BURHAN

Dérivation et étude de fonctions

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/derivation-etude-fonctions/cours

Chapitre	Semestre
Dérivation et étude de fonctions	Semestre 1

Bienvenue : la pente, cette inconnue familière

Pour commencer

Salut, c'est le professeur Burhan.

Si la dérivation de 1ère t'a laissé un mauvais souvenir, tu n'es pas seul, et ce n'est pas grave : on reprend doucement, avec des nombres avant les formules.

Dans un grand taxi, l'aiguille du compteur indique la vitesse **à cet instant précis**, pas la moyenne du trajet. Cette vitesse « instantanée », c'est exactement la **dérivée**. Ici, on la complète, puis on s'en sert pour étudier une fonction de A à Z.

Devine : Une pente qui change

Sur la courbe de $y = x^2$, on passe de $(0, 0)$ à $(1, 1)$, puis à $(2, 4)$, puis à $(3, 9)$. À chaque pas de 1 vers la droite, la courbe monte de 1, puis de 3, puis de 5.

Que peux-tu dire de la pente de cette courbe ?

A. Elle est la même partout : c'est une seule courbe.

Faux.
Une droite a une pente unique. Ici, pour le même pas, la montée passe de 1 à 3, puis à 5 : la courbe se redresse.

B. Elle vaut 3 partout : c'est la moyenne des trois montées.

Faux.
Une moyenne décrit tout le trajet, pas un endroit précis. Entre 0 et 1, la courbe ne monte que de 1.

C. Elle change d'un point à l'autre : la courbe est de plus en plus raide.

Juste.
Pour le même pas, la montée grandit : la pente dépend de l'endroit où tu es.

D. On ne peut pas parler de pente : ce n'est pas une droite.

Faux.
On peut, et c'est tout l'objet du chapitre. On définit la pente **en un point** : c'est le nombre dérivé.

Correction
Elle change d'un point à l'autre. Près de 0, la courbe est presque plate ; vers 3, elle monte raide.

> Une droite a une seule pente. Une courbe en a une **en chaque point** : c'est le **nombre dérivé**, que ce chapitre t'apprend à calculer.

Mode d'emploi

Comment lire ce cours. Le cours avance par petites étapes. Réponds aux **Devine** et aux **À toi** avant d'ouvrir la réponse : se tromper ici ne coûte rien.

Arrête-toi sur les **Attention** : ce sont les erreurs qui coûtent des points. Les énoncés exacts sont repliés : ouvre-les pour les reconnaître. Les **Bonus** se sautent.

Parcours minimal, si le temps manque : dans chaque section, l'exemple guidé, l'encadré Attention et le Coin examen.

En quatre soirées :

- ☐ le nombre dérivé et la tangente (sections 2 à 5) ;
- ☐ les calculs : composée, réciproque, racines (6 à 9) ;
- ☐ variations, extremums, concavité (10 à 12) ;
- ☐ branches infinies et étude complète (13 à 15).

Méthode : Coin examen : ce chapitre au bac

Sur les 16 sujets nationaux étudiés, de 2016 à 2025, le problème d'étude de fonction valait de 7 à 11 points sur 20. Il contenait :

Question	Sujets
Calcul de $f'(x)$ (résultat presque toujours donné : « montrer que $f'(x) = \dots$ »), signe de f' et tableau de variations	16 sur 16
Limites aux bornes et leur interprétation géométrique	16 sur 16
Construction de la courbe	14
Branche parabolique	13
Position de la courbe et d'une droite	11
Concavité et points d'inflexion	7
Nombre dérivé de f^{-1} en un point	5

Dans ces sujets, les fonctions étudiées sont bâties sur le logarithme et l'exponentielle : deux fonctions que tu découvriras plus loin dans l'année. Ce chapitre t'apprend les méthodes sur des fonctions que tu connais déjà ; elles serviront telles quelles ensuite.

Le nombre dérivé : une pente en un point

Observe

Une route de montagne près d'Ifrane : entre deux villages, tu peux calculer une **pente moyenne**. Mais ce qui t'intéresse au volant, c'est la pente **là où tu es**.

Le nombre dérivé, c'est cette pente au point exact. **Objectif** : le calculer avec une limite, et savoir ce qu'il dit de la courbe.

Devine : La pente en A(2, 4)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, et le point d'abscisse $a = 2$. Entre 2 et $2 + h$, la pente moyenne est le **taux d'accroissement** :

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h}.$$

Le voici pour quelques valeurs de h :

h	1	$0{,}1$	$0{,}01$	$-0{,}1$
taux	5	$4{,}1$	$4{,}01$	$3{,}9$

Quand h se rapproche de 0, vers quel nombre le taux se rapproche-t-il ?

