BURHAN

Dérivation et étude de fonctions : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/derivation-etude-fonctions/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivation et étude de fonctions	Application	9

Exercice 1

Une hauteur, une pente, une tangente

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - x$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer $f(1)$. Montrer que, pour tout réel $h \neq 0$:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 3 + 2h.$$

INDICE

Développe $(1+h)^2$ pour obtenir $f(1+h)$, retranche $f(1)$, puis factorise par h.

CORRIGÉ

Calcul de $f(1)$. $f(1) = 2 \times 1^2 - 1 = 1$.

Calcul de $f(1+h)$. Soit h un réel non nul. Comme $(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$:

$$\begin{aligned} f(1+h) &= 2 + 4h + 2h^2 \\ &\quad - 1 - h \\ &= 1 + 3h + 2h^2. \end{aligned}$$

Le taux d'accroissement. Donc $f(1+h) - f(1) = 3h + 2h^2 = h(3 + 2h)$. Comme $h \neq 0$, on peut diviser par h :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 3 + 2h.$$

Conclusion. $f(1) = 1$ et, pour tout réel $h \neq 0$, $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = 3 + 2h$.

2.

En déduire que f est dérivable en 1 et donner $f'(1)$.

INDICE

Fais tendre h vers 0 dans l'expression obtenue à la question 1. Une limite réelle du taux est, par définition, le nombre dérivé.

CORRIGÉ

Ce que l'on cherche. Par définition, f est dérivable en 1 lorsque le taux d'accroissement $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$ admet une limite réelle quand h tend vers 0.

Limite du taux. D'après la question 1 :

$$\lim_{h \to 0} (3 + 2h) = 3.$$

Cette limite est un nombre réel.

Conclusion. f est dérivable en 1 et $f'(1) = 3$.

Contrôle. Pour tout réel x, $f'(x) = 4x - 1$ (dérivée d'une fonction polynôme), donc $f'(1) = 4 - 1 = 3$: les deux méthodes donnent le même nombre.

3.

Écrire une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

INDICE

Utilise $y = f'(a)(x-a)+f(a)$ avec $a=1$: $f(1)$ est la hauteur du point, $f'(1)$ la pente de la droite.

CORRIGÉ

D'après les questions 1 et 2, $f(1)=1$ et $f'(1)=3$. La tangente (T) a pour équation $y = f'(1)(x-1)+f(1)$, soit :

$$\begin{aligned} y &= 3(x-1)+1 \\ &= 3x-2. \end{aligned}$$

Vérification. Pour $x=1$, $3\times 1-2 = 1 = f(1)$: la droite passe par le point $A(1,1)$ de $\mathcal{C}_f$.

Conclusion. Une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est $y=3x-2$.

4.

Une camarade propose (T) : $y=3x+1$. Montrer que sa droite ne convient pas et expliquer son erreur.

INDICE

Remplace x par 1 dans l'équation proposée, puis compare-la à $y = f'(1)(x-1)+f(1)$.

CORRIGÉ

Test au point de contact. Pour $x=1$, la droite $y=3x+1$ donne $y=4$. Or $f(1)=1$. Elle ne passe donc pas par le point $A(1,1)$: ce n'est pas la tangente en A.

L'erreur. La camarade a écrit $y = f'(1)\,x + f(1)$ au lieu de $y = f'(1)(x-1)+f(1)$: elle a oublié le décalage $x-1$.

Sa pente $3 = f'(1)$ est juste. En revanche, $f(1)=1$ est la hauteur du point d'abscisse 1, pas l'ordonnée à l'origine de la tangente.

Conclusion. La droite $y=3x+1$ ne convient pas : elle a la bonne pente, mais ne passe pas par $A(1,1)$, faute du décalage $x-1$.

À retenir. $f(a)$ est une hauteur, $f'(a)$ est une pente. Vérifie toujours ta tangente en $x=a$.

Exercice 2

Continue en 3, mais pas dérivable

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 3]$ par $f(x) = \sqrt{3-x}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Justifier que f est continue sur $]-\infty, 3]$, en particulier en 3.

INDICE

Regarde la fonction sous la racine : est-elle continue ? Quel est son signe sur $]-\infty, 3]$?

CORRIGÉ

Fonction sous la racine. Posons $u(x) = 3 - x$. La fonction u est une fonction polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$, et $u(x) \geq 0$ pour tout $x \leq 3$.

Continuité de f. La racine carrée d'une fonction continue et positive sur un intervalle est continue sur cet intervalle. Donc $f = \sqrt{u}$ est continue sur $]-\infty, 3]$.

Conclusion. f est continue sur $]-\infty, 3]$. En particulier, $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = f(3) = 0$: f est continue en 3.

2.

Montrer que, pour tout $x < 3$:

$$\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = -\frac{1}{\sqrt{3-x}}.$$

En déduire la limite de ce quotient quand x tend vers 3 par valeurs inférieures.

INDICE

Écris $x - 3 = -(3 - x)$ et $3 - x = \left(\sqrt{3-x}\right)^2$, puis simplifie.

