BURHAN

Dérivation et étude de fonctions : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/derivation-etude-fonctions/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivation et étude de fonctions	Entraînement	7

Exercice 1

Choisir a et b pour raccorder sans angle

Soit a et b deux réels, et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = ax^2 + bx$ si $x \leq 1$;
- $f(x) = 4\sqrt{x}$ si $x > 1$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer $f(1)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$. Montrer que f est continue en 1 si et seulement si $a + b = 4$.

INDICE

À gauche de 1 et en 1, utilise la première expression ; à droite, la seconde. Chacune est continue.

CORRIGÉ

Valeur en 1. Comme $1 \leq 1$, $f(1) = a + b$.

Limite à gauche. Pour $x < 1$, $f(x) = ax^2 + bx$, expression polynôme, continue en 1 : $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = a + b$.

Limite à droite. Pour $x > 1$, $f(x) = 4\sqrt{x}$, et $x \mapsto 4\sqrt{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4\sqrt{1} = 4$.

Continuité en 1. La limite à gauche vaut toujours $f(1)$. Donc f est continue en 1 si et seulement si sa limite à droite vaut aussi $f(1)$, c'est-à-dire $a + b = 4$.

Conclusion. $f(1) = a + b$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = a + b$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4$; f est continue en 1 si et seulement si $a + b = 4$.

2.

On suppose $a+b=4$. Montrer que, pour tout $x<1$:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=a(x+1)+b.$$

En déduire que f est dérivable à gauche en 1, avec $f'_g(1)=2a+b$.

INDICE

Regroupe $f(x)-f(1)$ en $a(x^2-1)+b(x-1)$, puis factorise par $x-1$.

CORRIGÉ

Factorisation. Soit $x<1$. Avec $f(1)=a+b$:

$$\begin{aligned} &f(x)-f(1)\\ &=ax^2+bx-a-b\\ &=a(x^2-1)+b(x-1)\\ &=(x-1)\big(a(x+1)+b\big). \end{aligned}$$

Le taux. Comme $x-1\neq 0$, on peut diviser par $x-1$:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=a(x+1)+b.$$

Limite à gauche. Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, $a(x+1)+b$ tend vers $2a+b$, qui est un nombre réel.

Conclusion. Pour tout $x<1$, le taux vaut $a(x+1)+b$; f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1)=2a+b$.

3.

Toujours avec $a+b=4$, montrer que f est dérivable à droite en 1 et que $f'_d(1)=2$.

INDICE

Pour $x>1$, écris $x-1=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$ dans le taux d'accroissement.

CORRIGÉ

Le taux. Soit $x>1$. On a $f(1)=a+b=4$. Comme $x-1=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$ et $\sqrt{x}-1\neq 0$, on simplifie par $\sqrt{x}-1$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\frac{4(\sqrt{x}-1)}{x-1}\\ &=\frac{4}{\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

Limite à droite. Quand x tend vers 1 par valeurs supérieures, $\sqrt{x}+1$ tend vers 2 : le taux tend vers $\frac{4}{2}=2$, qui est un nombre réel.

Conclusion. f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1)=2$.

4.

Déterminer a et b pour que f soit dérivable en 1. Donner alors une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

INDICE

Dérivable en 1 exige la continuité en 1 et l'égalité des deux nombres dérivés latéraux : écris les deux équations.

CORRIGÉ

Les deux conditions. Si f est dérivable en 1, elle est continue en 1, donc $a+b=4$ (question 1). Il faut de plus $f'_g(1)=f'_d(1)$, soit $2a+b=2$ (questions 2 et 3). Réciproquement, si ces deux égalités sont vraies, les deux nombres dérivés latéraux existent et sont égaux : f est dérivable en 1.

Le système.

$$\begin{aligned} a+b&=4\\ 2a+b&=2 \end{aligned}$$

En retranchant la première équation de la seconde, $a=-2$; puis $b=4-a=6$.

Tangente. Avec $a=-2$ et $b=6$, $f'(1)=2$ et $f(1)=4$. La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation :

$$\begin{aligned} y&=2(x-1)+4\\ &=2x+2. \end{aligned}$$

Conclusion. f est dérivable en 1 pour $a=-2$ et $b=6$; la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 a alors pour équation $y=2x+2$.

5.

Dans cette question, $a = -1$ et $b = 5$. La fonction f est-elle continue en 1 ? Dérivable en 1 ? Interpréter géométriquement.

INDICE

Utilise les résultats des questions 1 à 3 avec ces valeurs : calcule $a + b$, puis les deux nombres dérivés latéraux.

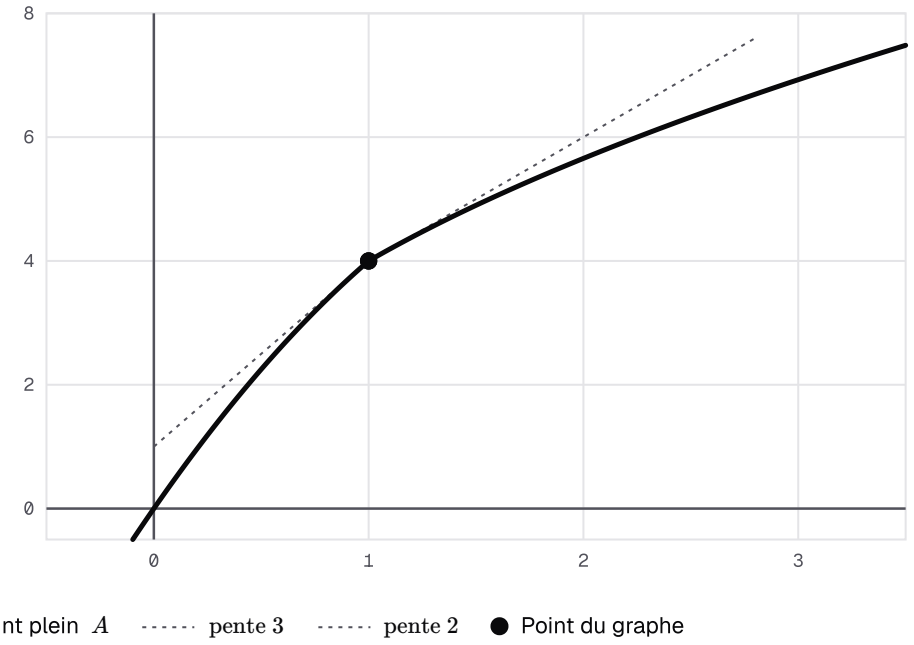
CORRIGÉ

Continuité. $a + b = -1 + 5 = 4$: d'après la question 1, f est continue en 1.

Dérivabilité. Comme $a + b = 4$, les questions 2 et 3 s'appliquent : $f'_g(1) = 2 \times (-1) + 5 = 3$ et $f'_d(1) = 2$. Les deux nombres dérivés latéraux existent mais sont différents : f n'est **pas** dérivable en 1 .

Interprétation géométrique. $f(1) = 4$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet au point $A(1, 4)$ deux demi-tangentes : à gauche, de coefficient directeur 3 ; à droite, de coefficient directeur 2. Le point A est un **point anguleux**.