A. Vers 0, comme h.

Faux.
Le taux ne suit pas h : pour $h = 0{,}01$, il vaut $4{,}01$, loin de 0.

B. Vers 4, des deux côtés.

Juste.
À droite ($h > 0$), le taux descend vers 4 ; à gauche ($h < 0$), il monte vers 4.

C. Vers 5, la valeur pour $h = 1$.

Faux.
5 est la pente moyenne entre 2 et 3, sur un grand intervalle. Plus h est petit, plus le taux s'éloigne de 5.

D. Vers aucun nombre : pour $h = 0$, on diviserait par 0.

Faux.
On ne remplace pas h par 0 : on regarde ce que fait le taux quand h **s'approche** de 0. C'est une limite.

Correction
Vers 4. Le calcul le confirme. Pour tout réel $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \frac{(2+h)^2-4}{h}\\ &= \frac{4h+h^2}{h}\\ &= 4+h.\end{aligned}$$

Quand h tend vers 0, $4+h$ tend vers 4 : la pente de la courbe au point d'abscisse 2 vaut 4.

La définition

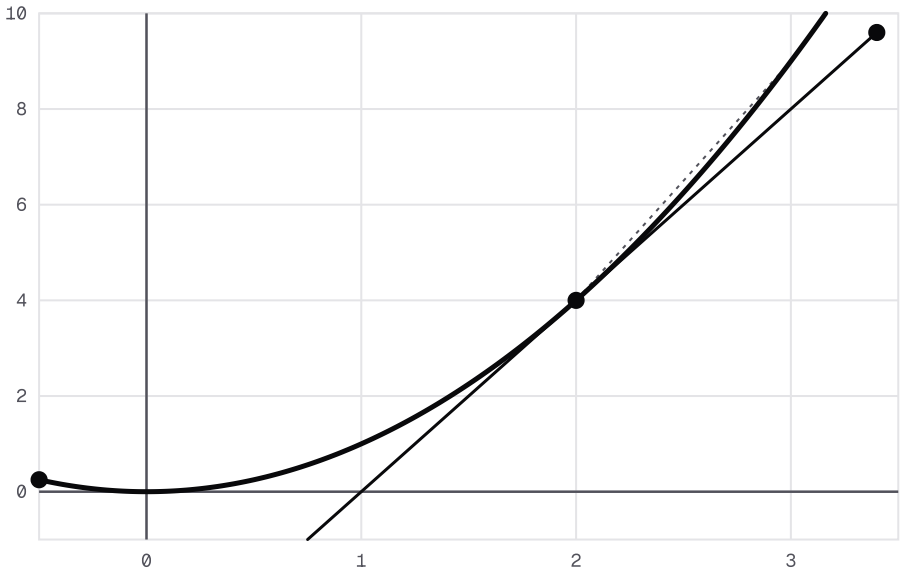
En clair. On regarde la pente moyenne sur un intervalle de plus en plus petit autour de a. Si elle se rapproche d'**un nombre réel**, ce nombre est le **nombre dérivé** $f'(a)$, et on dit que f est **dérivable** en a.

Définition : Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$.

On dit que f est **dérivable en** a lorsque le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite **réelle** quand x tend vers a. Cette limite est le **nombre dérivé** de f en a, noté $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$



La courbe de x ↦ x² et sa tangente T au point A(2, 4). La sécante qui joint A au point d'abscisse 3 a pour pente 5 ; quand ce point se rapproche de A, la pente s'approche de 4 = f′(2).

La méthode

Méthode : dérivabilité en un point

1. **Taux** : écris $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ et simplifie-le.
2. **Limite** : calcule sa limite quand h tend vers 0.
3. **Conclusion** : si la limite est un réel ℓ, alors f est dérivable en a et $f'(a)=\ell$. Si la limite est infinie ou n'existe pas, f n'est pas dérivable en a.

Exemple : Exemple guidé : 1/x en 2

Soit f la fonction définie pour $x \neq 0$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$, et $a=2$.

1. **Taux.** Pour $h \neq 0$ et $h \neq -2$, on réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned} f(2+h)-f(2) &= \frac{1}{2+h}-\frac{1}{2} \\ &= \frac{2-(2+h)}{2(2+h)} \\ &= \frac{-h}{2(2+h)}. \end{aligned}$$

   On divise ensuite par h :

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{-1}{2(2+h)}.$$

2. **Limite.** Quand h tend vers 0, $2(2+h)$ tend vers 4 : le taux tend vers $-\dfrac{1}{4}$.
3. **Conclusion.** f est dérivable en 2 et $f'(2)=-\dfrac{1}{4}$. La pente est négative : la courbe descend en ce point.

À toi

À toi : x³ en 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$. Montre que f est dérivable en 1 et calcule $f'(1)$. Écris les trois lignes de la méthode sur ta feuille, puis compare.