CORRIGÉ

Le quotient. $f(3) = \sqrt{0} = 0$. Soit $x < 3$. Alors $3 - x > 0$, donc $\sqrt{3-x} > 0$ et $3 - x = \left(\sqrt{3-x}\right)^2$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &= \frac{\sqrt{3-x}}{-(3-x)} \\ &= \frac{\sqrt{3-x}}{-\left(\sqrt{3-x}\right)^2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3-x}}. \end{aligned}$$

La limite. Quand x tend vers 3 avec $x < 3$, $\sqrt{3-x}$ tend vers 0 en restant strictement positif. Donc :

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = -\infty.$$

Conclusion. Pour tout $x < 3$, $\dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = -\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$, et ce quotient tend vers $-\infty$ quand x tend vers 3 par valeurs inférieures.

3.

Conclure sur la dérivabilité de f à gauche en 3, puis interpréter géométriquement le résultat.

INDICE

Un nombre dérivé est une limite **réelle**. Que traduit, sur la courbe, une limite infinie du taux ?

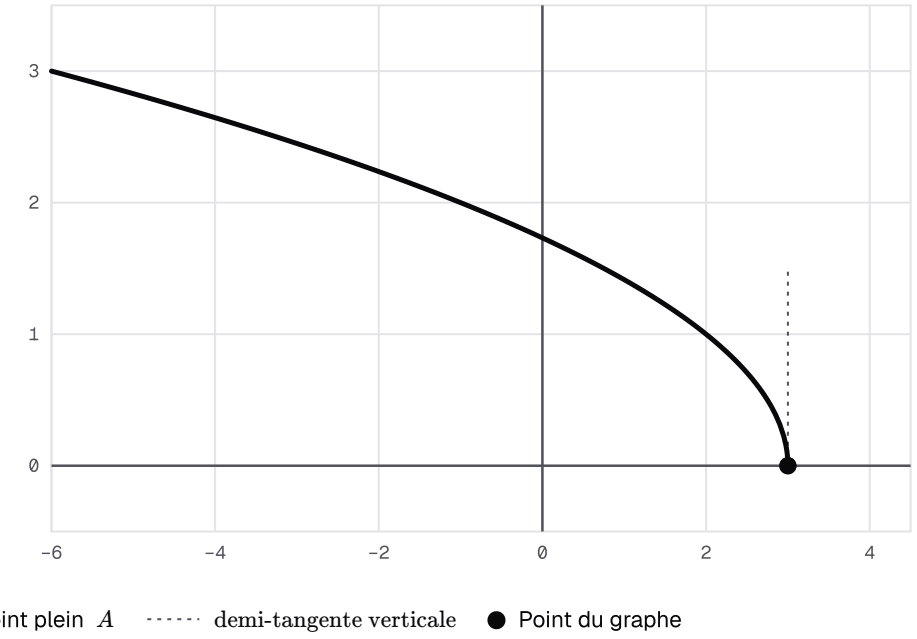
CORRIGÉ

Dérivabilité. D'après la question 2, la limite du taux d'accroissement à gauche en 3 est $-\infty$: ce n'est pas un nombre réel. Donc f **n'est pas dérivable à gauche en** 3.

Interprétation géométrique. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet au point $A(3,0)$ une **demi-tangente verticale**. Comme $f(x) > 0$ pour $x < 3$, cette demi-tangente est dirigée vers le haut.

Conclusion. f n'est pas dérivable à gauche en 3, et $\mathcal{C}_f$ admet en $A(3,0)$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

À retenir. f est continue en 3 (question 1) sans y être dérivable à gauche : continue ne veut pas dire dérivable.



La courbe de f(x) = √(3 − x) se termine en A(3, 0) par une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

Exercice 3

Nommer la règle avant de dériver

Dans chaque question, précise d'abord la forme de la fonction (somme, produit ou quotient) et l'intervalle de dérivabilité.

1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 1)(x^2 + 3)$. Calculer $f'(x)$.

INDICE

Repère un produit $u \times v$ et applique $(uv)' = u'v + uv'$.

CORRIGÉ

Forme. $f = u \times v$, où $u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = x^2 + 3$. Ce sont deux fonctions polynômes, dérivables sur $\mathbb{R}$, avec $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2x$.

Dérivée d'un produit. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u'v + uv'$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x^2 + 3) \\ &\quad + 2x(2x - 1) \\ &= 2x^2 + 6 \\ &\quad + 4x^2 - 2x \\ &= 6x^2 - 2x + 6. \end{aligned}$$

Conclusion. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = 6x^2 - 2x + 6$.

2.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$.

INDICE

C'est un quotient : vérifie d'abord que le dénominateur ne s'annule jamais, puis applique $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

CORRIGÉ

Hypothèse. Pour tout réel x, $x^2 + 1 \geq 1 > 0$: le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Quotient de deux fonctions polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas, g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Dérivée d'un quotient. Posons $u(x) = x + 1$ et $v(x) = x^2 + 1$, d'où $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x$. Pour tout réel x, le numérateur de $g'(x)$ vaut :

$$\begin{aligned} &u'(x)v(x) - u(x)v'(x) \\ &= x^2 + 1 - 2x(x+1) \\ &= -x^2 - 2x + 1. \end{aligned}$$

Donc, pour tout réel x :

$$g'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2}.$$

Conclusion. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2}$.