Conclusion. Pour $a = -1$ et $b = 5$, f est continue en 1 mais n'y est pas dérivable, et $A(1, 4)$ est un point anguleux de $\mathcal{C}_f$.



Avec a = –1 et b = 5, la courbe est d'un seul tenant en A(1, 4) mais y fait un angle : demi-tangente de pente 3 à gauche, de pente 2 à droite.

Exercice 2

Un produit avec une racine carrée

Soit g la fonction définie sur $[-2,2]$ par $g(x)=x\sqrt{4-x^2}$. On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe.

1.

Montrer que g est dérivable sur $]-2,2[$ et que, pour tout $x\in]-2,2[$:

$$g'(x)=\frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}.$$

INDICE

g est un produit dont un facteur est une racine composée : sur quel intervalle l'expression sous la racine est-elle strictement positive ?

CORRIGÉ

Hypothèses. Posons $u(x)=4-x^2$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $u'(x)=-2x$, et $u(x)>0$ pour $-2<x<2$. Donc $\sqrt{u}$ est dérivable sur $]-2,2[$ et, pour tout $x\in]-2,2[$:

$$\left(\sqrt{u}\right)'(x)=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Dérivée d'un produit. g est le produit de $x\mapsto x$ et de $\sqrt{u}$, toutes deux dérivables sur $]-2,2[$. Donc g est dérivable sur $]-2,2[$ et, pour tout $x\in]-2,2[$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}. \end{aligned}$$

Conclusion. g est dérivable sur $]-2,2[$ et, pour tout $x\in]-2,2[$, $g'(x)=\dfrac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$.

2.

Étudier la dérivabilité de g à gauche en 2. Interpréter géométriquement le résultat.

INDICE

La formule de la question 1 n'est pas valable en 2 : reviens au taux d'accroissement, en écrivant $4 - x^2 = (2-x)(2+x)$.

CORRIGÉ

Taux d'accroissement. $g(2) = 0$. Soit $x \in]-2, 2[$. Alors $2 - x > 0$ et $2 + x > 0$, donc $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{2-x}\,\sqrt{2+x}$ et $x - 2 = -\left(\sqrt{2-x}\right)^2$. Ainsi :

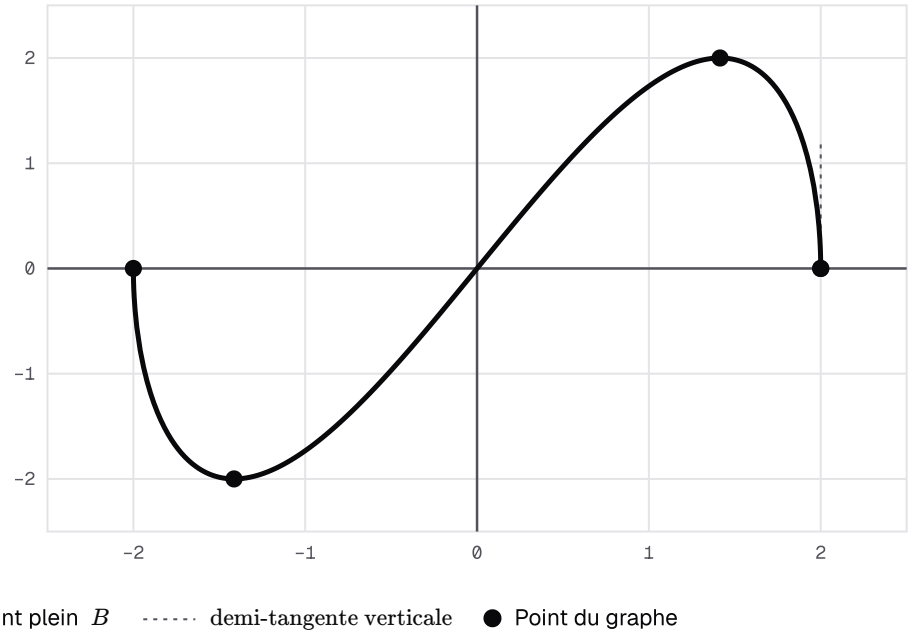
$$\begin{aligned}\frac{g(x) - g(2)}{x-2} &= \frac{x\sqrt{2-x}\,\sqrt{2+x}}{-\left(\sqrt{2-x}\right)^2} \\ &= -\frac{x\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}}.\end{aligned}$$

Limite. Quand x tend vers 2 par valeurs inférieures, $x\sqrt{2+x}$ tend vers $2 \times 2 = 4$, et $\sqrt{2-x}$ tend vers 0 en restant strictement positif. Donc le taux tend vers $-\infty$.

Dérivabilité. Cette limite n'est pas réelle : g n'est pas dérivable à gauche en 2.

Interprétation géométrique. $\mathcal{C}_g$ admet au point $B(2, 0)$ une demi-tangente verticale. Pour $0 < x < 2$, $g(x) > 0$: elle est dirigée vers le haut.

Conclusion. g n'est pas dérivable à gauche en 2, et $\mathcal{C}_g$ admet en $B(2, 0)$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.



La courbe de g(x) = x√(4 − x²) sur [−2, 2] : maximum 2 en √2, minimum −2 en −√2, et demi-tangente verticale au point B(2, 0).

3.

Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]-2,2[$ et dresser le tableau de variations de g sur $[-2,2]$.

INDICE

Le dénominateur de $g'(x)$ est positif : étudie le signe du trinôme $2-x^2$.

CORRIGÉ

Signe de $g'(x)$. Pour tout $x \in]-2,2[$, $\sqrt{4-x^2} > 0$: $g'(x)$ a le signe de $2-x^2$. Ce trinôme a pour racines $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$, et il est positif entre elles :

- $g'(x) < 0$ sur $]-2,-\sqrt{2}[$ et sur $]\sqrt{2},2[$;
- $g'(x) > 0$ sur $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$.

Variations. g est continue sur $[-2,2]$ et dérivable sur $]-2,2[$. Elle est donc strictement décroissante sur $[-2,-\sqrt{2}]$, strictement croissante sur $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$, et strictement décroissante sur $[\sqrt{2},2]$.

Valeurs. $g(-2) = g(2) = 0$, $g\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ et $g\left(-\sqrt{2}\right) = -2$.

Conclusion. D'où le tableau de variations de g sur $[-2,2]$:

x	-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de g	0	↘	-2	↗	2	↘	0

Lecture du tableau : ↗ signifie « strictement croissante », ↘ « strictement décroissante ».

4.

Déterminer le maximum et le minimum de g sur $[-2, 2]$. En déduire que, pour tout $x \in [-2, 2]$:

$$-2 \leq x\sqrt{4 - x^2} \leq 2.$$

INDICE

Compare les valeurs de g aux points où g' s'annule avec ses valeurs aux bornes.

CORRIGÉ

Extremums locaux à l'intérieur. En $\sqrt{2}$, g' s'annule en passant du signe $+$ au signe $-$: g admet un maximum local $g\left(\sqrt{2}\right) = 2$. En $-\sqrt{2}$, g' passe du signe $-$ au signe $+$: g admet un minimum local $g\left(-\sqrt{2}\right) = -2$.

