limite en 0^- ; à droite, la limite en 0^+.

Conclusion. Pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$. f est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$, strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$; elle admet un minimum local $f(1) = 1$.

7. 1 pts

B.5. On admet que, pour tout $x \neq 0$, $f''(x) = \dfrac{2(3-x)}{x^4}$. Étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$ et montrer qu'elle admet un point d'inflexion dont on précisera les coordonnées.

INDICE

Le signe de $f''(x)$ ne dépend que d'un facteur. Un point d'inflexion demande un changement de signe de f''.

CORRIGÉ

Signe de $f''(x)$. Pour tout $x \neq 0$, $x^4 > 0$: $f''(x)$ a le signe de $3 - x$.

- $f''(x) > 0$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 3[$: $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 3]$.
- $f''(x) < 0$ sur $]3, +\infty[$: $\mathcal{C}_f$ est concave sur $[3, +\infty[$.

Point d'inflexion. f'' s'annule en 3 en changeant de signe, et :

$$\begin{aligned} f(3) &= 3 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{25}{9}. \end{aligned}$$

Contrôle. En dérivant $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}$, on obtient $f''(x) = -\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{6}{x^4} = \dfrac{6 - 2x}{x^4}$: c'est l'expression admise.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 3]$, concave sur $[3, +\infty[$, et le point $\left(3, \dfrac{25}{9}\right)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

8. 0,75 pts

B.6. Construire $\mathcal{C}_f$ et (D) dans le repère. On précisera la tangente au point d'abscisse 1.

INDICE

Commence par les droites (asymptotes, tangente), puis les points remarquables.

CORRIGÉ

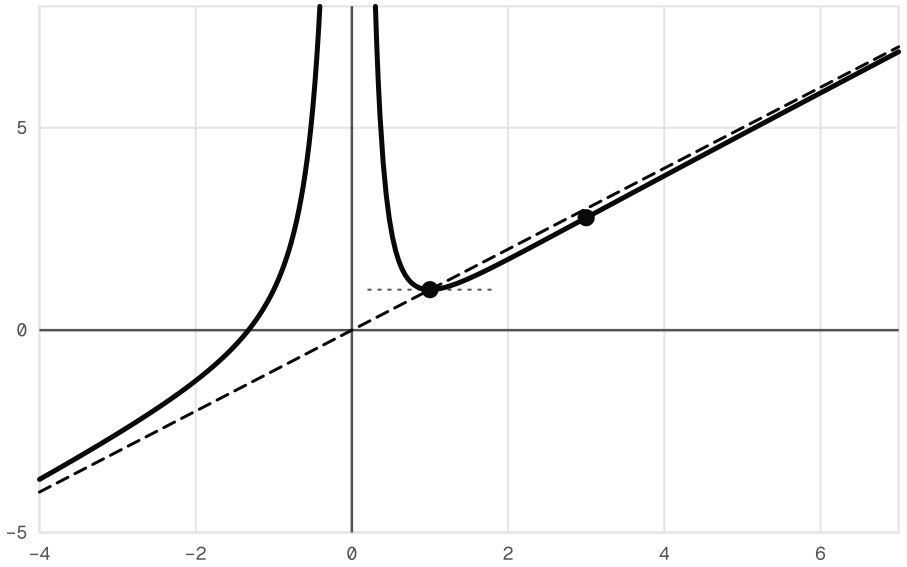
Tangente en 1. $f'(1) = \dfrac{g(1)}{1^3} = 0$: la tangente au point $A(1,1)$ est horizontale, d'équation $y = 1$. Ce point est aussi sur (D).

Ordre de construction.

1. L'asymptote verticale $x = 0$ et l'asymptote oblique (D) : $y = x$.
2. La tangente horizontale $y = 1$ au point $A(1,1)$, minimum local et point commun avec (D).
3. Le point d'inflexion $\left(3, \dfrac{25}{9}\right)$, avec $\dfrac{25}{9} \approx 2{,}8$.
4. Les branches : sur $]-\infty, 0[$, la courbe monte de $-\infty$ vers $+\infty$, au-dessus de (D) ; sur $]0, +\infty[$, elle descend de $+\infty$ jusqu'à A, puis remonte en passant sous (D) et s'en rapproche.

Remarque. Sur $]-\infty, 0[$, f est continue et passe de $-\infty$ à $+\infty$: la courbe coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse négative.

Conclusion. La tangente en $A(1,1)$ a pour équation $y = 1$, et $\mathcal{C}_f$ se construit à partir de ses deux asymptotes, de cette tangente et du point d'inflexion $\left(3, \dfrac{25}{9}\right)$.



La courbe de f(x) = (x³ − x + 1)/x² avec x = 0, la droite (D) : y = x, la tangente horizontale y = 1 en A(1, 1) et le point d'inflexion d'abscisse 3.

Exercice 2 6,5 pts

Une racine carrée, une demi-tangente et une réciproque

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. 0,75 pts

Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter géométriquement le résultat.