Indice 1
Taux : $\dfrac{(1+h)^3-1}{h}$. Commence par développer $(1+h)^3$.
Indice 2
$(1+h)^3=(1+2h+h^2)(1+h)=1+3h+3h^2+h^3$.
Indice 3
Après simplification par h, il reste $3+3h+h^2$. Que devient-il quand $h \to 0$?

Réponse

1. **Taux.** On développe : $(1+h)^3 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3$. Pour tout réel $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}&\frac{f(1+h) - f(1)}{h}\\ &= \frac{3h + 3h^2 + h^3}{h}\\ &= 3 + 3h + h^2.\end{aligned}$$

2. **Limite.** Quand h tend vers 0, $3 + 3h + h^2$ tend vers 3.

3. **Conclusion.** f est dérivable en 1 et $f'(1) = 3$.

Attention : f(a) et f'(a) ne sont pas le même nombre

✗ Faux	✓ Juste
« Pour $f : x \mapsto x^2$, $f'(3) = 9$. »	$f(3) = 9$ est une **hauteur** ; $f'(3) = 6$ est une **pente**.

La tangente passe par le point $(3, 9)$ et monte de 6 quand on avance de 1.

Le mot du prof. Retiens l'image : $f(a)$, c'est **où** tu es ; $f'(a)$, c'est **à quel point ça monte** là où tu es.

À droite, à gauche : quand la courbe fait un angle

Observe

Au bas d'un toboggan droit, la piste rejoint le sol en changeant de pente d'un coup : elle fait un **angle**. Une courbe peut faire pareil.

Objectif : savoir dire, avec deux limites, si la courbe a une vraie tangente ou un angle.

Si la section te paraît lourde, garde l'exemple guidé et le Coin examen : le reste sert surtout à lire les demi-tangentes quand tu traceras une courbe.

Devine : Un raccord entre deux morceaux

Voici une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ en deux morceaux :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Les deux morceaux se rejoignent au point $A(1, 2)$.

Juste à gauche de 1, la parabole arrive avec une pente 2 : la dérivée de $x \mapsto x^2 + 1$ est $x \mapsto 2x$, qui vaut 2 en 1. Juste à droite, la droite repart avec une pente 3.

Que fait la courbe en A ?

A. Elle a une tangente de pente $2{,}5$, la moyenne des deux.

Faux.
Aucune règle ne fait la moyenne des pentes. De chaque côté, la courbe garde sa propre pente : 2 à gauche, 3 à droite.

B. Elle saute : g n'est pas continue en 1.
Faux.
Pas de saut ici. À droite, $3x-1$ tend vers $3\times 1-1=2$, et $g(1)=2$: les morceaux se rejoignent.

C. Elle fait un angle : deux pentes différentes au même point.
Juste.
La courbe arrive avec une pente et repart avec une autre : un coin, comme au bas du toboggan.

D. Elle a une tangente verticale en A.
Faux.
Une tangente verticale viendrait d'un taux qui devient infini. Ici, les deux pentes sont des réels : 2 et 3.

Correction
Un angle. Les deux morceaux se rejoignent en $A(1,2)$, mais **pas avec la même pente** : 2 à gauche, 3 à droite.

Il n'y a pas une tangente, mais deux **demi-tangentes**. La suite le prouve par le calcul.

Une limite de chaque côté

En clair. Ici, on écrit le taux avec x au lieu de $a+h$: si $x=1+h$, alors $x-1=h$, c'est le même taux.

« $x\to 1^-$ » se lit : x s'approche de 1 en restant plus petit que 1 ; « $x\to 1^+$ », en restant plus grand.

On calcule le taux **de chaque côté**, chacun avec sa formule :

- mêmes limites réelles : f est dérivable ;
- limites réelles différentes : deux **demi-tangentes**, un angle ;
- limite infinie : demi-tangente **verticale**.

Définition : Dérivabilité à droite, à gauche

Soit f une fonction et a un réel.

- Si f est définie sur un intervalle $[a,a+\alpha[$ avec $\alpha>0$, f est **dérivable à droite en** a lorsque $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est un nombre réel, noté $f'_d(a)$.
- Si f est définie sur un intervalle $]a-\alpha,a]$ avec $\alpha>0$, f est **dérivable à gauche en** a lorsque $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est un nombre réel, noté $f'_g(a)$.

Propriété : Dérivabilité et dérivabilité latérale

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$.

f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a, avec $f'_d(a) = f'_g(a)$. On a alors $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Exemple : Exemple guidé : g en 1

On a $g(1) = 1^2 + 1 = 2$: on prend la première ligne, car $1 \leq 1$.

