BURHAN

Dérivation et étude de fonctions : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/derivation-etude-fonctions/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivation et étude de fonctions	Entraînement	7

Exercice 1

Choisir a et b pour raccorder sans angle

Soit a et b deux réels, et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = ax^2 + bx$ si $x \leq 1$;
- $f(x) = 4\sqrt{x}$ si $x > 1$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer $f(1)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$. Montrer que f est continue en 1 si et seulement si $a + b = 4$.

INDICE

À gauche de 1 et en 1, utilise la première expression ; à droite, la seconde. Chacune est continue.

2.

On suppose $a + b = 4$. Montrer que, pour tout $x < 1$:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = a(x + 1) + b.$$

En déduire que f est dérivable à gauche en 1, avec $f'_g(1) = 2a + b$.

INDICE

Regroupe $f(x) - f(1)$ en $a(x^2 - 1) + b(x - 1)$, puis factorise par $x - 1$.

3.

Toujours avec $a + b = 4$, montrer que f est dérivable à droite en 1 et que $f'_d(1) = 2$.

INDICE

Pour $x > 1$, écris $x - 1 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$ dans le taux d'accroissement.

4.

Déterminer a et b pour que f soit dérivable en 1. Donner alors une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

INDICE

Dérivable en 1 exige la continuité en 1 et l'égalité des deux nombres dérivés latéraux : écris les deux équations.

5.

Dans cette question, $a = -1$ et $b = 5$. La fonction f est-elle continue en 1 ? Dérivable en 1 ? Interpréter géométriquement.

INDICE

Utilise les résultats des questions 1 à 3 avec ces valeurs : calcule $a + b$, puis les deux nombres dérivés latéraux.

Exercice 2

Un produit avec une racine carrée

Soit g la fonction définie sur $[-2, 2]$ par $g(x) = x\sqrt{4 - x^2}$. On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe.

1.

Montrer que g est dérivable sur $]-2, 2[$ et que, pour tout $x \in]-2, 2[$:

$$g'(x) = \frac{2(2 - x^2)}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

INDICE

g est un produit dont un facteur est une racine composée : sur quel intervalle l'expression sous la racine est-elle strictement positive ?

2.

Étudier la dérivabilité de g à gauche en 2. Interpréter géométriquement le résultat.

INDICE

La formule de la question 1 n'est pas valable en 2 : reviens au taux d'accroissement, en écrivant $4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$.

3.

Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]-2, 2[$ et dresser le tableau de variations de g sur $[-2, 2]$.

INDICE

Le dénominateur de $g'(x)$ est positif : étudie le signe du trinôme $2 - x^2$.

4.

Déterminer le maximum et le minimum de g sur $[-2, 2]$. En déduire que, pour tout $x \in [-2, 2]$:

$$-2 \leq x\sqrt{4 - x^2} \leq 2.$$

INDICE

Compare les valeurs de g aux points où g' s'annule avec ses valeurs aux bornes.

Exercice 3

Une réciproque et sa tangente verticale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = 3(x+1)^2$. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. A-t-elle un extremum en -1 ?

INDICE

Factorise $f'(x)$ par 3 : tu reconnais une identité remarquable. Ensuite, f' change-t-elle de signe en -1 ?

2.

Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Pour les limites, factorise $f(x)$ par x^3. Une fonction continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$ réalise une bijection sur quel intervalle ?

3.

Calculer $f(1)$. Montrer que f^{-1} est dérivable en 7 et calculer $\left(f^{-1}\right)'(7)$.

INDICE

La valeur $f(1)$ donne l'antécédent de 7. Vérifie que $f'(1) \neq 0$ avant d'appliquer la formule.

4.

Calculer $f(-1)$ et $f'(-1)$. La fonction f^{-1} est-elle dérivable en -1 ? Interpréter géométriquement.

INDICE

Suppose f^{-1} dérivable en -1 et dérive l'égalité $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ en $y = -1$: est-ce compatible avec $f'(-1) = 0$?

5.

Vérification, pour comprendre. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = (x+1)^3 - 1$. En déduire que, pour tout $y \geq -1$, $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y+1} - 1$. Dériver cette expression sur $]-1, +\infty[$ et retrouver $\left(f^{-1}\right)'(7)$.

INDICE

Développe $(x+1)^3$. Pour l'expression de f^{-1}, pose $x = f^{-1}(y)$ et regarde le signe de $(x+1)^3$. Pour dériver, pense à la racine cubique d'une fonction strictement positive.

Exercice 4

Des tangentes parallèles à une droite donnée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$, et (Δ) la droite d'équation $y = 7x$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f.

1.

Montrer que, pour tout $x \neq -2$, $f'(x) = \dfrac{7}{(x+2)^2}$.