Comparaison avec les bornes. D'après le tableau, les seules autres valeurs à comparer sont $g(-2) = g(2) = 0$, et $-2 < 0 < 2$. Donc :

- le **maximum** de g sur $[-2, 2]$ est 2, atteint en $\sqrt{2}$;
- le **minimum** de g sur $[-2, 2]$ est -2, atteint en $-\sqrt{2}$.

Remarque. Aux bornes, g n'a que des extremums locaux : $g(-2) = 0$ est un maximum local, car g décroît juste après -2 ; $g(2) = 0$ est un minimum local, car g décroît juste avant 2.

Conclusion. Le maximum de g sur $[-2, 2]$ est 2 et son minimum est -2. Donc, pour tout $x \in [-2, 2]$, $-2 \leq g(x) \leq 2$, c'est-à-dire $-2 \leq x\sqrt{4 - x^2} \leq 2$.

Exercice 3

Une réciproque et sa tangente verticale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = 3(x+1)^2$. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. A-t-elle un extremum en -1 ?

INDICE

Factorise $f'(x)$ par 3 : tu reconnais une identité remarquable. Ensuite, f' change-t-elle de signe en -1 ?

CORRIGÉ

Dérivée. f est une fonction polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6x + 3 \\ &= 3(x^2 + 2x + 1) \\ &= 3(x+1)^2. \end{aligned}$$

Monotonie. Pour tout réel x, $f'(x) \geq 0$, et f' ne s'annule qu'en -1. Une fonction dont la dérivée est positive sur un intervalle et ne s'y annule qu'en un nombre fini de points est strictement croissante sur cet intervalle : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

En -1. $f'(-1) = 0$, mais cela ne suffit pas pour un extremum. Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, pour $x < -1 < y$, on a $f(x) < f(-1) < f(y)$: $f(-1)$ n'est ni un maximum local ni un minimum local.

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = 3(x+1)^2$; f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et n'a pas d'extremum en -1.

2.

Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Pour les limites, factorise $f(x)$ par x^3. Une fonction continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$ réalise une bijection sur quel intervalle ?

CORRIGÉ

Limites. Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = x^3\left(1 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right)$. La parenthèse tend vers 1 en $-\infty$ et en $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Bijection. f est continue (fonction polynôme) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur :

$$f(\mathbb{R}) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}.$$

Conclusion. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

3.

Calculer $f(1)$. Montrer que f^{-1} est dérivable en 7 et calculer $\left(f^{-1}\right)'(7)$.

INDICE

La valeur $f(1)$ donne l'antécédent de 7. Vérifie que $f'(1) \neq 0$ avant d'appliquer la formule.

CORRIGÉ

Antécédent. $f(1) = 1 + 3 + 3 = 7$, donc $f^{-1}(7) = 1$.

Hypothèse. $f'(1) = 3 \times 2^2 = 12$, donc $f'(1) \neq 0$.

Dérivabilité de f^{-1}. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, dérivable en 1 avec $f'(1) \neq 0$. Donc f^{-1} est dérivable en $f(1) = 7$ et :

$$\left(f^{-1}\right)'(7) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{12}.$$

Conclusion. $f(1) = 7$; f^{-1} est dérivable en 7 et $\left(f^{-1}\right)'(7) = \dfrac{1}{12}$.

4.

Calculer $f(-1)$ et $f'(-1)$. La fonction f^{-1} est-elle dérivable en -1 ? Interpréter géométriquement.

INDICE

Suppose f^{-1} dérivable en -1 et dérive l'égalité $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ en $y = -1$: est-ce compatible avec $f'(-1) = 0$?

CORRIGÉ

Valeurs. $f(-1) = -1 + 3 - 3 = -1$, donc $f^{-1}(-1) = -1$. Et $f'(-1) = 3 \times 0^2 = 0$.

Raisonnement par l'absurde. Supposons f^{-1} dérivable en -1. Pour tout réel y, $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$. En dérivant cette composée en $y = -1$, avec $f^{-1}(-1) = -1$:

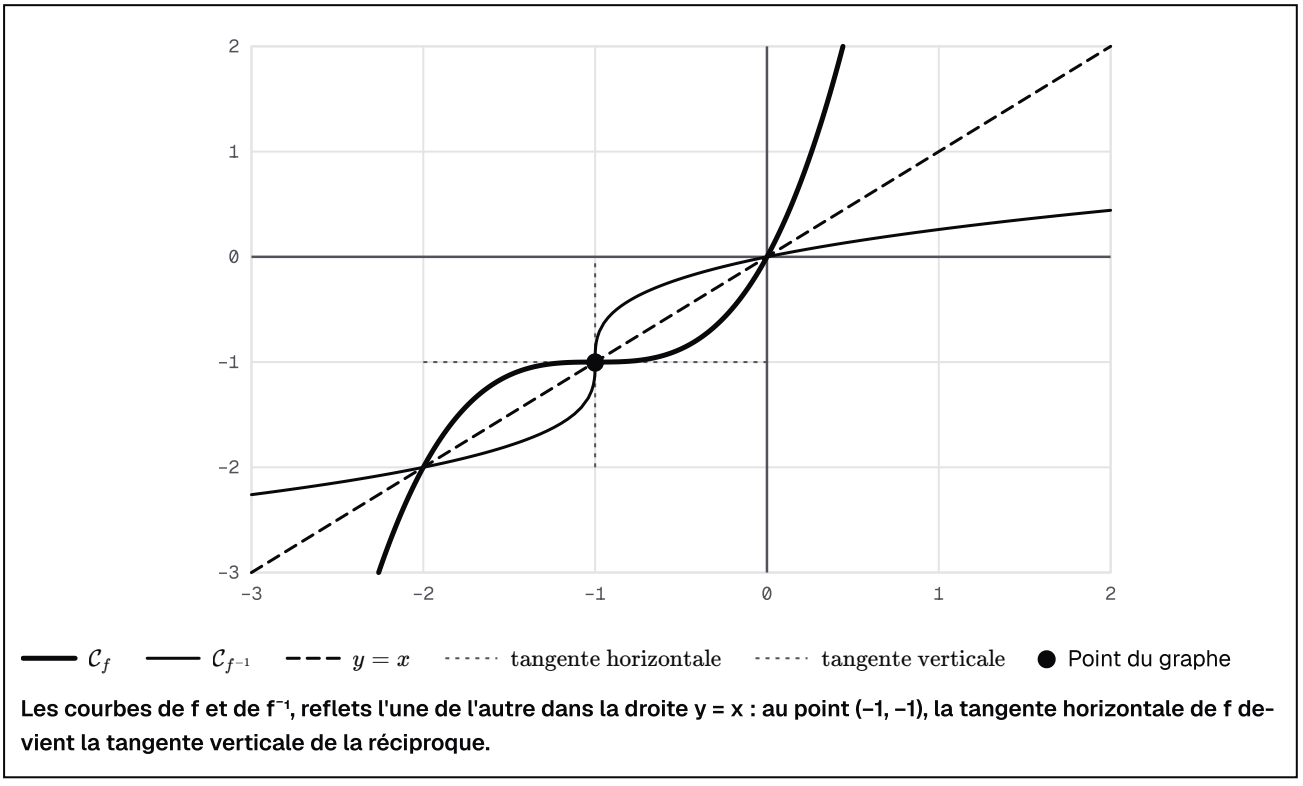
$$f'(-1) \times \left(f^{-1}\right)'(-1) = 1.$$

Or $f'(-1) = 0$, donc le membre de gauche vaut 0 : c'est impossible. Ainsi f^{-1} **n'est pas dérivable** en -1.