INDICE

Écris le taux d'accroissement entre 0 et $x > 0$, puis simplifie $\dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

CORRIGÉ

Taux d'accroissement. $f(0) = 0$. Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{(x-3)\sqrt{x}}{x} \\ &= \frac{x-3}{\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Limite. Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $x - 3$ tend vers -3 et $\sqrt{x}$ tend vers 0 en restant strictement positif : le taux tend vers $-\infty$.

Dérivabilité. Cette limite n'est pas réelle : f n'est pas dérivable à droite en 0.

Interprétation géométrique. $\mathcal{C}_f$ admet à l'origine une demi-tangente verticale, dirigée vers le bas car $f(x) < 0$ pour $0 < x < 3$.

Conclusion. f n'est pas dérivable à droite en 0, et $\mathcal{C}_f$ admet en O une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.

Barème indicatif : 0,25 pour la limite du taux, 0,25 pour la conclusion, 0,25 pour l'interprétation.

2. 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement.

INDICE

Pour $x>0$, $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x-3}{\sqrt{x}}$: sépare en deux termes.

CORRIGÉ

Limite de f. En $+\infty$, $x-3$ et $\sqrt{x}$ tendent vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Limite de $\dfrac{f(x)}{x}$. Pour tout $x>0$:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{x-3}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}.$$

En $+\infty$, $\sqrt{x}$ tend vers $+\infty$ et $\dfrac{3}{\sqrt{x}}$ vers 0 : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty$.

Conclusion. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty$: $\mathcal{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

3. 1 pts

Montrer que, pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$.

INDICE

Nomme la règle, puis réduis au même dénominateur $2\sqrt{x}$.

CORRIGÉ

Dérivabilité. Sur $]0,+\infty[$, les fonctions $x\mapsto x-3$ et $x\mapsto\sqrt{x}$ sont dérivables : f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables.

Dérivée d'un produit. Posons $u(x)=x-3$ et $v(x)=\sqrt{x}$, d'où $u'(x)=1$ et $v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Pour tout $x>0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{x}+\frac{x-3}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2x+x-3}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$.

4. 0,75 pts

Dresser le tableau de variations de f. Préciser les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

INDICE

Le signe de $f'(x)$ se lit sur son numérateur. Pour les intersections, un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul.

CORRIGÉ

Signe de $f'(x)$. Pour tout $x > 0$, $2\sqrt{x} > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x - 1$. Ainsi $f'(x) < 0$ sur $]0, 1[$ et $f'(x) > 0$ sur $]1, +\infty[$.

Variations. f est continue sur $[0, +\infty[$: elle est strictement décroissante sur $[0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$, avec $f(0) = 0$ et $f(1) = -2$.

Intersections avec l'axe des abscisses. Pour $x \geq 0$, $f(x) = 0$ équivaut à $x - 3 = 0$ ou $\sqrt{x} = 0$, c'est-à-dire $x = 3$ ou $x = 0$.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses aux points $O(0, 0)$ et $B(3, 0)$, et le tableau de variations de f est :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	0	↘	-2	↗	$+\infty$

Lecture du tableau : ↗ signifie « strictement croissante », ↘ « strictement décroissante ».

5. 0,5 pts

On admet que, pour tout $x > 0$, $f''(x) = \dfrac{3(x+1)}{4x\sqrt{x}}$. Étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$ sur $]0, +\infty[$.

INDICE

Quel est le signe de chaque facteur pour $x > 0$?

CORRIGÉ

Pour tout $x > 0$, $x + 1 > 0$ et $4x\sqrt{x} > 0$, donc $f''(x) > 0$.

Conclusion. La courbe $\mathcal{C}_f$ est **convexe** sur $]0, +\infty[$; elle n'y a pas de point d'inflexion.

6. 1,25 pts

Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [1, +\infty[$. Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. Calculer $h(4)$, puis montrer que h^{-1} est dérivable en 2 et calculer $\left(h^{-1}\right)'(2)$.

INDICE

Pour le nombre dérivé, travaille avec l'antécédent de 2 et vérifie une condition avant d'appliquer la formule.

CORRIGÉ

Bijection. h est continue et strictement croissante sur I (question 4). Comme $h(1) = -2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$, h réalise une bijection de I sur $J = h(I) = [-2, +\infty[$. Elle admet donc une fonction réciproque h^{-1} définie sur J.

Antécédent. $h(4) = (4-3)\sqrt{4} = 2$, donc $h^{-1}(2) = 4$.

Hypothèse. h est dérivable en 4 et :

$$h'(4) = \frac{3 \times 3}{2 \times 2} = \frac{9}{4}.$$

En particulier, $h'(4) \neq 0$.

Dérivabilité de h^{-1}. h est continue et strictement croissante sur I, dérivable en 4 avec $h'(4) \neq 0$. Donc h^{-1} est dérivable en $h(4) = 2$ et :

$$\left(h^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{h'(4)} = \frac{4}{9}.$$

Attention : on calcule h' en 4, l'antécédent de 2, et non en 2.