3.

Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = x^3 - 5x + \dfrac{4}{x}$. Calculer $h'(x)$.

INDICE

C'est une somme : dérive chaque terme, en te rappelant la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

CORRIGÉ

Forme. h est la somme des fonctions $x \mapsto x^3$, $x \mapsto -5x$ et $x \mapsto \dfrac{4}{x}$. Ces trois fonctions sont dérivables sur $]0, +\infty[$ (la troisième car $x \neq 0$).

Dérivée d'une somme. Sur $]0, +\infty[$, la dérivée de $x \mapsto \dfrac{4}{x}$ est $x \mapsto -\dfrac{4}{x^2}$. Donc h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$:

$$h'(x) = 3x^2 - 5 - \frac{4}{x^2}.$$

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $h'(x) = 3x^2 - 5 - \dfrac{4}{x^2}$.

4.

Un élève dérive g « terme à terme » : il écrit $g'(x) = \dfrac{(x+1)'}{(x^2+1)'} = \dfrac{1}{2x}$. Comparer sa valeur en $x = 1$ avec la bonne valeur $g'(1)$, et conclure.

INDICE

Calcule $g'(1)$ avec le résultat de la question 2, puis la valeur de l'élève en $x = 1$.

CORRIGÉ

Bonne valeur. D'après la question 2 :

$$\begin{aligned} g'(1) &= \frac{-1-2+1}{(1+1)^2} \\ &= \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Valeur de l'élève. En $x = 1$, il obtient $\dfrac{1}{2 \times 1} = \dfrac{1}{2}$.

Conclusion. Les deux nombres sont opposés : la méthode de l'élève est fausse. La dérivée d'un quotient n'est **pas** le quotient des dérivées ; il faut la formule $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

À retenir. Un seul contre-exemple suffit à prouver qu'une règle est fausse. Une valeur test permet aussi de contrôler tes propres calculs.

Exercice 4

Ne pas oublier la dérivée intérieure

1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-2x)^5$. Calculer $f'(x)$.

INDICE

Repère la forme u^n, et n'oublie pas le facteur u'.

CORRIGÉ

Forme. $f = u^5$, où $u(x) = 1-2x$; u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -2$.

Dérivée d'une puissance. D'après $(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5(1-2x)^4 \times (-2) \\ &= -10(1-2x)^4. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = -10(1-2x)^4$.

2.

Un élève trouve $f'(x) = 5(1-2x)^4$. Comparer sa valeur en $x = 0$ avec $f'(0)$. Quelle erreur a-t-il faite ?

INDICE

Remplace x par 0 dans les deux expressions. Quel facteur manque chez l'élève ?

CORRIGÉ

Comparaison. $f'(0) = -10 \times 1^4 = -10$, alors que l'expression de l'élève donne $5 \times 1^4 = 5$.

L'erreur. Il a dérivé la puissance, mais il a oublié de multiplier par la **dérivée intérieure** $u'(x) = -2$.

Conséquence. L'erreur change même le signe. Pour tout réel x, $f'(x) = -10(1-2x)^4 \leq 0$: f est décroissante sur $\mathbb{R}$. L'élève conclurait qu'elle est croissante, ce qui est faux : $f(0) = 1$ et $f(1) = (-1)^5 = -1$.

Conclusion. $f'(0) = -10$ et non 5 : l'élève a oublié le facteur $u'(x) = -2$.

3.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 13}$. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer $g'(x)$.

INDICE

La dérivée de $\sqrt{u}$ exige $u > 0$: écris $x^2 - 4x + 13$ sous forme canonique.

CORRIGÉ

Hypothèse. Posons $u(x) = x^2 - 4x + 13$. Pour tout réel x, $u(x) = (x-2)^2 + 9 \geq 9 > 0$. La fonction u est une fonction polynôme, dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, avec $u'(x) = 2x - 4$.

Dérivée d'une racine composée. Comme $u > 0$ sur $\mathbb{R}$, $g = \sqrt{u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 13}} \\ &= \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}}. \end{aligned}$$

Conclusion. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}}$.

4.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sin(3x) + \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Calculer $h'(x)$.

INDICE

Utilise les dérivées de $x \mapsto \sin(ax + b)$ et de $x \mapsto \cos(ax + b)$; pour le second terme, repère la valeur de a.

CORRIGÉ

Forme. h est la somme de $x \mapsto \sin(3x)$ et de $x \mapsto \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$, de la forme $\sin(ax + b)$ et $\cos(ax + b)$, dérivables sur $\mathbb{R}$:

- avec $a = 3$ et $b = 0$, la dérivée de $x \mapsto \sin(3x)$ est $x \mapsto 3\cos(3x)$;
- avec $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 0$, la dérivée de $x \mapsto \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Dérivée d'une somme. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} h'(x) = 3\cos(3x) \\ - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $h'(x) = 3\cos(3x) - \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Exercice 5

Le nombre dérivé d'une réciproque : l'antécédent d'abord

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$.

1.

Justifier que f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0, +\infty[$.

INDICE

Que dire de la somme de deux fonctions strictement croissantes ? Pour l'intervalle image, calcule $f(0)$ et la limite de f en $+\infty$.