1. **À gauche.** Pour $x < 1$, on simplifie par $x - 1 \neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} &= \frac{(x^2 + 1) - 2}{x - 1} \\ &= \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= x + 1.\end{aligned}$$

   Ce taux tend vers 2. Donc $g'_g(1) = 2$.

2. **À droite.** Pour $x > 1$:

$$\begin{aligned}\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} &= \frac{(3x - 1) - 2}{x - 1} \\ &= \frac{3(x - 1)}{x - 1} = 3.\end{aligned}$$

   Donc $g'_d(1) = 3$.

3. **Conclusion.** $g'_g(1) \neq g'_d(1)$, donc g n'est pas dérivable en 1.

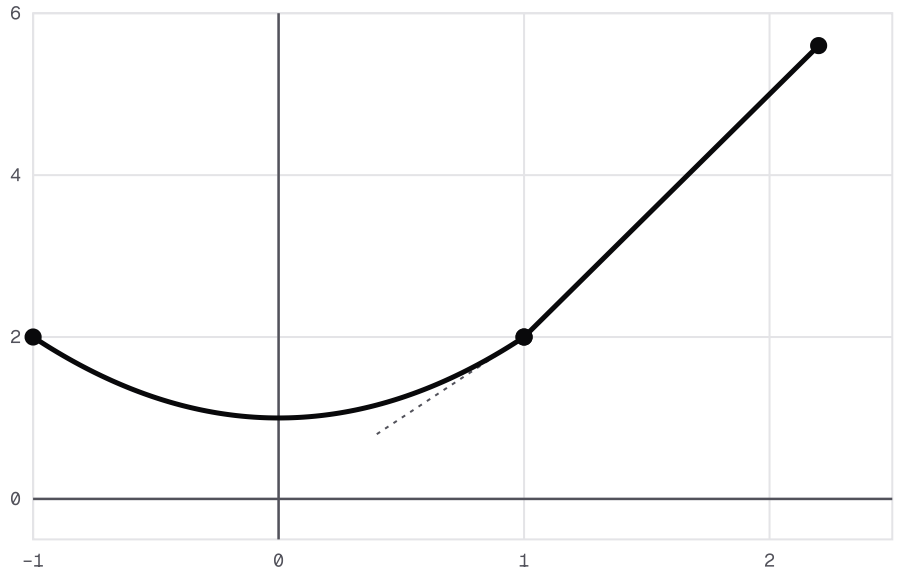
Les demi-tangentes

Propriété : Demi-tangentes et interprétation géométrique

Soit f une fonction continue en a, définie à droite de a.

- Si f est dérivable à droite en a, $\mathcal{C}_f$ admet au point $A(a, f(a))$ une **demi-tangente** à droite, de coefficient directeur $f'_d(a)$, d'équation $y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$ avec $x \geq a$.
- Si $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ ou $-\infty$, f n'est pas dérivable à droite en a, et $\mathcal{C}_f$ admet au point A une **demi-tangente verticale**.

On définit de même les demi-tangentes à gauche. Lorsque f est dérivable à droite et à gauche en a avec $f'_d(a) \neq f'_g(a)$, les deux demi-tangentes forment un angle : le point A est un **point anguleux**.



La courbe de g : la parabole arrive en A(1, 2) avec une pente 2 (demi-tangente à gauche, en trait fin), la droite en repart avec une pente 3. Deux demi-tangentes : A est un point anguleux.

Exemple : Exemple guidé (√x en 0) : la demi-tangente verticale

Soit f la fonction racine carrée, définie sur $[0, +\infty[$. À droite de 0, pour $h > 0$:

$$\frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

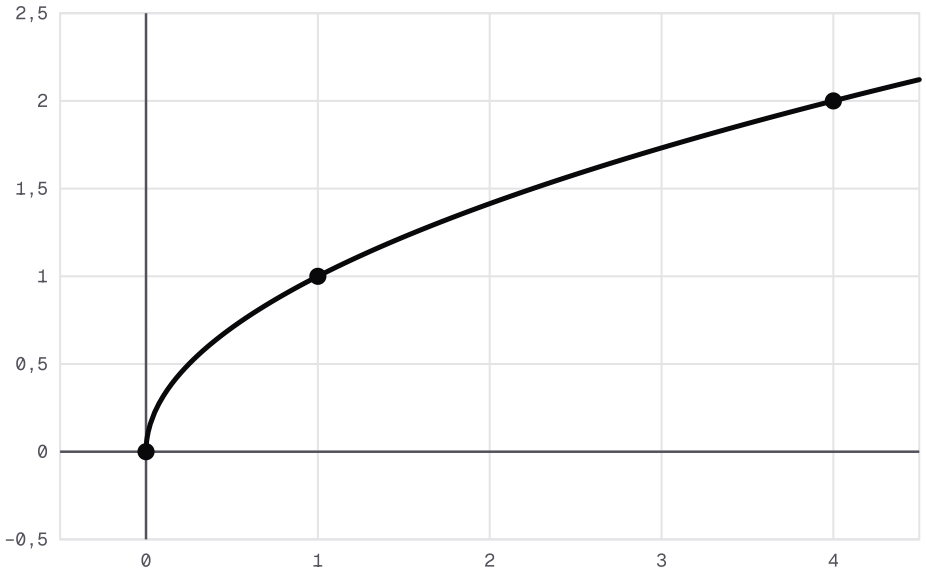
h	$0{,}01$	$0{,}0001$	$0{,}000001$
taux	10	100	1000