Conclusion. h admet une réciproque h^{-1} définie sur $J = [-2, +\infty[$; $h(4) = 2$, h^{-1} est dérivable en 2 et $\left(h^{-1}\right)'(2) = \frac{4}{9}$.

7. `0,5 pts`

La fonction h^{-1} est-elle dérivable à droite en -2 ? Interpréter géométriquement.

INDICE

Quel est l'antécédent de -2 par h, et que vaut la dérivée en ce point ? Raisonne par l'absurde avec $h\big(h^{-1}(y)\big) = y$.

CORRIGÉ

Antécédent. $h(1) = -2$, donc $h^{-1}(-2) = 1$. De plus, h est dérivable à droite en 1 et $h'_d(1) = f'(1) = 0$.

Raisonnement par l'absurde. Supposons h^{-1} dérivable à droite en -2. Pour tout $y \geq -2$, $h\big(h^{-1}(y)\big) = y$. En dérivant à droite en $y = -2$:

$$h'_d(1) \times \left(h^{-1}\right)'_d(-2) = 1.$$

Or $h'_d(1) = 0$, donc le membre de gauche est nul : c'est impossible. Ainsi h^{-1} n'est pas dérivable à droite en -2.

On retrouve la propriété du cours sur une dérivée nulle et la réciproque, dans le cas où 1 est une borne de l'intervalle I.

Interprétation géométrique. La courbe de h^{-1} admet au point $(-2, 1)$ une demi-tangente verticale. C'est la symétrique, par rapport à la droite d'équation $y = x$, de la demi-tangente horizontale de $\mathcal{C}_f$ au point $(1, -2)$.

Conclusion. h^{-1} n'est pas dérivable à droite en -2, et sa courbe admet en $(-2, 1)$ une demi-tangente verticale.

8. 1 pts

Construire $\mathcal{C}_f$ dans le repère.

INDICE

Place d'abord les points où la tangente est connue.

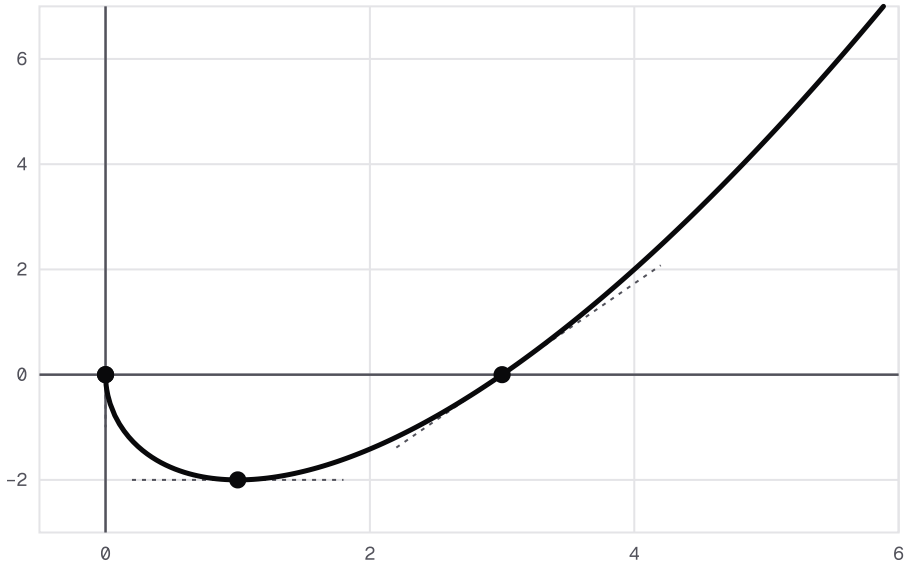
CORRIGÉ

Éléments à placer d'abord.

- À l'origine : la demi-tangente verticale (question 1).
- Au point $(1, -2)$: la tangente horizontale, au minimum de f.
- Au point $B(3, 0)$: $f'(3) = \dfrac{3 \times 2}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, d'où la tangente $y = \sqrt{3}(x - 3)$.
- En $+\infty$: la branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Tracé. La courbe part de O verticalement vers le bas, atteint son minimum en $(1, -2)$, remonte, coupe l'axe des abscisses en B, puis monte de plus en plus vite. Elle reste convexe sur $]0, +\infty[$.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ se construit à partir de ces tangentes et de sa branche parabolique, en respectant sa convexité.



La courbe de f(x) = (x − 3)√x : demi-tangente verticale en O, minimum en (1, −2), passage en B(3, 0) avec la tangente de pente √3.

Exercice 3 4,75 pts

Lire le tableau de g, puis étudier f

Partie A. Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=2x^3-3x^2-1$. Son tableau de variations est donné ci-dessous.

x	0		1		$+\infty$
Variations de g	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

Lecture du tableau : ↗ signifie « strictement croissante », ↘ « strictement décroissante ».

Partie B. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x^2-3x+\dfrac{1}{x}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. 0,75 pts

A.1. Par lecture du tableau, justifier que $g(x)<0$ pour tout $x\in[0,1]$. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $]1,+\infty[$, et vérifier que $1{,}5<\alpha<2$.