CORRIGÉ

Continuité. Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont continues sur $[0, +\infty[$, donc leur somme f aussi.

Stricte croissance. Ces deux fonctions sont strictement croissantes sur $[0, +\infty[$. La somme de deux fonctions strictement croissantes est strictement croissante.

Intervalle image. $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (somme de deux limites égales à $+\infty$). Comme f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$:

$$f\left([0, +\infty[\right) = [0, +\infty[\,.$$

Conclusion. f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$: elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0, +\infty[$.

2.

Calculer $f(4)$. Montrer que f^{-1} est dérivable en 18 et calculer $\left(f^{-1}\right)'(18)$.

INDICE

La valeur $f(4)$ donne l'antécédent de 18. Vérifie que $f'(4) \neq 0$ avant d'appliquer la formule.

CORRIGÉ

L'antécédent. $f(4) = 16 + \sqrt{4} = 18$, donc $f^{-1}(18) = 4$.

Le nombre dérivé en 4. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables et, pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Donc :

$$f'(4) = 8 + \frac{1}{4} = \frac{33}{4}.$$

En particulier, $f'(4) \neq 0$.

Dérivabilité de f^{-1}. f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, dérivable en 4 avec $f'(4) \neq 0$. Donc f^{-1} est dérivable en $f(4) = 18$ et :

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)'(18) &= \frac{1}{f'(4)} \\ &= \frac{4}{33}.\end{aligned}$$

Conclusion. $f(4) = 18$; f^{-1} est dérivable en 18 et $\left(f^{-1}\right)'(18) = \dfrac{4}{33}$.

3.

Une camarade écrit $\left(f^{-1}\right)'(18) = \dfrac{1}{f'(18)}$. Expliquer pourquoi c'est faux.

INDICE

Dans la formule, en quel point calcule-t-on f' : en b, ou en son antécédent ?

CORRIGÉ

La formule. Lorsque $f'\left(f^{-1}(b)\right) \neq 0$, $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$: on calcule f' en l'**antécédent** de b, pas en b.

Ici. $f^{-1}(18) = 4$: il faut donc $f'(4)$, et non $f'(18)$.

Les valeurs diffèrent. $\dfrac{1}{f'(4)} = \dfrac{4}{33} \approx 0{,}12$, alors que $f'(18) = 36 + \dfrac{1}{2\sqrt{18}}$ donne $\dfrac{1}{f'(18)} \approx 0{,}03$.

Conclusion. L'écriture $\dfrac{1}{f'(18)}$ est fausse : la formule demande f' en l'antécédent 4 de 18, d'où $\left(f^{-1}\right)'(18) = \dfrac{4}{33}$.

À retenir. Pour calculer $\left(f^{-1}\right)'(b)$, cherche d'abord l'antécédent a de b.

Exercice 6

Dériver des racines n-ièmes

1.

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt[4]{x}$. Donner $f'(x)$ pour $x > 0$, puis calculer $f'(16)$.

INDICE

Utilise la dérivée de $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ sur $]0, +\infty[$ avec $n = 4$. Pour $f'(16)$, cherche un entier dont la puissance quatrième vaut 16^3.

CORRIGÉ

Dérivée. La fonction racine quatrième est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}.$$

Valeur en 16**.** $16^3 = 4096$ et $8^4 = 4096$, donc $\sqrt[4]{16^3} = 8$ et :

$$f'(16) = \frac{1}{4 \times 8} = \frac{1}{32}.$$

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$, et $f'(16) = \dfrac{1}{32}$.

2.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt[3]{x^2 + 7}$. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer $g'(x)$, puis $g'(1)$.

INDICE

Pose $u(x) = x^2 + 7$, vérifie que $u > 0$, puis applique la dérivée de $\sqrt[3]{u}$.

CORRIGÉ

Hypothèse. Posons $u(x) = x^2 + 7$. La fonction u est une fonction polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $u'(x) = 2x$, et $u(x) \geq 7 > 0$ pour tout réel x.

Dérivée. Comme u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, $g = \sqrt[3]{u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g' = \dfrac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$. Pour tout réel x :

$$g'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 7)^2}}.$$

Valeur en 1**.** $u(1) = 8$ et $8^2 = 64 = 4^3$, donc $\sqrt[3]{64} = 4$ et :

$$g'(1) = \frac{2}{3 \times 4} = \frac{1}{6}.$$

Conclusion. g est dérivable sur $\mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 7)^2}}$ pour tout réel x, et $g'(1) = \dfrac{1}{6}$.

3.

Bonus. Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=x^{\frac{5}{2}}$. Calculer $h'(x)$, puis $h'(4)$. Retrouver ce résultat en écrivant $h(x)=x^2\sqrt{x}$.

INDICE

Applique la dérivée de $x\mapsto x^r$ pour r rationnel et $x>0$. Pour $h'(4)$, écris $x^{\frac{3}{2}}=x\sqrt{x}$. Pour la vérification, dérive le produit $x^2\times\sqrt{x}$.

