BURHAN

Dérivation et étude de fonctions : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/derivation-etude-fonctions/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivation et étude de fonctions	Application	9

Exercice 1

Une hauteur, une pente, une tangente

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - x$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer $f(1)$. Montrer que, pour tout réel $h \neq 0$:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 3 + 2h.$$

INDICE

Développe $(1+h)^2$ pour obtenir $f(1+h)$, retranche $f(1)$, puis factorise par h.

2.

En déduire que f est dérivable en 1 et donner $f'(1)$.

INDICE

Fais tendre h vers 0 dans l'expression obtenue à la question 1. Une limite réelle du taux est, par définition, le nombre dérivé.

3.

Écrire une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

INDICE

Utilise $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $a = 1$: $f(1)$ est la hauteur du point, $f'(1)$ la pente de la droite.

4.

Une camarade propose $(T) : y = 3x + 1$. Montrer que sa droite ne convient pas et expliquer son erreur.

INDICE

Remplace x par 1 dans l'équation proposée, puis compare-la à $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

Exercice 2

Continue en 3, mais pas dérivable

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 3]$ par $f(x) = \sqrt{3-x}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Justifier que f est continue sur $]-\infty, 3]$, en particulier en 3.

INDICE

Regarde la fonction sous la racine : est-elle continue ? Quel est son signe sur $]-\infty, 3]$?

2.

Montrer que, pour tout $x < 3$:

$$\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = -\frac{1}{\sqrt{3-x}}.$$

En déduire la limite de ce quotient quand x tend vers 3 par valeurs inférieures.

INDICE

Écris $x - 3 = -(3 - x)$ et $3 - x = \left(\sqrt{3-x}\right)^2$, puis simplifie.

3.

Conclure sur la dérivabilité de f à gauche en 3, puis interpréter géométriquement le résultat.

INDICE

Un nombre dérivé est une limite **réelle**. Que traduit, sur la courbe, une limite infinie du taux ?

Exercice 3

Nommer la règle avant de dériver

Dans chaque question, précise d'abord la forme de la fonction (somme, produit ou quotient) et l'intervalle de dérivabilité.

1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 1)(x^2 + 3)$. Calculer $f'(x)$.

INDICE

Repère un produit $u \times v$ et applique $(uv)' = u'v + uv'$.

2.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$.

INDICE

C'est un quotient : vérifie d'abord que le dénominateur ne s'annule jamais, puis applique $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

3.

Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = x^3 - 5x + \dfrac{4}{x}$. Calculer $h'(x)$.

INDICE

C'est une somme : dérive chaque terme, en te rappelant la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

4.

Un élève dérive g « terme à terme » : il écrit $g'(x) = \dfrac{(x + 1)'}{(x^2 + 1)'} = \dfrac{1}{2x}$. Comparer sa valeur en $x = 1$ avec la bonne valeur $g'(1)$, et conclure.

INDICE

Calcule $g'(1)$ avec le résultat de la question 2, puis la valeur de l'élève en $x = 1$.

Exercice 4

Ne pas oublier la dérivée intérieure

1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-2x)^5$. Calculer $f'(x)$.

INDICE

Repère la forme u^n, et n'oublie pas le facteur u'.

2.

Un élève trouve $f'(x) = 5(1-2x)^4$. Comparer sa valeur en $x = 0$ avec $f'(0)$. Quelle erreur a-t-il faite ?

INDICE

Remplace x par 0 dans les deux expressions. Quel facteur manque chez l'élève ?

3.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 13}$. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer $g'(x)$.

INDICE

La dérivée de $\sqrt{u}$ exige $u > 0$: écris $x^2 - 4x + 13$ sous forme canonique.

4.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sin(3x) + \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Calculer $h'(x)$.

INDICE

Utilise les dérivées de $x \mapsto \sin(ax+b)$ et de $x \mapsto \cos(ax+b)$; pour le second terme, repère la valeur de a.

Exercice 5

Le nombre dérivé d'une réciproque : l'antécédent d'abord

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$.

1.

Justifier que f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0, +\infty[$.

INDICE

Que dire de la somme de deux fonctions strictement croissantes ? Pour l'intervalle image, calcule $f(0)$ et la limite de f en $+\infty$.

2.

Calculer $f(4)$. Montrer que f^{-1} est dérivable en 18 et calculer $\left(f^{-1}\right)'(18)$.