INDICE

Sur $[0,1]$, regarde la plus grande valeur prise par g. Sur $[1,+\infty[$, pense à la stricte monotonie.

CORRIGÉ

Sur $[0,1]$. D'après le tableau, g décroît de -1 à -2 : pour tout $x\in[0,1]$, $g(x)\leq -1<0$.

Sur $[1,+\infty[$. g est continue (fonction polynôme) et strictement croissante, de $g(1)=-2$ vers $+\infty$. Comme $0\in[-2,+\infty[$, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $[1,+\infty[$; et $\alpha\neq 1$, car $g(1)=-2$.

Encadrement. $g(1{,}5)=2\times 3{,}375-3\times 2{,}25-1=-1<0$ et $g(2)=16-12-1=3>0$. Comme g est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ et $g(\alpha)=0$, on a $1{,}5<\alpha<2$.

Conclusion. $g(x)<0$ pour tout $x\in[0,1]$; l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $]1,+\infty[$, et $1{,}5<\alpha<2$.

2. 0,5 pts

A.2. En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0,+\infty[$.

INDICE

Combine les deux résultats de A.1.

CORRIGÉ

- Sur $[0,1]$: $g(x)<0$ (question A.1).
- Sur $[1,\alpha[$: g est strictement croissante et $g(\alpha)=0$, donc $g(x)<0$.
- Sur $]\alpha,+\infty[$: $g(x)>g(\alpha)=0$.

Conclusion. $g(x)<0$ sur $[0,\alpha[$, $g(\alpha)=0$, et $g(x)>0$ sur $]\alpha,+\infty[$.

3. 1 pts

B.1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter géométriquement. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter.

INDICE

En $+\infty$, factorise x^2-3x par x. Pour la seconde limite, divise chaque terme par x.

CORRIGÉ

En 0^+. x^2-3x tend vers 0 et $\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

Interprétation géométrique. La droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

En $+\infty$. $x^2-3x=x(x-3)$ tend vers $+\infty$ et $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. De plus, pour tout $x>0$:

$$\frac{f(x)}{x}=x-3+\frac{1}{x^2},$$

qui tend vers $+\infty$.

Interprétation géométrique. $\mathcal{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Conclusion. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty$: asymptote verticale d'équation $x=0$, et branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en $+\infty$.

Barème indicatif : 0,25 par limite, 0,25 pour l'ensemble des interprétations.

4. 1 pts

B.2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$. En déduire le tableau de variations de f.

INDICE

Dérive terme à terme, puis réduis au même dénominateur x^2. Le signe de $f'(x)$ vient de la partie A.

CORRIGÉ

Dérivée. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables. Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 3 - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

Signe. Pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $g(x)$ (question A.2).

Conclusion. f est strictement décroissante sur $]0, \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

Lecture du tableau : ↗ signifie « strictement croissante », ↘ « strictement décroissante ». La double barre ‖ rappelle que f n'est pas définie en 0 ; $+\infty$ est sa limite en 0^+.

5. 0,75 pts

B.3. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{3\left(1-\alpha^2\right)}{2\alpha}$. En déduire le signe de $f(\alpha)$.

INDICE

Écris $f(\alpha)$ avec le seul dénominateur α, puis utilise $g(\alpha) = 0$ pour remplacer α^3.

CORRIGÉ

Un seul dénominateur. Comme $\alpha > 0$:

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - 3\alpha^2 + 1}{\alpha}.$$

Remplacement de α^3. $g(\alpha) = 0$ donne $2\alpha^3 = 3\alpha^2 + 1$, soit $\alpha^3 = \dfrac{3\alpha^2+1}{2}$. Le numérateur vaut donc :

$$\begin{aligned}&\frac{3\alpha^2+1}{2} - 3\alpha^2 + 1\\ &= \frac{3\alpha^2 + 1 - 6\alpha^2 + 2}{2}\\ &= \frac{3 - 3\alpha^2}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi $f(\alpha) = \dfrac{3-3\alpha^2}{2\alpha} = \dfrac{3\left(1-\alpha^2\right)}{2\alpha}$.

Signe. $\alpha > 1$, donc $1 - \alpha^2 < 0$; et $2\alpha > 0$. Donc $f(\alpha) < 0$.

Conclusion. $f(\alpha) = \dfrac{3\left(1-\alpha^2\right)}{2\alpha}$, et $f(\alpha) < 0$.

6. 0,75 pts

B.4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $]0, +\infty[$.

INDICE

Travaille sur chacun des deux intervalles du tableau de f.

CORRIGÉ

Sur $]0, \alpha]$. f est continue et strictement décroissante, de $+\infty$ (limite en 0^+) à $f(\alpha) < 0$. Elle prend donc la valeur 0 exactement une fois sur cet intervalle.

Sur $[\alpha, +\infty[$. f est continue et strictement croissante, de $f(\alpha) < 0$ vers $+\infty$. Elle prend la valeur 0 exactement une fois sur cet intervalle.

Conclusion. L'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $]0, +\infty[$.