CORRIGÉ

Puissance rationnelle. Pour r rationnel, la fonction $x\mapsto x^r$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, de dérivée $x\mapsto r\,x^{r-1}$. Avec $r=\dfrac{5}{2}$, pour tout $x>0$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{5}{2}\,x^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{5}{2}\,x\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Donc $h'(4)=\dfrac{5}{2}\times 4\times 2=20$.

Vérification par le produit. Pour tout $x>0$, $h(x)=x^2\sqrt{x}$, produit de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2\sqrt{x}} \\ &= 2x\sqrt{x}+\frac{x\sqrt{x}}{2} \\ &= \frac{5}{2}\,x\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x>0$, $h'(x)=\dfrac{5}{2}\,x\sqrt{x}$, et $h'(4)=20$. Le calcul par le produit donne la même dérivée.

Exercice 7

Une tangente horizontale sans extremum

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 4x^3$.

1.

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = 4x^2(x-3)$.

INDICE

Dérive chaque terme de la somme, puis mets $4x^2$ en facteur.

CORRIGÉ

f est une fonction polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$. Par la dérivée d'une somme, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 \\ &= 4x^2(x-3). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = 4x^2(x-3)$.

2.

Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f, avec les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

INDICE

Le facteur $4x^2$ est positif ou nul : quel facteur décide du signe ? Pour les limites, factorise $f(x)$ par x^3.

CORRIGÉ

Signe de $f'(x)$. Pour tout réel x, $4x^2 \geq 0$, avec égalité seulement en 0. Pour $x \neq 0$, $f'(x)$ a donc le signe de $x - 3$:

- $f'(x) \leq 0$ sur $]-\infty, 3]$, et f' ne s'y annule qu'en 0 et en 3 ;
- $f'(x) > 0$ sur $]3, +\infty[$.

Variations. Sur $]-\infty, 3]$, f' est négative et ne s'annule qu'en deux points : f y est strictement décroissante. Sur $[3, +\infty[$, f est strictement croissante.

Valeurs et limites. $f(0) = 0$ et $f(3) = 81 - 108 = -27$. Pour tout réel x, $f(x) = x^3(x-4)$:

- en $-\infty$, x^3 et $x - 4$ tendent vers $-\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$;
- en $+\infty$, x^3 et $x - 4$ tendent vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Conclusion. f est strictement décroissante sur $]-\infty, 3]$ et strictement croissante sur $[3, +\infty[$, d'où son tableau de variations :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	↘	0	↘	-27	↗	$+\infty$

Lecture du tableau : ↗ signifie « strictement croissante », ↘ « strictement décroissante ».

3.

La fonction f admet-elle un extremum local en 0 ? En 3 ? Justifier.

INDICE

f' s'annule en 0 et en 3 : regarde si son signe change de part et d'autre de chacun de ces points. En 0, sers-toi aussi du sens de variation obtenu à la question 2.

CORRIGÉ

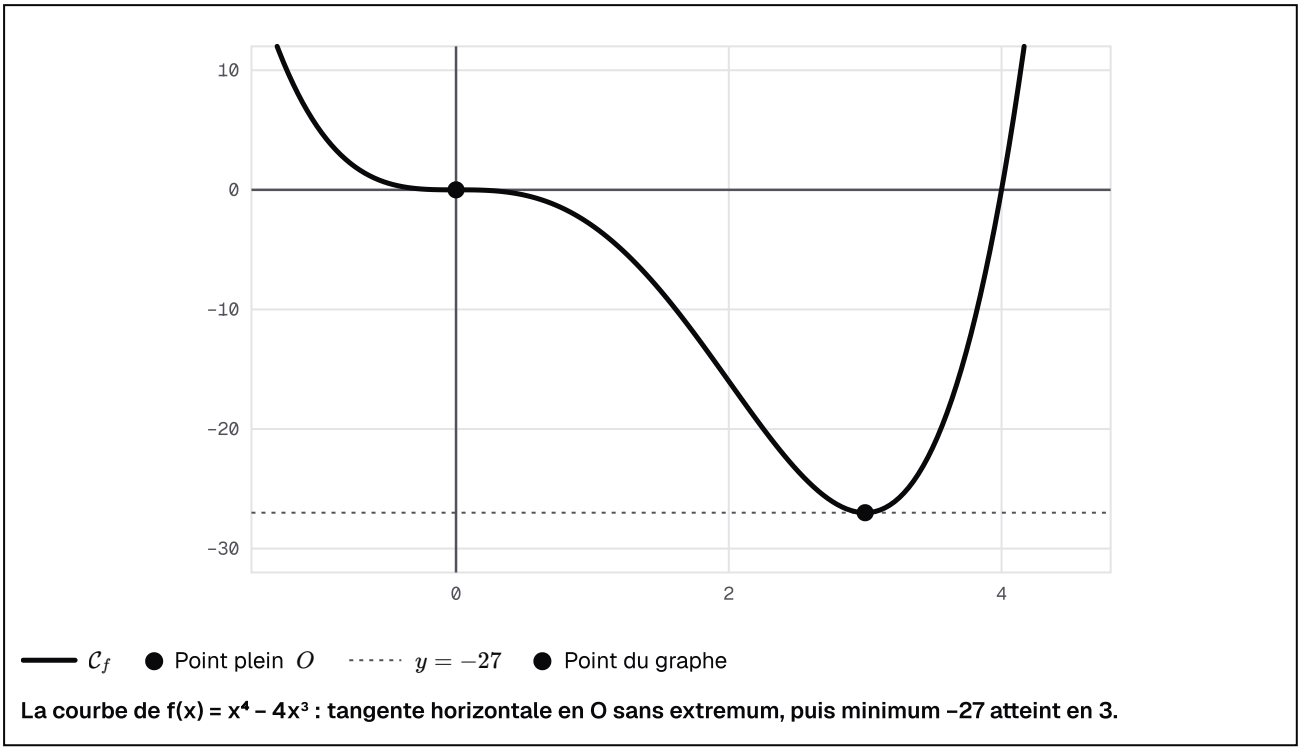
En 0. $f'(0) = 0$, mais $f'(x) < 0$ juste avant et juste après 0 : f' ne change pas de signe en 0.