On retrouve la propriété du cours sur une dérivée nulle et la réciproque : f est continue, strictement croissante, dérivable en -1 avec $f'(-1) = 0$.

Interprétation géométrique. La courbe de f^{-1} admet au point $(-1, -1)$ une **tangente verticale**. C'est la symétrique, par rapport à la droite d'équation $y = x$, de la tangente horizontale de $\mathcal{C}_f$ en ce point.

Conclusion. $f(-1) = -1$ et $f'(-1) = 0$; f^{-1} n'est pas dérivable en -1, et sa courbe y admet une tangente verticale.



Les courbes de f et de f⁻¹, reflets l'une de l'autre dans la droite y = x : au point (–1, –1), la tangente horizontale de f devient la tangente verticale de la réciproque.

5.

Vérification, pour comprendre. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = (x+1)^3 - 1$. En déduire que, pour tout $y \geq -1$, $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y+1} - 1$. Dériver cette expression sur $]-1, +\infty[$ et retrouver $\left(f^{-1}\right)'(7)$.

INDICE

Développe $(x+1)^3$. Pour l'expression de f^{-1}, pose $x = f^{-1}(y)$ et regarde le signe de $(x+1)^3$. Pour dériver, pense à la racine cubique d'une fonction strictement positive.

CORRIGÉ

Identité. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(x+1)^3 - 1\\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1\\ &= f(x).\end{aligned}$$

Expression de f^{-1}. Soit $y \geq -1$ et $x = f^{-1}(y)$. Alors $f(x) = y$, soit $(x+1)^3 = y + 1 \geq 0$. Un cube positif ou nul est celui d'un nombre positif ou nul : $x + 1 \geq 0$. Donc $x + 1 = \sqrt[3]{y+1}$, c'est-à-dire $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y+1} - 1$.

Dérivée. Posons $u(y) = y + 1$: sur $]-1, +\infty[$, u est dérivable, $u(y) > 0$ et $u'(y) = 1$. Donc, pour tout $y > -1$:

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(y+1)^2}}.$$

Valeur en 7. $(7+1)^2 = 64$ et $\sqrt[3]{64} = 4$, donc $\left(f^{-1}\right)'(7) = \dfrac{1}{3 \times 4} = \dfrac{1}{12}$.

Conclusion. Pour tout $y \geq -1$, $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y+1} - 1$, et la dérivée de cette expression redonne $\left(f^{-1}\right)'(7) = \dfrac{1}{12}$, comme à la question 3.

Exercice 4

Des tangentes parallèles à une droite donnée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$, et (Δ) la droite d'équation $y = 7x$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f.

1.

Montrer que, pour tout $x \neq -2$, $f'(x) = \dfrac{7}{(x+2)^2}$.

INDICE

Applique la dérivée d'un quotient : le numérateur se simplifie beaucoup.

CORRIGÉ

Dérivabilité. f est une fonction rationnelle, dérivable sur $]-\infty, -2[$ et sur $]-2, +\infty[$.

Dérivée d'un quotient. Posons $u(x) = 3x - 1$ et $v(x) = x + 2$, d'où $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 1$. Pour tout $x \neq -2$, le numérateur $u'(x)v(x) - u(x)v'(x)$ de $f'(x)$ vaut :

$$\begin{aligned} &3(x+2) - (3x-1) \\ &= 3x + 6 - 3x + 1 \\ &= 7. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x \neq -2$, $f'(x) = \dfrac{7}{(x+2)^2}$.

2.

Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à (Δ). Donner une équation de chacune de ces tangentes.

INDICE

Deux droites sont parallèles lorsqu'elles ont le même coefficient directeur : résous $f'(a) = 7$.

CORRIGÉ

Équation à résoudre. Soit $a \neq -2$. La tangente au point d'abscisse a a pour coefficient directeur $f'(a)$. Elle est parallèle à (Δ) si et seulement si $f'(a) = 7$, c'est-à-dire :

$$(a+2)^2 = 1.$$

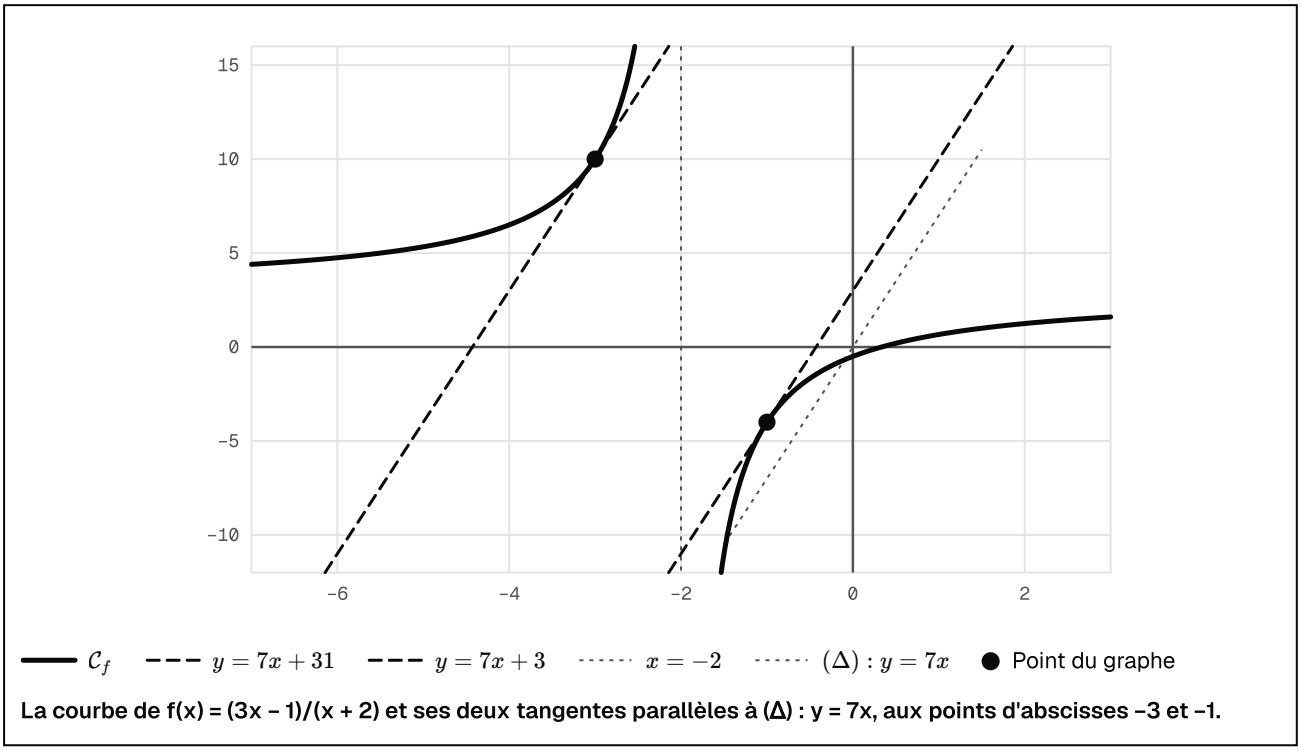
Donc $a + 2 = 1$ ou $a + 2 = -1$, soit $a = -1$ ou $a = -3$.