INDICE

La valeur $f(4)$ donne l'antécédent de 18. Vérifie que $f'(4) \neq 0$ avant d'appliquer la formule.

3.

Une camarade écrit $\left(f^{-1}\right)'(18) = \dfrac{1}{f'(18)}$. Expliquer pourquoi c'est faux.

INDICE

Dans la formule, en quel point calcule-t-on f' : en b, ou en son antécédent ?

Exercice 6

Dériver des racines n-ièmes

1.

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt[4]{x}$. Donner $f'(x)$ pour $x > 0$, puis calculer $f'(16)$.

INDICE

Utilise la dérivée de $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ sur $]0, +\infty[$ avec $n = 4$. Pour $f'(16)$, cherche un entier dont la puissance quatrième vaut 16^3.

2.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt[3]{x^2 + 7}$. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer $g'(x)$, puis $g'(1)$.

INDICE

Pose $u(x) = x^2 + 7$, vérifie que $u > 0$, puis applique la dérivée de $\sqrt[3]{u}$.

3.

Bonus. Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = x^{\frac{5}{2}}$. Calculer $h'(x)$, puis $h'(4)$. Retrouver ce résultat en écrivant $h(x) = x^2\sqrt{x}$.

INDICE

Applique la dérivée de $x \mapsto x^r$ pour r rationnel et $x > 0$. Pour $h'(4)$, écris $x^{\frac{3}{2}} = x\sqrt{x}$. Pour la vérification, dérive le produit $x^2 \times \sqrt{x}$.

Exercice 7

Une tangente horizontale sans extremum

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 4x^3$.

1.

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = 4x^2(x-3)$.

INDICE

Dérive chaque terme de la somme, puis mets $4x^2$ en facteur.

2.

Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f, avec les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

INDICE

Le facteur $4x^2$ est positif ou nul : quel facteur décide du signe ? Pour les limites, factorise $f(x)$ par x^3.

3.

La fonction f admet-elle un extremum local en 0 ? En 3 ? Justifier.

INDICE

f' s'annule en 0 et en 3 : regarde si son signe change de part et d'autre de chacun de ces points. En 0, sers-toi aussi du sens de variation obtenu à la question 2.

4.

En déduire que, pour tout réel x, $x^4 - 4x^3 \geq -27$.

INDICE

Lis sur le tableau la plus petite valeur prise par f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8

Le signe de f″ décide de l'inflexion

1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. Étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$ et déterminer ses points d'inflexion.

INDICE

f'' est la dérivée de f'. Factorise $f''(x)$, étudie son signe, puis cherche les points où il **change**.

2.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-2)^4 + 3x$. Calculer $g''(x)$ et vérifier que $g''(2) = 0$. Le point $(2, 6)$ est-il un point d'inflexion de $\mathcal{C}_g$?

INDICE

Dérive deux fois avec la dérivée de u^4, puis regarde si g'' change de signe en 2.

Exercice 9

Lire les branches infinies

1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+5}{x-3}$. Calculer les limites de f à gauche et à droite en 3, puis en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter géométriquement chaque résultat.

INDICE

En 3, regarde la limite du numérateur et le signe du dénominateur de chaque côté. En l'infini, mets x en facteur au numérateur et au dénominateur.

2.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x - 1 + \dfrac{3}{x^2+1}$, et (D) la droite d'équation $y = 2x - 1$. Montrer que (D) est asymptote oblique à $\mathcal{C}_g$ au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

INDICE

Calcule la différence $g(x) - (2x-1)$, puis cherche sa limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

3.

Étudier la position de $\mathcal{C}_g$ par rapport à (D).

INDICE

La position se lit sur le signe de la différence $g(x) - (2x-1)$.

4.

Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = 2\sqrt{x} + 1$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{x}$. Interpréter géométriquement.

INDICE

Pour $x > 0$, sépare $\dfrac{h(x)}{x}$ en deux termes, puis simplifie $\dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

5.

Soit k la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $k(x) = 3x - \sqrt{x}$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{k(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(k(x) - 3x\big)$. Interpréter géométriquement.

INDICE

Factorise $k(x)$ par $\sqrt{x}$ pour la première limite, puis simplifie $\dfrac{k(x)}{x}$ et $k(x) - 3x$.