D'après la question 2, f est strictement décroissante sur $]-\infty, 3]$, qui contient 0 : pour $x < 0 < y \leq 3$, on a $f(x) > f(0) > f(y)$. Donc $f(0)$ n'est ni un maximum local ni un minimum local. La courbe a seulement une tangente horizontale au point $O(0, 0)$.

En 3. f' s'annule en 3 en passant du signe $-$ au signe $+$. Donc f admet en 3 un **minimum** local, égal à $f(3) = -27$.

Conclusion. f n'admet **pas** d'extremum local en 0 ; elle admet en 3 un minimum local égal à -27.

À retenir. $f'(a) = 0$ ne suffit pas pour un extremum. Il suffit, en revanche, que f' s'annule en a en changeant de signe.



La courbe de f(x) = x⁴ − 4x³ : tangente horizontale en O sans extremum, puis minimum −27 atteint en 3.

4.

En déduire que, pour tout réel x, $x^4 - 4x^3 \geq -27$.

INDICE

Lis sur le tableau la plus petite valeur prise par f sur $\mathbb{R}$.

CORRIGÉ

Sur $]-\infty, 3]$**.** f est décroissante : pour tout $x \leq 3$, $f(x) \geq f(3)$.

Sur $[3, +\infty[$**.** f est croissante : pour tout $x \geq 3$, $f(x) \geq f(3)$.

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) \geq f(3) = -27$, c'est-à-dire $x^4 - 4x^3 \geq -27$. La valeur -27 est atteinte en $x = 3$: c'est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8

Le signe de f″ décide de l'inflexion

1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. Étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$ et déterminer ses points d'inflexion.

INDICE

f'' est la dérivée de f'. Factorise $f''(x)$, étudie son signe, puis cherche les points où il **change**.

CORRIGÉ

Dérivées. f est une fonction polynôme, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$f'(x) = 4x^3 - 12x,$$

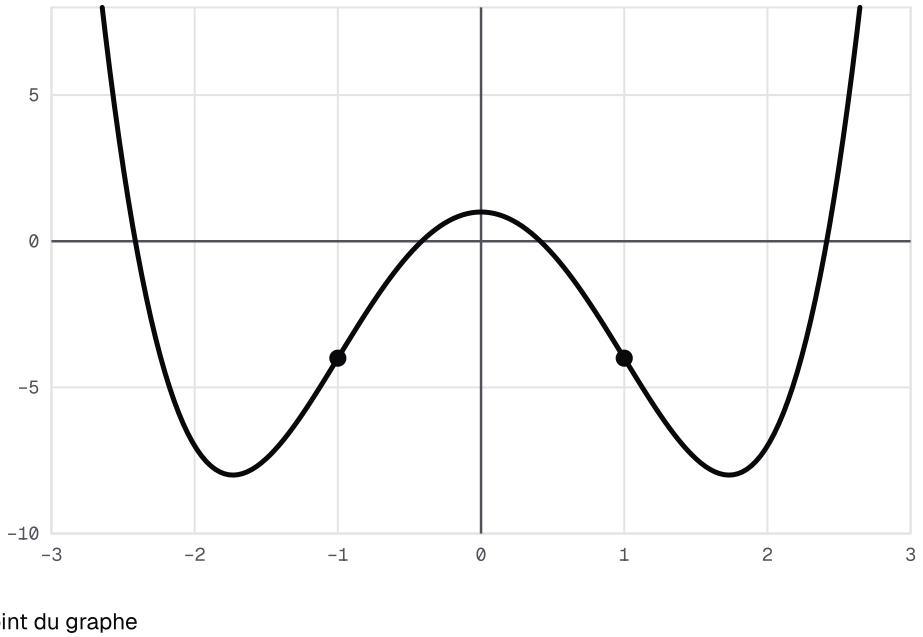
$$\begin{aligned} f''(x) &= 12x^2 - 12 \\ &= 12(x-1)(x+1). \end{aligned}$$

Signe de $f''(x)$. C'est un trinôme de racines -1 et 1, de coefficient dominant $12 > 0$: il est positif à l'extérieur des racines.