Le taux tend vers $+\infty$: f n'est pas dérivable à droite en 0.

Interprétation : la courbe admet en O une **demi-tangente verticale**.

Dans quel sens ? À droite de 0, la courbe monte : la demi-tangente est dirigée **vers le haut**. La règle, pour un taux qui tend vers l'infini :

- à droite de a : $+\infty$ donne une demi-tangente vers le haut, $-\infty$ vers le bas ;
- à gauche de a : c'est l'inverse.



La courbe de x ↦ √x part de l'origine O en se dressant à la verticale : la demi-tangente en O est portée par l'axe des ordonnées, dirigée vers le haut.

À toi

À toi : Un raccord sans angle

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$k(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On a $k(1) = 1$. À gauche, pour $x < 1$, le taux vaut $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$, qui tend vers 2.

Calcule le taux à droite, puis conclus : k est-elle dérivable en 1 ?

Indice 1

À droite, $x > 1$: utilise l'expression $2x - 1$, avec $k(1) = 1$.

Indice 2

$\dfrac{(2x - 1) - 1}{x - 1} = \dfrac{2x - 2}{x - 1}$. Factorise le numérateur.

Indice 3

Compare le nombre dérivé à droite avec celui de gauche, qui vaut 2.

Réponse

Oui. Pour $x > 1$:

$$\begin{aligned}&\frac{k(x)-k(1)}{x-1}\\&=\frac{(2x-1)-1}{x-1}\\&=\frac{2(x-1)}{x-1}=2.\end{aligned}$$

Donc $k'_d(1)=2$. Les deux nombres dérivés valent 2 : k est dérivable en 1 et $k'(1)=2$.

Interprétation : pas d'angle. La courbe admet au point $(1,1)$ une seule tangente, de coefficient directeur 2.

À toi : x√x en 0

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=x\sqrt{x}$. Étudie sa dérivabilité à droite en 0. Que peut-on conclure ?

A. f n'est pas dérivable à droite en 0 : demi-tangente verticale, comme pour $\sqrt{x}$.

Faux.

Le facteur x change tout. Le taux vaut $\sqrt{h}$, qui tend vers 0 : il ne devient pas infini.

B. f est dérivable à droite en 0, avec $f'_d(0)=0$: demi-tangente horizontale.

Juste.

Le taux $\dfrac{h\sqrt{h}}{h}=\sqrt{h}$ tend vers 0, un réel. Un nombre dérivé nul donne une demi-tangente horizontale.

C. f est dérivable à droite en 0, avec $f'_d(0)=1$.

Faux.

Le taux est $\sqrt{h}$, pas 1. Quand $h\to 0^+$, $\sqrt{h}\to 0$.

D. On ne peut rien dire : f n'est pas définie à gauche de 0.

Faux.

C'est pour cela qu'on étudie la dérivabilité **à droite** seulement. À droite de 0, f est bien définie.

Indice 1

Écris le taux $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ pour $h>0$, puis simplifie par h.

Correction

Pour $h>0$:

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{h\sqrt{h}}{h}=\sqrt{h}.$$

Quand h tend vers 0, $\sqrt{h}$ tend vers 0. Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=0$.

Interprétation : la courbe admet en O une demi-tangente **horizontale**.

Au bac

Méthode : Coin examen : dérivabilité en un point

Question relevée dans 2 des 16 sujets. Si l'énoncé ne donne pas la continuité en a, vérifie-la d'abord : sans elle, pas de dérivabilité.

Point anguleux (pour g en 1) :

> À gauche : $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} (x+1) = 2$.
>
> À droite : $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = 3$.
>
> Comme $g'_g(1) \neq g'_d(1)$, g n'est pas dérivable en 1.
>
> **Interprétation** : la courbe admet au point $A(1,2)$ une demi-tangente à gauche de coefficient directeur 2, une à droite de coefficient directeur 3 : point anguleux.

Demi-tangente verticale (pour $x \mapsto \sqrt{x}$ en 0) :

> $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, donc f n'est pas dérivable à droite en 0.
>
> **Interprétation** : la courbe admet en O une demi-tangente verticale, dirigée vers le haut.