INDICE

Applique la dérivée d'un quotient : le numérateur se simplifie beaucoup.

2.

Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à (Δ). Donner une équation de chacune de ces tangentes.

INDICE

Deux droites sont parallèles lorsqu'elles ont le même coefficient directeur : résous $f'(a) = 7$.

3.

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle une tangente horizontale ? Préciser le sens de variation de f. Un élève remarque que $f(-3) = 10 > f(-1) = -4$ et conclut que f n'est pas croissante : que lui répondre ?

INDICE

Une tangente horizontale correspond à $f'(a) = 0$. Le lien entre signe de f' et variations vaut sur **un intervalle** : -3 et -1 sont-ils dans le même ?

4.

Bonus. Écrire l'approximation affine de $f(h)$ pour h proche de 0. En déduire une valeur approchée de $f(0{,}02)$, et la comparer à la valeur exacte.

INDICE

Utilise $f(0+h) \approx f(0) + f'(0)\,h$: calcule d'abord $f(0)$ et $f'(0)$.

Exercice 5

La courbe traverse sa tangente

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = 3(x+3)(x-1)$. Dresser le tableau de variations de f, avec les limites en $-\infty$ et en $+\infty$, et préciser ses extremums locaux.

INDICE

Factorise $f'(x)$ par 3, puis cherche les racines du trinôme obtenu.

2.

Calculer $f''(x)$. Étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$ et montrer qu'elle admet un point d'inflexion I dont on donnera les coordonnées.

INDICE

f'' est la dérivée de f' : où s'annule-t-elle, et change-t-elle de signe ?

3.

Donner une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point I.

INDICE

Utilise $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ et la forme factorisée de $f'(x)$.

4.

Montrer que, pour tout réel x, $f(x) - (-12x + 1) = (x+1)^3$. En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (T).

INDICE

Simplifie la différence, puis compare-la au développement de $(x+1)^3$. Un cube a le signe du nombre élevé au cube.

Exercice 6

Une racine carrée et deux asymptotes obliques

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1.

Vérifier que, pour tout réel x, $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

INDICE

La forme $(x+1)^2 + 2$ montre que l'expression sous la racine est strictement positive. Le signe de $f'(x)$ se lit ensuite sur son numérateur.

2.

Montrer que, pour tout réel x, $f(x) > |x+1|$. En déduire que, pour tout réel x, $f(x) + x + 1 > 0$ et $f(x) - x - 1 > 0$.

INDICE

Compare les carrés $f(x)^2$ et $|x+1|^2$: deux nombres positifs sont rangés comme leurs carrés. Pour la suite, compare $|x+1|$ à $x+1$ et à $-(x+1)$.

3.

Montrer que, pour tout réel x, $f(x) - (x+1) = \dfrac{2}{f(x) + x + 1}$. En déduire que la droite $(D) : y = x + 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

INDICE

Multiplie et divise $f(x) - (x+1)$ par $f(x) + x + 1$, qui n'est pas nul d'après la question 2.

4.

Montrer de même que la droite $(D') : y = -x - 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

INDICE

Ici la différence est $f(x) + x + 1$: multiplie et divise par $f(x) - x - 1$, puis regarde le comportement de $-x - 1$ en $-\infty$.

5.

Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D) et par rapport à (D').

INDICE

Les deux différences sont déjà écrites sous forme de quotients : quel est le signe de leurs dénominateurs ?

Exercice 7

Une étude complète, pas à pas

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x^2}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé. On suit le plan d'étude d'une fonction.

1.

Calculer $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Interpréter géométriquement.

INDICE

Étudie chaque terme séparément quand x tend vers 0 : quel est le signe de x^2 ?

2.

Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Montrer que la droite $(D) : y = \dfrac{x}{2}$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$, puis étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D).

INDICE

Calcule $f(x) - \dfrac{x}{2}$: il ne reste qu'un terme, dont tu connais la limite et le signe.

3.

Montrer que, pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{x^3 - 8}{2x^3}$. Vérifier que $x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$, puis dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Dérive terme à terme. Pour le signe, étudie le discriminant de $x^2 + 2x + 4$, puis les signes de $x - 2$ et de x^3.

4.

Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2. Montrer que $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un seul point, d'abscisse β comprise entre -2 et -1.

INDICE

Sur $]0, +\infty[$, lis la plus petite valeur de f. Sur $]-\infty, 0[$, utilise la stricte monotonie et calcule $f(-2)$ et $f(-1)$.

5.

Décrire la construction de $\mathcal{C}_f$, en suivant l'ordre : asymptotes et tangentes, puis points remarquables, puis la courbe.

INDICE

Reprends les questions 1 à 4 : asymptotes, tangente horizontale, point sur l'axe des abscisses.