En $a = -1$. $f(-1) = \dfrac{-4}{1} = -4$. La tangente a pour équation $y = 7(x+1) - 4$, soit $y = 7x + 3$.

En $a = -3$. $f(-3) = \dfrac{-10}{-1} = 10$. La tangente a pour équation $y = 7(x+3) + 10$, soit $y = 7x + 31$.

Vérification. Pour $x = -1$, $7x + 3 = -4$; pour $x = -3$, $7x + 31 = 10$. Chaque droite passe bien par son point de contact.

Conclusion. La tangente est parallèle à (Δ) aux points d'abscisses -1 et -3 ; ces tangentes ont pour équations $y = 7x + 3$ et $y = 7x + 31$.



La courbe de f(x) = (3x − 1)/(x + 2) et ses deux tangentes parallèles à (Δ) : y = 7x, aux points d'abscisses −3 et −1.

3.

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle une tangente horizontale ? Préciser le sens de variation de f. Un élève remarque que $f(-3) = 10 > f(-1) = -4$ et conclut que f n'est pas croissante : que lui répondre ?

INDICE

Une tangente horizontale correspond à $f'(a) = 0$. Le lien entre signe de f' et variations vaut sur **un intervalle** : -3 et -1 sont-ils dans le même ?

CORRIGÉ

Tangente horizontale. Pour tout $x \neq -2$, $f'(x) = \dfrac{7}{(x+2)^2} > 0$: f' ne s'annule jamais. Aucune tangente à $\mathcal{C}_f$ n'est horizontale.

Variations. $f'(x) > 0$ sur chacun des intervalles $]-\infty, -2[$ et $]-2, +\infty[$: f est strictement croissante sur **chacun** de ces deux intervalles.

Réponse à l'élève. -3 appartient à $]-\infty, -2[$ et -1 à $]-2, +\infty[$. La croissance ne permet de comparer que deux réels d'un même intervalle : elle ne dit rien de $f(-3)$ et $f(-1)$. Il n'y a donc aucune contradiction.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ n'admet aucune tangente horizontale. f est strictement croissante sur $]-\infty, -2[$ et sur $]-2, +\infty[$, mais pas sur leur réunion, ce qui explique l'observation de l'élève.

4.

Bonus. Écrire l'approximation affine de $f(h)$ pour h proche de 0. En déduire une valeur approchée de $f(0{,}02)$, et la comparer à la valeur exacte.

INDICE

Utilise $f(0+h) \approx f(0) + f'(0)\,h$: calcule d'abord $f(0)$ et $f'(0)$.

CORRIGÉ

Approximation affine. $f(0) = -\dfrac{1}{2}$ et $f'(0) = \dfrac{7}{4}$. Pour h proche de 0 :

$$f(h) \approx -\frac{1}{2} + \frac{7}{4}\,h.$$

Valeur approchée. Avec $h = 0{,}02$: $f(0{,}02) \approx -0{,}5 + 0{,}035 = -0{,}465$.

Valeur exacte. Le numérateur vaut $3 \times 0{,}02 - 1 = -0{,}94$ et le dénominateur $0{,}02 + 2 = 2{,}02$:

$$\begin{aligned} f(0{,}02) &= -\frac{0{,}94}{2{,}02} \\ &\approx -0{,}46535. \end{aligned}$$

Conclusion. L'approximation affine donne $f(0{,}02) \approx -0{,}465$, à environ $0{,}00035$ de la valeur exacte : l'approximation est très bonne, car h est petit.

Exercice 5

La courbe traverse sa tangente

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = 3(x+3)(x-1)$. Dresser le tableau de variations de f, avec les limites en $-\infty$ et en $+\infty$, et préciser ses extremums locaux.

INDICE

Factorise $f'(x)$ par 3, puis cherche les racines du trinôme obtenu.

CORRIGÉ

Dérivée. f est une fonction polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6x - 9 \\ &= 3(x^2 + 2x - 3) \\ &= 3(x+3)(x-1). \end{aligned}$$

On vérifie : $(x+3)(x-1) = x^2 + 2x - 3$.

Signe. Ce trinôme a pour racines -3 et 1 ; il est du signe de son coefficient $3 > 0$ à l'extérieur des racines :

- $f'(x) > 0$ sur $]-\infty, -3[$ et sur $]1, +\infty[$;
- $f'(x) < 0$ sur $]-3, 1[$.

Valeurs et limites. $f(-3) = -27 + 27 + 27 + 2 = 29$ et $f(1) = 1 + 3 - 9 + 2 = -3$. Les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ sont celles de son monôme dominant x^3 : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Extremums. f' s'annule en -3 en passant du signe $+$ au signe $-$: f admet en -3 un maximum local égal à 29. En 1, f' passe du signe $-$ au signe $+$: f admet en 1 un minimum local égal à -3.

Conclusion. f est strictement croissante sur $]-\infty, -3]$, strictement décroissante sur $[-3, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Elle admet un maximum local 29 en -3 et un minimum local -3 en 1 :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	↗	29	↘	-3	↗	$+\infty$

Lecture du tableau : ↗ signifie « strictement croissante », ↘ « strictement décroissante ».

2.

Calculer $f''(x)$. Étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$ et montrer qu'elle admet un point d'inflexion I dont on donnera les coordonnées.

INDICE

f'' est la dérivée de f' : où s'annule-t-elle, et change-t-elle de signe ?

CORRIGÉ

Dérivée seconde. f' est une fonction polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$f''(x) = 6x + 6 = 6(x+1).$$

Concavité.

- $f''(x) < 0$ sur $]-\infty, -1[$: $\mathcal{C}_f$ est concave sur $]-\infty, -1]$;
- $f''(x) > 0$ sur $]-1, +\infty[$: $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $[-1, +\infty[$.

Point d'inflexion. f'' s'annule en -1 en changeant de signe, et $f(-1) = -1 + 3 + 9 + 2 = 13$.

Conclusion. Pour tout réel x, $f''(x) = 6(x+1)$. $\mathcal{C}_f$ est concave sur $]-\infty, -1]$, convexe sur $[-1, +\infty[$, et le point $I(-1, 13)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

3.

Donner une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point I.

INDICE

Utilise $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ et la forme factorisée de $f'(x)$.

CORRIGÉ

D'après la question 1, $f'(-1) = 3 \times 2 \times (-2) = -12$, et $f(-1) = 13$. Donc (T) a pour équation $y = -12(x+1) + 13$, soit :

$$y = -12x + 1.$$

Vérification. Pour $x = -1$, $-12 \times (-1) + 1 = 13 = f(-1)$.