- $f''(x) > 0$ sur $]-\infty, -1[$ et sur $]1, +\infty[$: $\mathcal{C}_f$ est **convexe** sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$;
- $f''(x) < 0$ sur $]-1, 1[$: $\mathcal{C}_f$ est **concave** sur $[-1, 1]$.

Points d'inflexion. f'' s'annule en -1 et en 1 **en changeant de signe**. Comme $f(-1) = f(1) = 1 - 6 + 1 = -4$, les points $(-1, -4)$ et $(1, -4)$ sont des points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$, concave sur $[-1, 1]$; ses points d'inflexion sont $(-1, -4)$ et $(1, -4)$.



La courbe de f(x) = x⁴ − 6x² + 1 et ses deux points d'inflexion (−1, −4) et (1, −4), où elle passe de bol à parapluie puis de parapluie à bol.

2.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-2)^4 + 3x$. Calculer $g''(x)$ et vérifier que $g''(2) = 0$. Le point $(2, 6)$ est-il un point d'inflexion de $\mathcal{C}_g$?

INDICE

Dérive deux fois avec la dérivée de u^4, puis regarde si g'' change de signe en 2.

CORRIGÉ

Dérivées. Posons $u(x) = x - 2$, d'où $u'(x) = 1$. D'après $(u^4)' = 4u^3u'$, g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$g'(x) = 4(x-2)^3 + 3,$$
$$g''(x) = 12(x-2)^2.$$

On a bien $g''(2) = 0$, et $g(2) = 0 + 6 = 6$: le point $(2, 6)$ est sur $\mathcal{C}_g$.

Signe de $g''(x)$. Pour tout réel x, $12(x-2)^2 \geq 0$: g'' s'annule en 2 **sans changer de signe**. La courbe $\mathcal{C}_g$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. La concavité ne change pas en 2 : le point $(2, 6)$ **n'est pas** un point d'inflexion de $\mathcal{C}_g$, bien que $g''(2) = 0$.

À retenir. $f''(a) = 0$ ne suffit pas pour une inflexion : vérifie toujours que f'' change de signe en a.

Exercice 9

Lire les branches infinies

1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+5}{x-3}$. Calculer les limites de f à gauche et à droite en 3, puis en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter géométriquement chaque résultat.

INDICE

En 3, regarde la limite du numérateur et le signe du dénominateur de chaque côté. En l'infini, mets x en facteur au numérateur et au dénominateur.

CORRIGÉ

Limites en 3. Le numérateur tend vers $2 \times 3 + 5 = 11 > 0$. Si $x < 3$, $x - 3$ tend vers 0 en restant négatif ; si $x > 3$, en restant positif. Donc :

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty.$$

Interprétation géométrique. La droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

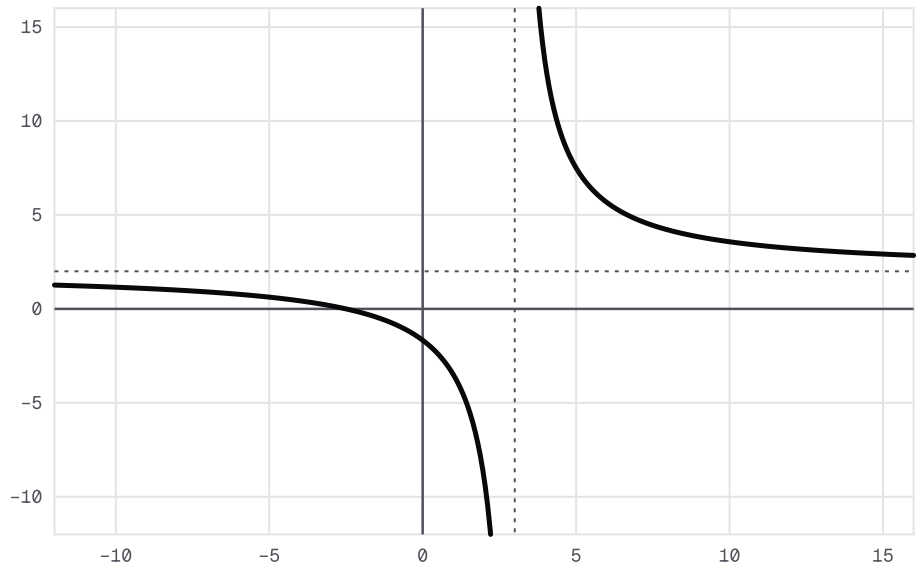
Limites en l'infini. Pour $x \neq 0$ et $x \neq 3$:

$$f(x) = \frac{2 + \frac{5}{x}}{1 - \frac{3}{x}}.$$

En $-\infty$ comme en $+\infty$, le numérateur tend vers 2 et le dénominateur vers 1. Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

Interprétation géométrique. La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

Conclusion. f tend vers $-\infty$ à gauche en 3, vers $+\infty$ à droite en 3, et vers 2 en $-\infty$ et en $+\infty$: $\mathcal{C}_f$ admet l'asymptote verticale $x = 3$ et l'asymptote horizontale $y = 2$.



La courbe de f(x) = (2x + 5)/(x – 3) avec ses asymptotes x = 3, verticale, et y = 2, horizontale.

2.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x - 1 + \dfrac{3}{x^2+1}$, et (D) la droite d'équation $y = 2x - 1$.