Pour les situer. $f(0{,}5) = 0{,}75 > 0$ et $f(1) = -1 < 0$ placent la première dans $]0{,}5; 1[$;
$f(2) = -1{,}5 < 0$ et $f(3) = \dfrac{1}{3} > 0$ placent la seconde dans $]2, 3[$.

Exercice 4 6,75 pts

Une inflexion à tangente horizontale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 1 pts

Calculer les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$, à gauche et à droite en -1. Interpréter géométriquement les limites en -1.

INDICE

En -1, étudie séparément le numérateur et le signe du dénominateur. En l'infini, mets x^2 en facteur au dénominateur.

CORRIGÉ

En -1. x^3 tend vers $-1 < 0$ et $(x+1)^2$ tend vers 0 en restant strictement positif. Donc :

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty.$$

Interprétation géométrique. La droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

En l'infini. Pour $x \neq 0$ et $x \neq -1$, on met x^2 en facteur dans $(x+1)^2$:

$$f(x) = \frac{x}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2}.$$

Le dénominateur tend vers 1, donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Conclusion. f tend vers $-\infty$ à gauche et à droite en -1, vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$; la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

Barème indicatif : 0,5 pour les limites, 0,25 pour l'interprétation, 0,25 pour la rédaction des limites en l'infini.

2. 1 pts

Vérifier que, pour tout $x \neq -1$, $f(x) = x - 2 + \dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$. En déduire que la droite $(D) : y = x - 2$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

INDICE

Réduis le membre de droite au même dénominateur et développe.

CORRIGÉ

Vérification. Pour tout réel x, $(x-2)(x+1)^2 = (x-2)(x^2+2x+1) = x^3 - 3x - 2$. Donc, pour tout $x \neq -1$:

$$\begin{aligned} & x - 2 + \frac{3x+2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^3 - 3x - 2 + 3x + 2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^3}{(x+1)^2} = f(x). \end{aligned}$$

Asymptote. Pour tout $x \neq -1$, $f(x) - (x-2) = \dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$. Pour $x \neq 0$, ce quotient s'écrit :

$$\frac{1}{x} \times \frac{3 + \frac{2}{x}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2},$$

qui tend vers $0 \times 3 = 0$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Conclusion. Pour tout $x \neq -1$, $f(x) = x - 2 + \dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$, et $(D) : y = x - 2$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

3. 0,75 pts

Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (D).

INDICE

Le dénominateur de la différence est un carré.

CORRIGÉ

Pour tout $x \neq -1$, $f(x) - (x-2) = \dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$ et $(x+1)^2 > 0$: la différence a le signe de $3x+2$.

- Pour $x < -1$ et pour $-1 < x < -\dfrac{2}{3}$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de (D).
- Pour $x > -\dfrac{2}{3}$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D).
- Pour $x = -\dfrac{2}{3}$: elles se coupent au point $\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{8}{3}\right)$.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de (D) sur $]-\infty, -1[$ et sur $\left]-1, -\dfrac{2}{3}\right[$, au-dessus sur $\left]-\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$, et coupe (D) au point $\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{8}{3}\right)$.

4. 1,25 pts

Montrer que, pour tout $x \neq -1$, $f'(x) = \dfrac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$. Étudier son signe et dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Dérive un quotient, puis mets en facteur ce qui est commun au numérateur, avant de simplifier.

CORRIGÉ

Dérivabilité. f est une fonction rationnelle, dérivable sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$.

Dérivée d'un quotient. Posons $u(x) = x^3$ et $v(x) = (x+1)^2$. Alors $u'(x) = 3x^2$ et, par la dérivée d'une composée, $v'(x) = 2(x+1)$. Pour tout $x \neq -1$, le numérateur $u'(x)v(x) - u(x)v'(x)$ vaut :

$$\begin{aligned} &3x^2(x+1)^2 - 2x^3(x+1) \\ &= x^2(x+1)\big(3(x+1) - 2x\big) \\ &= x^2(x+1)(x+3). \end{aligned}$$

On divise par $v(x)^2 = (x+1)^4$, puis on simplifie par $x+1 \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}.$$

Signe. $x^2 \geq 0$, nul seulement en 0. Pour $x \neq 0$, $f'(x)$ a donc le signe de $\dfrac{x+3}{(x+1)^3}$, et $(x+1)^3$ a le signe de $x+1$:

- sur $]-\infty, -3[$: $f'(x) > 0$;
- sur $]-3, -1[$: $f'(x) < 0$;
- sur $]-1, +\infty[$: $f'(x) \geq 0$, nul seulement en 0.

Valeur. $f(-3) = \dfrac{-27}{4} = -\dfrac{27}{4}$.

Conclusion. f est strictement croissante sur $]-\infty, -3]$, strictement décroissante sur $[-3, -1[$ et strictement croissante sur $]-1, +\infty[$ (sa dérivée y est positive et ne s'annule qu'en 0). Elle admet un maximum local $f(-3) = -\dfrac{27}{4}$:

x	$-\infty$		-3		-1		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	↗	$-\dfrac{27}{4}$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Lecture du tableau : ↗ signifie « strictement croissante », ↘ « strictement décroissante ». La double barre ‖ marque la valeur interdite -1 : à gauche de ‖, la limite en -1^- ; à droite, la limite en -1^+.