Conclusion. (T) : $y = -12x + 1$.

4.

Montrer que, pour tout réel x, $f(x) - (-12x + 1) = (x + 1)^3$. En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (T).

INDICE

Simplifie la différence, puis compare-la au développement de $(x + 1)^3$. Un cube a le signe du nombre élevé au cube.

CORRIGÉ

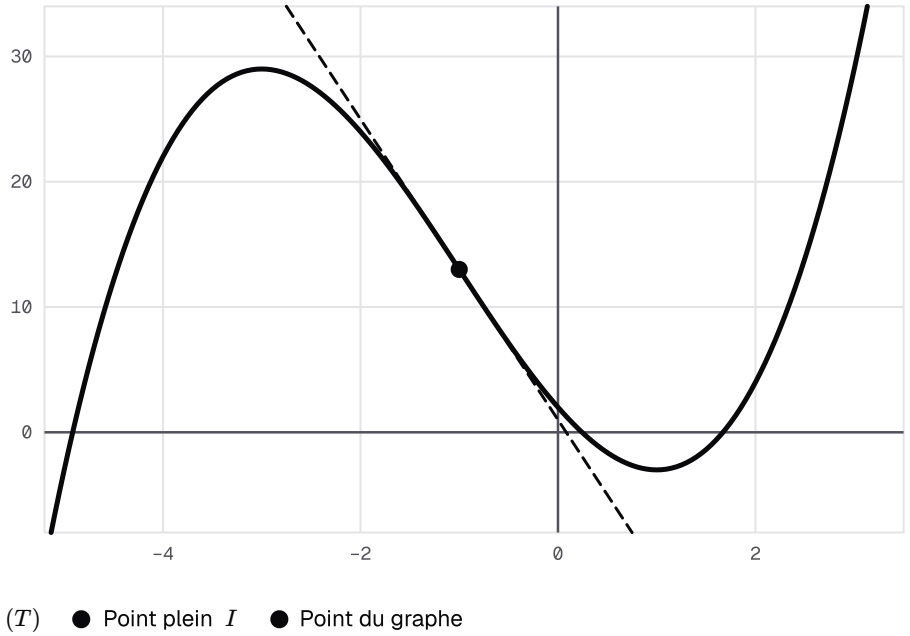
Différence. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &f(x) - (-12x + 1) \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ &= (x + 1)^3. \end{aligned}$$

Signe. $(x + 1)^3$ a le signe de $x + 1$:

- pour $x < -1$, la différence est négative : $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de (T) ;
- pour $x > -1$, elle est positive : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (T) ;
- pour $x = -1$, elle est nulle : c'est le point de contact I.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de (T) sur $]-\infty, -1[$ et au-dessus sur $]-1, +\infty[$: la courbe **traverse** sa tangente au point d'inflexion I.



La courbe de f(x) = x³ + 3x² − 9x + 2 traverse sa tangente (T) : y = −12x + 1 au point d'inflexion I(−1, 13).

Exercice 6

Une racine carrée et deux asymptotes obliques

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1.

Vérifier que, pour tout réel x, $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

INDICE

La forme $(x+1)^2 + 2$ montre que l'expression sous la racine est strictement positive. Le signe de $f'(x)$ se lit ensuite sur son numérateur.

CORRIGÉ

Hypothèse. Pour tout réel x, $(x+1)^2 + 2 = x^2 + 2x + 1 + 2 = x^2 + 2x + 3$. Posons $u(x) = x^2 + 2x + 3$: pour tout réel x, $u(x) \geq 2 > 0$.

Dérivée d'une racine composée. u est une fonction polynôme, dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Donc $f = \sqrt{u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 3}} \\ &= \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}. \end{aligned}$$

Variations. Le dénominateur est strictement positif : $f'(x)$ a le signe de $x + 1$. f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$ et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$, avec un minimum $f(-1) = \sqrt{2}$.

Limites. $u(x)$ tend vers $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$, donc $f(x)$ aussi.

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$, d'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	↘	$\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

Lecture du tableau : ↗ signifie « strictement croissante », ↘ « strictement décroissante ».

2.

Montrer que, pour tout réel x, $f(x) > |x+1|$. En déduire que, pour tout réel x, $f(x)+x+1>0$ et $f(x)-x-1>0$.

INDICE

Compare les carrés $f(x)^2$ et $|x+1|^2$: deux nombres positifs sont rangés comme leurs carrés. Pour la suite, compare $|x+1|$ à $x+1$ et à $-(x+1)$.

CORRIGÉ

Comparaison. Soit x un réel. On a :

$$\begin{aligned} f(x)^2 &= (x+1)^2 + 2 \\ &> (x+1)^2 = |x+1|^2. \end{aligned}$$

Les nombres $f(x)$ et $|x+1|$ sont positifs, et deux nombres positifs sont rangés comme leurs carrés. Donc $f(x) > |x+1|$.

Conséquences. Comme $|x+1| \geq -(x+1)$, on a $f(x) > -(x+1)$, soit $f(x)+x+1>0$. Comme $|x+1| \geq x+1$, on a $f(x) > x+1$, soit $f(x)-x-1>0$.

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) > |x+1|$, $f(x)+x+1>0$ et $f(x)-x-1>0$.

3.

Montrer que, pour tout réel x, $f(x)-(x+1) = \dfrac{2}{f(x)+x+1}$. En déduire que la droite $(D) : y = x+1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

INDICE

Multiplie et divise $f(x)-(x+1)$ par $f(x)+x+1$, qui n'est pas nul d'après la question 2.

CORRIGÉ

Quantité conjuguée. Soit x un réel. D'après la question 2, $f(x)+x+1 \neq 0$; de plus $f(x)^2-(x+1)^2 = 2$. Donc :

$$\begin{aligned} &f(x)-(x+1) \\ &= \frac{f(x)^2-(x+1)^2}{f(x)+x+1} \\ &= \frac{2}{f(x)+x+1}. \end{aligned}$$

Limite. En $+\infty$, $f(x)$ et $x+1$ tendent vers $+\infty$: le dénominateur tend vers $+\infty$. Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x)-(x+1)\big) = 0.$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x)-(x+1) = \dfrac{2}{f(x)+x+1}$, et $(D) : y = x+1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

4.

Montrer de même que la droite (D') : $y = -x - 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

INDICE

Ici la différence est $f(x) + x + 1$: multiplie et divise par $f(x) - x - 1$, puis regarde le comportement de $-x - 1$ en $-\infty$.

CORRIGÉ

Quantité conjuguée. Soit x un réel. On a $f(x) - (-x - 1) = f(x) + (x + 1)$, et $f(x) - x - 1 \neq 0$ d'après la question 2. Donc :

$$\begin{aligned} & f(x) + (x + 1) \\ &= \frac{f(x)^2 - (x + 1)^2}{f(x) - (x + 1)} \\ &= \frac{2}{f(x) - x - 1}. \end{aligned}$$

Limite. En $-\infty$, $f(x)$ et $-x - 1$ tendent vers $+\infty$: le dénominateur tend vers $+\infty$. Donc :

$$\lim_{x \to -\infty} \big(f(x) - (-x - 1)\big) = 0.$$

Conclusion. (D') : $y = -x - 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

5.

Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D) et par rapport à (D').

INDICE

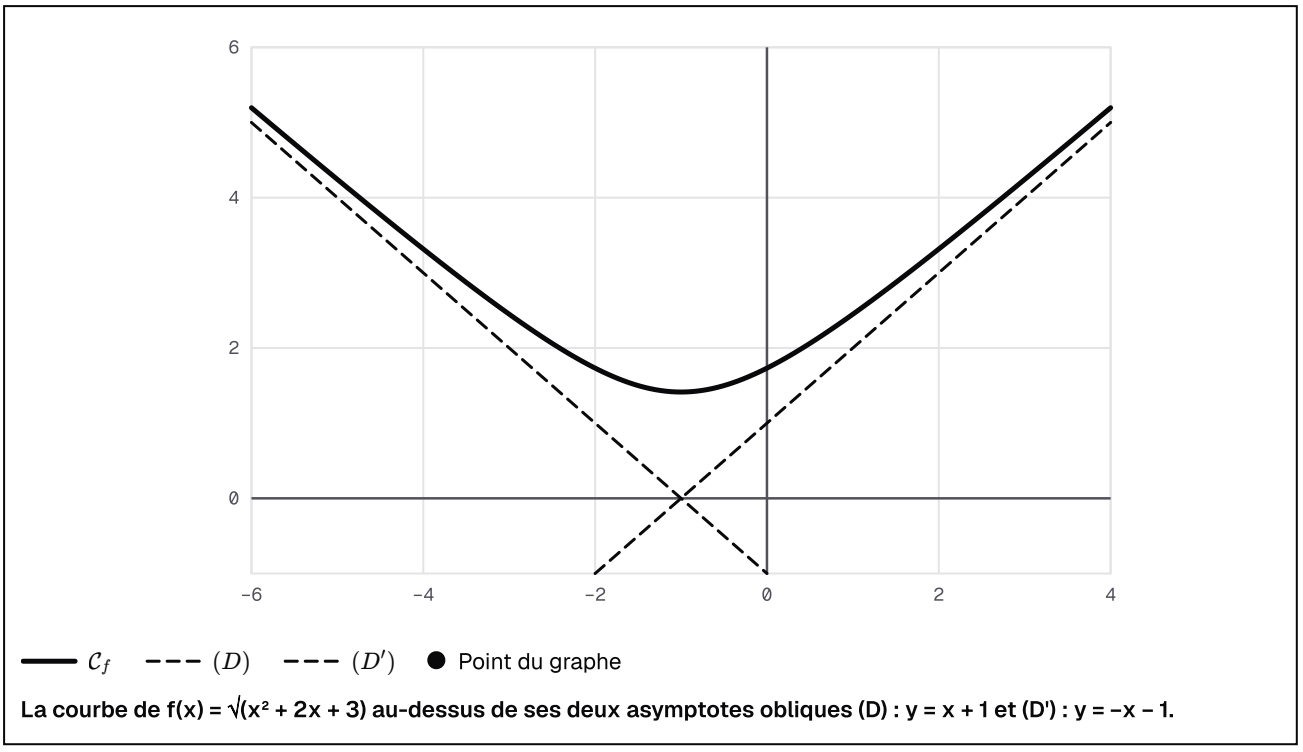
Les deux différences sont déjà écrites sous forme de quotients : quel est le signe de leurs dénominateurs ?

CORRIGÉ

Position par rapport à (D). Pour tout réel x, $f(x) - (x+1) = \dfrac{2}{f(x)+x+1}$, et $f(x)+x+1 > 0$ (question 2) : la différence est strictement positive.

Position par rapport à (D'). Pour tout réel x, $f(x) - (-x-1) = \dfrac{2}{f(x)-x-1}$, et $f(x)-x-1 > 0$ (question 2) : la différence est strictement positive.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D) et au-dessus de (D') sur $\mathbb{R}$. Elle ne coupe aucune des deux droites et s'en rapproche aux bornes, en restant au-dessus.



La courbe de f(x) = √(x² + 2x + 3) au-dessus de ses deux asymptotes obliques (D) : y = x + 1 et (D') : y = −x − 1.

Exercice 7

Une étude complète, pas à pas

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x^2}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé. On suit le plan d'étude d'une fonction.

1.

Calculer $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Interpréter géométriquement.

INDICE

Étudie chaque terme séparément quand x tend vers 0 : quel est le signe de x^2 ?

CORRIGÉ

Limites en 0. Quand x tend vers 0, $\dfrac{x}{2}$ tend vers 0. De plus, x^2 tend vers 0 en restant strictement positif, que x soit négatif ou positif : $\dfrac{2}{x^2}$ tend vers $+\infty$. Ainsi :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

Conclusion. f tend vers $+\infty$ à gauche et à droite en 0 : la droite d'équation $x = 0$, c'est-à-dire l'axe des ordonnées, est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

2.

Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Montrer que la droite $(D) : y = \dfrac{x}{2}$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$, puis étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D).

INDICE

Calcule $f(x) - \dfrac{x}{2}$: il ne reste qu'un terme, dont tu connais la limite et le signe.

CORRIGÉ

Limites. $\dfrac{2}{x^2}$ tend vers 0 en $-\infty$ et en $+\infty$, tandis que $\dfrac{x}{2}$ tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$. Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Asymptote. Pour tout $x \neq 0$, $f(x) - \dfrac{x}{2} = \dfrac{2}{x^2}$, qui tend vers 0 en $-\infty$ et en $+\infty$. Donc $(D) : y = \dfrac{x}{2}$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

Position. Pour tout $x \neq 0$, $f(x) - \dfrac{x}{2} = \dfrac{2}{x^2} > 0$: la différence ne s'annule jamais.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; (D) est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$, et $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de (D) sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, sans point commun.

3.

Montrer que, pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{x^3 - 8}{2x^3}$. Vérifier que $x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$, puis dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Dérive terme à terme. Pour le signe, étudie le discriminant de x^2+2x+4, puis les signes de $x-2$ et de x^3.

CORRIGÉ

Dérivée. f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables. La dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est $x \mapsto -\dfrac{2}{x^3}$. Donc, pour tout $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} - \frac{4}{x^3} \\ &= \frac{x^3 - 8}{2x^3}. \end{aligned}$$

Factorisation. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &(x-2)(x^2+2x+4) \\ &= x^3 + 2x^2 + 4x \\ &\quad - 2x^2 - 4x - 8 \\ &= x^3 - 8. \end{aligned}$$

Le trinôme x^2+2x+4 a pour discriminant $4 - 16 = -12 < 0$: il est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

Signe. $f'(x)$ a donc le signe de $\dfrac{x-2}{x^3}$:

- sur $]-\infty, 0[$: $x-2 < 0$ et $x^3 < 0$, donc $f'(x) > 0$;
- sur $]0, 2[$: $x-2 < 0$ et $x^3 > 0$, donc $f'(x) < 0$;
- sur $]2, +\infty[$: $x-2 > 0$ et $x^3 > 0$, donc $f'(x) > 0$; de plus, $f'(2) = 0$.