Montrer que (D) est asymptote oblique à $\mathcal{C}_g$ au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

INDICE

Calcule la différence $g(x) - (2x-1)$, puis cherche sa limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

CORRIGÉ

Ce que l'on veut montrer. La droite (D) est asymptote oblique à $\mathcal{C}_g$ au voisinage de $+\infty$ lorsque :

$$\lim_{x \to +\infty} \big(g(x) - (2x-1)\big) = 0,$$

et de même au voisinage de $-\infty$.

La différence. Pour tout réel x :

$$g(x) - (2x-1) = \frac{3}{x^2+1}.$$

Limites. Quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, x^2+1 tend vers $+\infty$, donc $\dfrac{3}{x^2+1}$ tend vers 0.

Conclusion. (D) : $y = 2x - 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_g$ au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

3.

Étudier la position de $\mathcal{C}_g$ par rapport à (D).

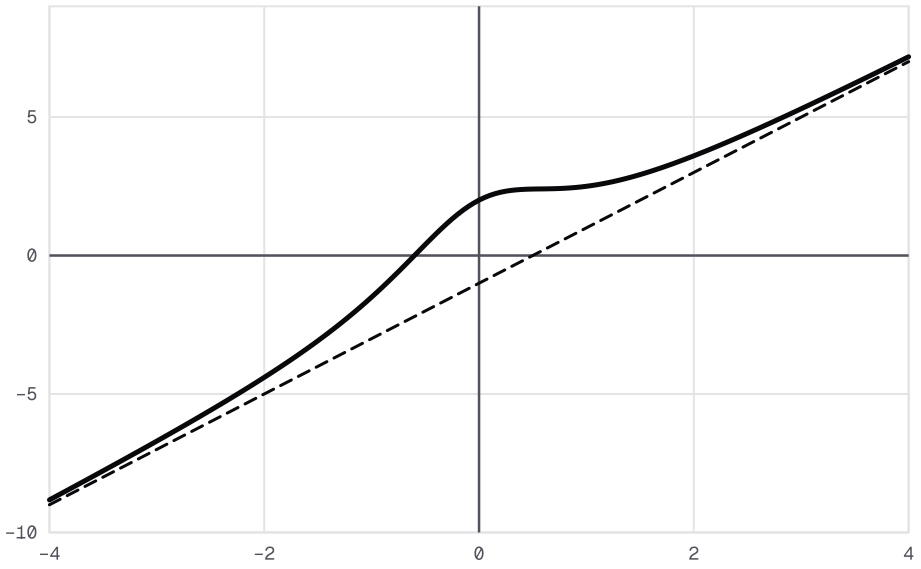
INDICE

La position se lit sur le signe de la différence $g(x) - (2x - 1)$.

CORRIGÉ

Pour tout réel x, $g(x) - (2x - 1) = \dfrac{3}{x^2 + 1}$, avec $3 > 0$ et $x^2 + 1 > 0$. Donc $g(x) - (2x - 1) > 0$: la différence ne s'annule jamais.

Conclusion. $\mathcal{C}_g$ est **au-dessus** de (D) sur $\mathbb{R}$, et elles n'ont aucun point commun.



La courbe de g(x) = 2x − 1 + 3/(x² + 1) reste au-dessus de la droite (D) : y = 2x − 1 et s'en rapproche aux deux bouts.

4.

Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = 2\sqrt{x} + 1$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{x}$. Interpréter géométriquement.

INDICE

Pour $x > 0$, sépare $\dfrac{h(x)}{x}$ en deux termes, puis simplifie $\dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

CORRIGÉ

Limite de h. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

Limite de $\dfrac{h(x)}{x}$. Pour tout $x > 0$, $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, donc :

$$\frac{h(x)}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}.$$

Les deux termes tendent vers 0 en $+\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{x} = 0$.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{x} = 0$: $\mathcal{C}_h$ admet au voisinage de $+\infty$ une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses**.

5.

Soit k la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $k(x) = 3x - \sqrt{x}$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{k(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(k(x) - 3x\big)$. Interpréter géométriquement.

INDICE

Factorise $k(x)$ par $\sqrt{x}$ pour la première limite, puis simplifie $\dfrac{k(x)}{x}$ et $k(x) - 3x$.

CORRIGÉ

Limite de k. Pour tout $x \geq 0$, $k(x) = \sqrt{x}\,(3\sqrt{x} - 1)$: les deux facteurs tendent vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = +\infty$.

Limite de $\dfrac{k(x)}{x}$. Pour tout $x > 0$, $\dfrac{k(x)}{x} = 3 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, qui tend vers 3. Ce n'est ni 0 ni l'infini : on étudie ensuite $k(x) - 3x$.

Limite de $k(x) - 3x$. Pour tout $x \geq 0$, $k(x) - 3x = -\sqrt{x}$, qui tend vers $-\infty$. Ce n'est pas une limite réelle : il n'y a pas d'asymptote oblique.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{k(x)}{x} = 3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(k(x) - 3x\big) = -\infty$: $\mathcal{C}_k$ admet au voisinage de $+\infty$ une **branche parabolique de direction la droite d'équation $y = 3x$**.