5. 0,75 pts

Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ à l'origine. La fonction f admet-elle un extremum en 0 ?

INDICE

Lis le tableau : quelle est la monotonie de f autour de 0 ?

CORRIGÉ

Tangente. $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$: la tangente à $\mathcal{C}_f$ à l'origine est l'axe des abscisses, d'équation $y = 0$.

Extremum. $f'(0) = 0$ ne suffit pas. f est strictement croissante sur $]-1, +\infty[$, qui contient 0 : pour $-1 < x < 0 < y$, on a $f(x) < f(0) < f(y)$.

Conclusion. La tangente à l'origine a pour équation $y = 0$, et f n'admet **pas d'extremum** en 0.

6. 1 pts

On admet que, pour tout $x \neq -1$, $f''(x) = \dfrac{6x}{(x+1)^4}$. Étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$ et montrer que l'origine est un point d'inflexion.

INDICE

Le dénominateur est une puissance paire : quel facteur décide du signe ?

CORRIGÉ

Pour tout $x \neq -1$, $(x+1)^4 > 0$: $f''(x)$ a le signe de x.

- $f''(x) < 0$ sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, 0[$: $\mathcal{C}_f$ est concave sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, 0]$.
- $f''(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$: $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $[0, +\infty[$.

Point d'inflexion. f'' s'annule en 0 en changeant de signe, et $f(0) = 0$. La courbe y traverse sa tangente horizontale $y = 0$.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est concave sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, 0]$, convexe sur $[0, +\infty[$, et l'origine O est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

7. 1 pts

Construire $\mathcal{C}_f$ et (D) dans le repère.

INDICE

Les droites d'abord, puis les points où la tangente est connue.

CORRIGÉ

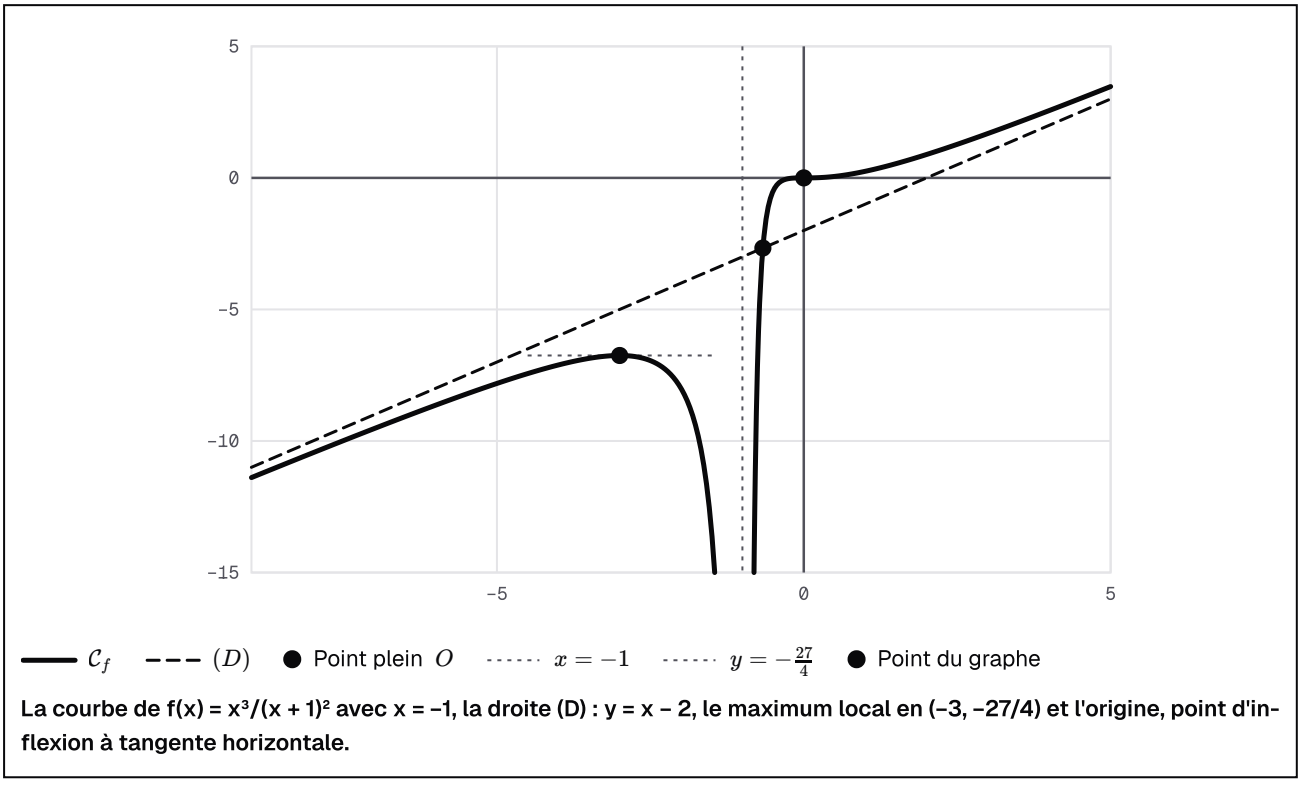
1. Asymptotes et tangentes. L'asymptote verticale $x = -1$, l'asymptote oblique $(D) : y = x - 2$, la tangente horizontale $y = 0$ à l'origine, et la tangente horizontale au point $\left(-3, -\frac{27}{4}\right)$.