Minimum local. $f(2) = 1 + \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{2}$. Comme f' s'annule en 2 en changeant de signe, f admet en 2 un minimum local égal à $\dfrac{3}{2}$.

Conclusion. f est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$, strictement décroissante sur $]0, 2]$ et strictement croissante sur $[2, +\infty[$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\dfrac{3}{2}$	↗	$+\infty$

Lecture du tableau : ↗ signifie « strictement croissante », ↘ « strictement décroissante ». La double barre ‖ marque la valeur interdite 0 : à gauche de ‖, la limite en 0^- ; à droite, la limite en 0^+.

4.

Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2. Montrer que $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un seul point, d'abscisse β comprise entre -2 et -1.

INDICE

Sur $]0,+\infty[$, lis la plus petite valeur de f. Sur $]-\infty,0[$, utilise la stricte monotonie et calcule $f(-2)$ et $f(-1)$.

CORRIGÉ

Tangente en 2. $f'(2)=0$ et $f(2)=\dfrac{3}{2}$: la tangente est horizontale, d'équation $y=\dfrac{3}{2}$.

Sur $]0,+\infty[$. D'après le tableau, pour tout $x>0$, $f(x)\geq\dfrac{3}{2}>0$: la courbe ne coupe pas l'axe des abscisses.

Sur $]-\infty,0[$. f est continue et strictement croissante. De plus :

$$f(-2)=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2},$$

$$f(-1)=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}.$$

Comme $f(-2)<0<f(-1)$, le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à f continue et strictement croissante sur $[-2,-1]$, montre que l'équation $f(x)=0$ a une unique solution β dans $]-2,-1[$. Elle n'en a pas d'autre sur $]-\infty,0[$, puisque f y est strictement croissante.

Conclusion. La tangente en 2 a pour équation $y=\dfrac{3}{2}$, et $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un seul point, d'abscisse $\beta\in]-2,-1[$.

5.

Décrire la construction de $\mathcal{C}_f$, en suivant l'ordre : asymptotes et tangentes, puis points remarquables, puis la courbe.

INDICE

Reprends les questions 1 à 4 : asymptotes, tangente horizontale, point sur l'axe des abscisses.

CORRIGÉ

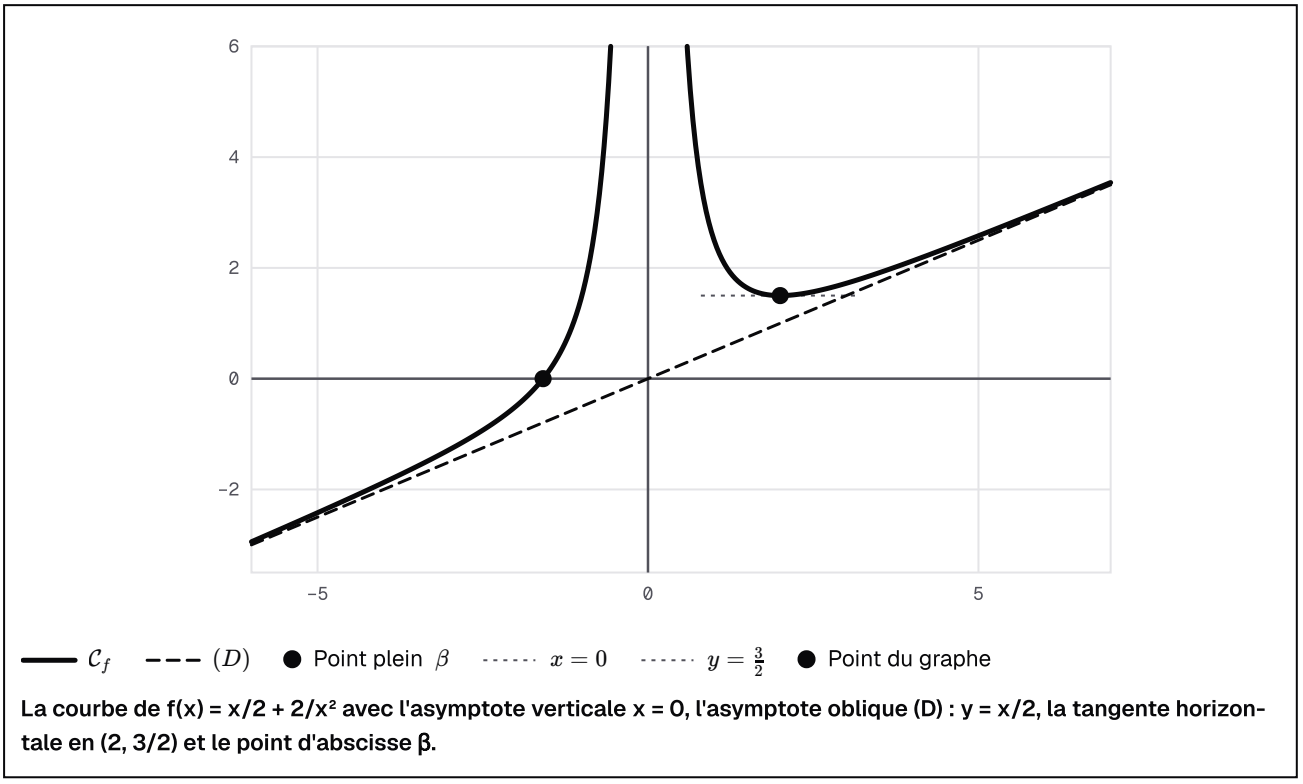
1. Asymptotes et tangentes. On trace l'asymptote verticale d'équation $x = 0$ et l'asymptote oblique $(D) : y = \dfrac{x}{2}$, puis la tangente horizontale $y = \dfrac{3}{2}$ au point $\left(2, \dfrac{3}{2}\right)$.

2. Points remarquables. On place le minimum local $\left(2, \dfrac{3}{2}\right)$ et le point $(\beta, 0)$, avec $-2 < \beta < -1$. Quelques valeurs aident : $f(-2) = -\dfrac{1}{2}$, $f(-1) = \dfrac{3}{2}$, $f(1) = \dfrac{5}{2}$ et $f(4) = \dfrac{17}{8}$.

3. La courbe.

- Sur $]-\infty, 0[$: elle monte en longeant (D) par au-dessus, coupe l'axe des abscisses en β, puis monte vers $+\infty$ le long de l'axe des ordonnées.
- Sur $]0, +\infty[$: elle descend de $+\infty$ jusqu'au minimum $\left(2, \dfrac{3}{2}\right)$, puis remonte en se rapprochant de (D) par au-dessus.

Conclusion. On construit $\mathcal{C}_f$ dans cet ordre : les droites, puis les points, puis les deux branches.



La courbe de f(x) = x/2 + 2/x² avec l'asymptote verticale x = 0, l'asymptote oblique (D) : y = x/2, la tangente horizontale en (2, 3/2) et le point d'abscisse β.