Avec un nombre dérivé à droite réel, la demi-tangente a pour équation $y = f'_d(a)(x-a)+f(a)$, avec $x \geq a$; s'il vaut 0, elle est horizontale.

Barèmes relevés : dérivabilité, nombre dérivé et **interprétation** comptent chacun (souvent $0{,}25$).

Dérivable, donc continue (pas l'inverse)

Observe

Une phrase courte, mais qui évite des erreurs : une fonction **dérivable** en a n'a pas de saut en a. L'inverse est faux, et tu as déjà deux contre-exemples sous la main.

Devine : Que devient l'écart ?

Suppose f dérivable en a. Pour $x \neq a$, on peut écrire :

$$f(x)-f(a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times (x-a).$$

Par exemple, pour $f : x \mapsto x^2$, $a=3$ et $x=3{,}01$: le taux vaut $6{,}01$ et $x-a=0{,}01$, donc l'écart vaut $0{,}0601$.

Quand x tend vers a, le premier facteur tend vers $f'(a)$. Vers quoi tend $f(x)-f(a)$?

A. Vers $f'(a)$.
Faux.

Tu as oublié le second facteur. Un facteur qui tend vers un réel, fois un facteur qui tend vers 0, tend vers 0.

B. Vers l'infini : on a divisé par $x - a$, qui tend vers 0.

Faux.
La division par $x - a$ est compensée par la multiplication par $x - a$. Le premier facteur a une limite réelle : $f'(a)$.

C. Vers 0.

Juste.
$f'(a) \times 0 = 0$: le produit tend vers 0.

D. On ne peut pas savoir sans connaître f.

Faux.
Les limites des deux facteurs suffisent : $f'(a)$ et 0. Leur produit tend vers 0.

Correction
Vers 0. Le premier facteur tend vers $f'(a)$, le second vers 0. Donc $f(x) - f(a)$ tend vers $f'(a) \times 0 = 0$.

Autrement dit, $f(x)$ tend vers $f(a)$: f est **continue** en a. C'est la propriété qui suit.

La propriété et sa réciproque

Propriété : Dérivabilité et continuité

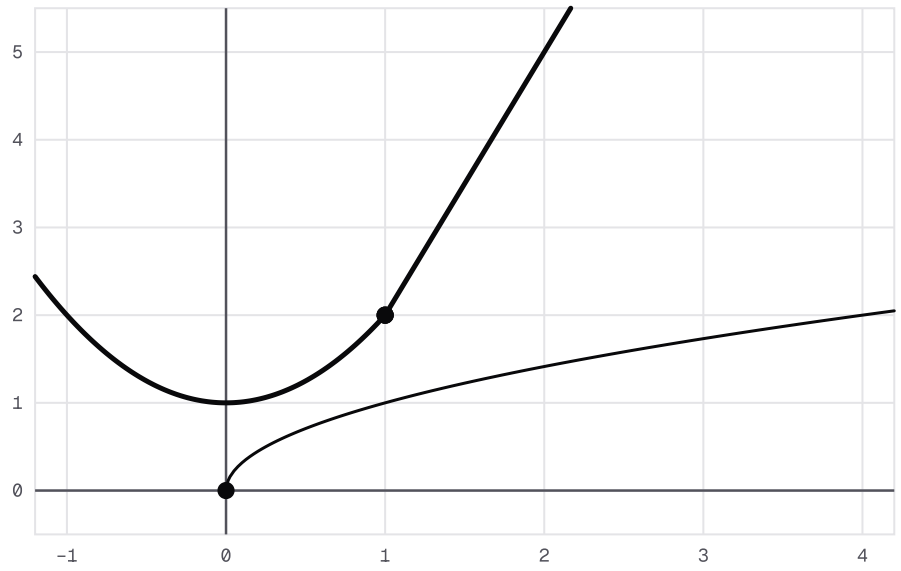
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

La réciproque est fausse : une fonction peut être continue en a sans y être dérivable.

Exemple : Deux fonctions continues mais non dérivables

- g, de la section précédente : continue en 1, mais avec deux demi-tangentes différentes.
- $x \mapsto \sqrt{x}$ en 0 : continue à droite, mais pas dérivable à droite, avec une demi-tangente verticale.

Dans les deux cas, la courbe ne saute pas, et pourtant il n'y a pas de tangente unique « normale ».



Les deux exemples côte à côte : la courbe de g fait un angle en A(1, 2), celle de √x se dresse à la verticale en O ; aucune ne saute.

Vérifie : Vrai ou faux

« Si f n'est pas continue en a, alors f n'est pas dérivable en a. » Vrai ou faux ?

A. Vrai : si f était dérivable en a, elle serait continue en a.

Juste.