2. Points remarquables. Le maximum local $\left(-3, -\frac{27}{4}\right)$, avec $-\frac{27}{4} = -6{,}75$; l'origine, point d'inflexion ; le point d'intersection $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{8}{3}\right)$ avec (D).

3. La courbe.

- Sur $]-\infty, -1[$: elle monte sous (D) jusqu'au maximum, puis redescend vers $-\infty$ le long de la droite $x = -1$.
- Sur $]-1, +\infty[$: elle remonte de $-\infty$, coupe (D), passe à plat par O en traversant l'axe des abscisses, puis se rapproche de (D) par au-dessus.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ se construit à partir de ses deux asymptotes, de ses deux tangentes horizontales, puis de ses points remarquables.



La courbe de f(x) = x³/(x + 1)² avec x = –1, la droite (D) : y = x – 2, le maximum local en (–3, –27/4) et l'origine, point d'inflexion à tangente horizontale.

Exercice 5 6 pts

Une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-2, 2[$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter géométriquement.

INDICE

Factorise x^2 sous la racine. Attention : $\sqrt{x^2} = |x|$.

CORRIGÉ

Écriture. Pour tout $x \neq 0$, $\sqrt{x^2+4} = |x|\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}$.

- Pour $x > 0$, $|x| = x$ et $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.
- Pour $x < 0$, $|x| = -x$ et $f(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$.

Conclusion. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$: la droite $y = 2$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$, et la droite $y = -2$ au voisinage de $-\infty$.

2. 1 pts

Montrer que, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{8}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}.$$

En déduire le sens de variation de f.

INDICE

C'est un quotient dont le dénominateur est une racine composée : vérifie les hypothèses, puis réduis au même dénominateur.

CORRIGÉ

Hypothèses. Pour tout réel x, $x^2+4>0$. Par la dérivée d'une racine composée, $v : x \mapsto \sqrt{x^2+4}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $v'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$, et v ne s'annule pas. Avec $u : x \mapsto 2x$, le quotient $f = \dfrac{u}{v}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Dérivée d'un quotient. Pour tout réel x, le numérateur $u'(x)v(x) - u(x)v'(x)$ vaut :

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{x^2+4} - \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+4}} \\ &= \frac{2(x^2+4) - 2x^2}{\sqrt{x^2+4}} \\ &= \frac{8}{\sqrt{x^2+4}}. \end{aligned}$$

On divise par $v(x)^2 = x^2+4$:

$$f'(x) = \frac{8}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}.$$

Variations. Pour tout réel x, $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{8}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$, et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. 0,75 pts

Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]-2, 2[$.

INDICE

Continuité, stricte monotonie, puis les limites de la question 1.

CORRIGÉ

f est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle ouvert dont les bornes sont ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$, soit -2 et 2 (question 1) :

$$f(\mathbb{R}) = \,]-2, 2[\,.$$

Conclusion. f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-2, 2[$.

4. 1 pts

Calculer $f\left(2\sqrt{3}\right)$. Montrer que f^{-1} est dérivable en $\sqrt{3}$ et calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt{3}\right)$.

INDICE

Repère l'antécédent de $\sqrt{3}$, puis vérifie la condition sur la dérivée avant d'appliquer la formule.

CORRIGÉ

Antécédent. $\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 4 = 16$ et $\sqrt{16} = 4$, donc :

$$f\left(2\sqrt{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}.$$

Ainsi $f^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}$.

Hypothèse. $f'\left(2\sqrt{3}\right) = \dfrac{8}{16 \times 4} = \dfrac{1}{8}$, donc $f'\left(2\sqrt{3}\right) \neq 0$.

Dérivabilité de f^{-1}. f est continue, strictement croissante, dérivable en $2\sqrt{3}$ avec $f'\left(2\sqrt{3}\right) \neq 0$. Donc f^{-1} est dérivable en $\sqrt{3}$, avec $\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{1}{f'\left(2\sqrt{3}\right)}$, soit :

$$\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt{3}\right) = 8.$$

On calcule f' en l'antécédent $2\sqrt{3}$, jamais en $\sqrt{3}$.

Conclusion. $f\left(2\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}$; f^{-1} est dérivable en $\sqrt{3}$ et $\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt{3}\right) = 8$.

5. 1 pts

On admet que, pour tout réel x, $f''(x) = \dfrac{-24x}{(x^2+4)^2\sqrt{x^2+4}}$. Étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$ et préciser son point d'inflexion.