C'est la contraposée de la propriété : on la lit à l'envers, en niant les deux parties.

B. Faux : la réciproque de la propriété est fausse.

Faux.

La réciproque, c'est « continue, donc dérivable » : elle est fausse, en effet. Mais la phrase proposée est la contraposée, et elle est vraie.

C. Vrai pour certaines fonctions seulement.

Faux.

Il n'y a pas d'exception : toute fonction dérivable en a est continue en a.

Correction

Vrai. C'est la **contraposée** de la propriété : si f était dérivable en a, elle serait continue en a.

Une fonction qui n'est pas continue en a n'y est donc pas dérivable.

La tangente, et la courbe vue de très près

Observe

Sur une carte du téléphone, zoome à fond sur une route qui tourne : à très grande échelle, elle a l'air **droite**.

Une courbe dérivable fait pareil : vue de très près, elle se confond avec sa **tangente**. **Objectif** : écrire l'équation de cette droite.

Devine : Un deuxième point sur la tangente

La tangente à la courbe de $x \mapsto x^2$ au point $A(2, 4)$ a pour coefficient directeur $f'(2) = 4$. Quel autre point est sur cette tangente ?

A. $(3, 9)$
Faux.
C'est un point de la **courbe**, car $3^2 = 9$. La tangente, elle, monte de 4 quand on avance de 1 : elle passe sous ce point.

B. $(3, 5)$
Faux.
Avancer de 1 fait monter de la pente, 4, pas de 1. On arrive à la hauteur $4 + 4 = 8$.

C. $(4, 4)$
Faux.
Ce point est à la même hauteur que A : il serait sur une droite horizontale, de pente 0.

D. $(3, 8)$
Juste.
De A, on avance de 1 et on monte de 4 : on arrive en $(3, 8)$.

Correction
$(3, 8)$**.** Une pente de 4 veut dire : quand x augmente de 1, y augmente de 4.

En partant de $A(2, 4)$, on arrive en $(3, 4 + 4) = (3, 8)$. L'équation qui suit fait ce calcul pour tout x.

L'équation de la tangente

Propriété : Tangente en un point

Soit f une fonction dérivable en a, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère.

La **tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point $A(a, f(a))$ est la droite qui passe par A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$. Son équation est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Méthode : équation de la tangente en a

1. **Valeur** : calcule $f(a)$.
2. **Pente** : calcule $f'(a)$.
3. **Équation** : remplace dans $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, puis développe.
4. **Vérification** : en $x = a$, tu dois retrouver $y = f(a)$.

Exemple : Exemple guidé : x² en 2

Pour $f : x \mapsto x^2$ et $a = 2$: $f(2) = 4$ et $f'(2) = 2 \times 2 = 4$. La tangente a pour équation :

$$\begin{aligned} y &= 4(x - 2) + 4 \\ &= 4x - 4. \end{aligned}$$

Vérification : en $x = 2$, $y = 4 = f(2)$. C'est la droite T de la figure de la section 2.

À toi

À toi : 1/x en 1

Soit f la fonction définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On rappelle que $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. Au point d'abscisse 1 de sa courbe, quelle est l'équation de la tangente ?

A. $y = -x + 1$

Faux.
Tu as oublié d'ajouter $f(1)$: $-(x - 1) = -x + 1$ n'est que le premier terme. Vérifie en $x = 1$: on trouve $y = 0$, alors que la courbe passe par $(1, 1)$.

B. $y = -x + 2$

Juste.
$f(1) = 1$ et $f'(1) = -1$, donc $y = -(x - 1) + 1 = -x + 2$. En $x = 1$, $y = 1$: c'est vérifié.

C. $y = x$

Faux.
Le signe de la pente est faux : $f'(1) = -\dfrac{1}{1^2} = -1$. La courbe descend en ce point.

D. $y = -x$

Faux.
Erreur de signe : $-(x - 1) = -x + 1$, pas $-x - 1$. Vérifie en $x = 1$: on trouve $y = -1$, pas 1.

Indice 1
Calcule $f(1)$ et $f'(1)$, puis remplace dans $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Correction
$y = -x + 2$**.** On a $f(1) = 1$ et $f'(1) = -1$. Donc :

$$y = -1 \times (x - 1) + 1$$
$$= -x + 2.$$

Vérification : en $x = 1$, $y = -1 + 2 = 1 = f(1)$.

Attention : l'équation se vérifie en x = a

✗ Faux	✓ Juste
Pour $x \mapsto x^2$ en 3 : $y = 6x + 9$	$y = 6(x - 3) + 9 = 6x - 9$

Test : en $x = 3$, la forme fausse donne 27, alors que la courbe passe par 9.