INDICE

Le dénominateur est strictement positif : seul le numérateur décide du signe.

CORRIGÉ

Pour tout réel x, le dénominateur est strictement positif : $f''(x)$ a le signe de $-24x$.

- $f''(x) > 0$ sur $]-\infty, 0[$: $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $]-\infty, 0]$.
- $f''(x) < 0$ sur $]0, +\infty[$: $\mathcal{C}_f$ est concave sur $[0, +\infty[$.

Point d'inflexion. f'' s'annule en 0 en changeant de signe, et $f(0) = 0$.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $]-\infty, 0]$, concave sur $[0, +\infty[$, et l'origine O est son point d'inflexion.

6. 0,75 pts

Vérifier que la droite $(\Delta) : y = x$ est la tangente à $\mathcal{C}_f$ à l'origine, puis étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (Δ).

INDICE

Pour la position, factorise $f(x) - x$ par x et compare $\sqrt{x^2+4}$ à 2.

CORRIGÉ

Tangente. $f(0) = 0$ et $f'(0) = \dfrac{8}{4 \times 2} = 1$: la tangente à l'origine a pour équation $y = 1 \times (x - 0) + 0$, soit $y = x$. C'est (Δ).

Position. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & f(x) - x \\ & = x\left(\frac{2}{\sqrt{x^2+4}} - 1\right). \end{aligned}$$

Pour $x \neq 0$, $x^2 + 4 > 4$, donc $\sqrt{x^2+4} > 2$ et la parenthèse est strictement négative. Ainsi :

- pour $x < 0$, $f(x) - x > 0$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (Δ) ;
- pour $x > 0$, $f(x) - x < 0$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de (Δ).

Conclusion. $(\Delta) : y = x$ est la tangente à $\mathcal{C}_f$ à l'origine. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (Δ) sur $]-\infty, 0[$ et au-dessous sur $]0, +\infty[$: elle traverse (Δ) en O, ce qui confirme le point d'inflexion.

7. 0,75 pts

Construire $\mathcal{C}_f$ dans le repère.

INDICE

Trace d'abord les deux asymptotes et la droite (Δ).

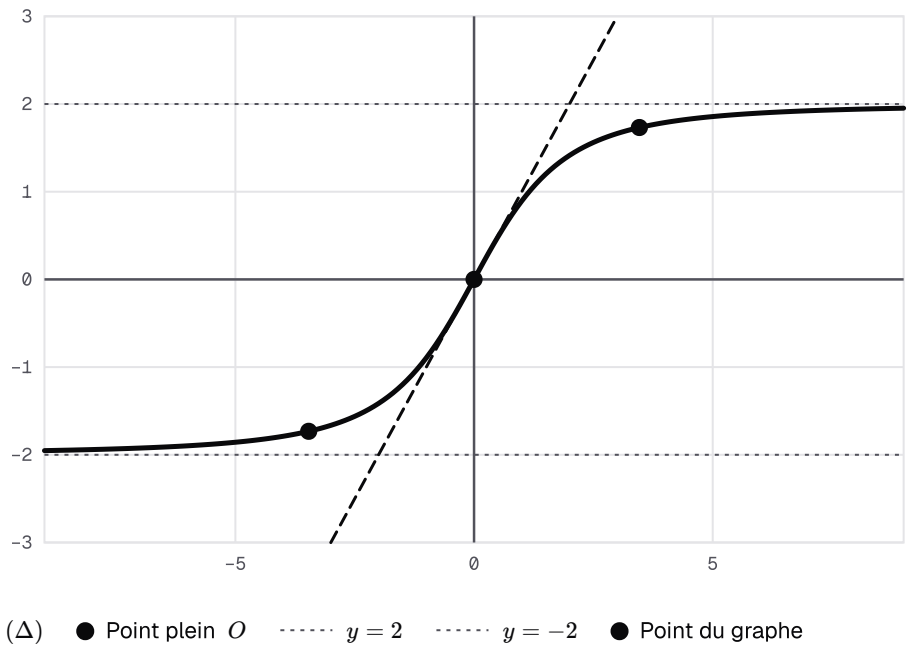
CORRIGÉ

1. Asymptotes et tangentes. Les asymptotes horizontales $y = -2$ (en $-\infty$) et $y = 2$ (en $+\infty$), et la tangente (Δ) : $y = x$ au point d'inflexion O.

2. Points remarquables. L'origine, et le point $\left(2\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$, environ $(3{,}46; 1{,}73)$, avec son symétrique $\left(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right)$: en effet, pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$.

3. La courbe. Elle monte de la droite $y = -2$ vers la droite $y = 2$ en restant strictement entre elles. Elle est au-dessus de (Δ) à gauche de O et au-dessous à droite.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ se construit entre ses deux asymptotes horizontales, symétrique par rapport à l'origine, en traversant (Δ) en O.



La courbe de f(x) = 2x/√(x² + 4), entre ses asymptotes y = −2 et y = 2, avec sa tangente (Δ) : y = x au point d'inflexion O.