Bonus : calculer sans calculatrice

Propriété : Approximation affine

Si f est dérivable en a, alors pour h proche de 0 :

$$f(a + h) \approx f(a) + f'(a)\, h.$$

Plus précisément, $f(a + h) = f(a) + f'(a)\, h + h\, \varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. La fonction $h \mapsto f(a) + f'(a)\, h$ est l'**approximation affine** de f au voisinage de a ; on note aussi $\mathrm{d}y = f'(a)\, \mathrm{d}x$, et en un point quelconque $\mathrm{d}y = f'(x)\, \mathrm{d}x$.

Exemple : Bonus : calculer sans calculatrice

Approximation affine de $x \mapsto \sqrt{x}$ près de 4 : $f(4) = 2$ et $f'(4) = \dfrac{1}{4}$. Donc :

$$\sqrt{4{,}1} \approx 2 + \frac{1}{4} \times 0{,}1$$
$$= 2{,}025.$$

La calculatrice donne $2{,}0248\ldots$: l'erreur est inférieure à un millième.

Rappel express : dérivées usuelles et opérations

Le tableau des dérivées

Tout ça, tu l'as vu en 1ère. Ici, on le range proprement, parce que la suite en dépend à chaque ligne. Lis le tableau, puis passe aux exemples : c'est en calculant qu'on retient.

Définition : Fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I.

f est **dérivable sur** I lorsqu'elle est dérivable en tout point de I. La fonction qui à tout $x \in I$ associe $f'(x)$ est la **fonction dérivée** de f, notée f'.

On définit de même la dérivabilité sur $[a, b]$ avec la dérivabilité à droite en a et à gauche en b.

Propriété : Dérivées des fonctions usuelles

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Intervalle de dérivabilité
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$	chaque intervalle inclus dans l'ensemble de définition

Vérifie : Le bon intervalle

D'après le tableau, sur quel intervalle la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est-elle dérivable ?

A. Sur $\mathbb{R}$.

Faux.

$\sqrt{x}$ n'est même pas définie pour $x < 0$.

B. Sur $[0, +\infty[$, là où elle est définie.

Faux.

Elle est définie en 0, mais son taux en 0, $\dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$, tend vers $+\infty$: demi-tangente verticale, pas de nombre dérivé.

C. Sur $]-\infty, 0]$.

Faux.

Pour $x < 0$, $\sqrt{x}$ n'existe pas.

D. Sur $]0, +\infty[$.

Juste.

C'est l'intervalle donné par le tableau. En 0, le taux $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ tend vers $+\infty$: $\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

Correction

Sur $]0,+\infty[$**.** La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie en 0, mais pas dérivable en 0. Son taux $\dfrac{\sqrt{h}-0}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$ tend vers $+\infty$ quand h tend vers 0^+ : c'est la demi-tangente verticale de la section 3.

Chaque formule va avec son intervalle : regarde la dernière colonne du tableau.

Les opérations

Propriété : Opérations sur les fonctions dérivables

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel.

- $u+v$, $k\,u$ et $u\,v$ sont dérivables sur I : $(u+v)' = u'+v'$, $(k\,u)' = k\,u'$, $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$.
- Si v ne s'annule pas sur I, $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables sur I : $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$.
- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$; toute fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Exemple : Exemples guidés : un produit et un quotient

1. **Produit.** Pour tout réel x, $f(x) = (x^2+1)(3x-2)$. On pose $u(x) = x^2+1$ et $v(x) = 3x-2$:
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(3x-2) \\ &\quad + 3(x^2+1) \\ &= 9x^2 - 4x + 3. \end{aligned}$$
2. **Quotient.** Pour $x > 3$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$. On pose $u(x) = 2x+1$ et $v(x) = x-3$:
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x-3) - (2x+1)}{(x-3)^2} \\ &= \frac{-7}{(x-3)^2}. \end{aligned}$$
3. **Termes en $\dfrac{1}{x^2}$.** Avec $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ et $v(x) = x^2$, pour $x \neq 0$:
$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}.$$
Pour $x \neq 0$, soit $f(x) = x + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}$: f est dérivable sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$, et :
$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} \\ &= \frac{x^3 - 2x + 2}{x^3}. \end{aligned}$$
Dériver terme à terme est souvent plus court que la formule du quotient.

À toi

À toi : Un quotient à atteindre

Soit f la fonction définie sur $I = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{2x-1}$. Montre que, pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = \frac{-5}{(2x-1)^2}.$$

Indice 1

C'est un quotient $\dfrac{u}{v}$: écris u, u', v, v', et vérifie que $v \neq 0$ sur l'intervalle.

Indice 2

$f'(x) = \dfrac{1 \times (2x-1) - (x+2) \times 2}{(2x-1)^2}$.

Indice 3

Au numérateur, le moins s'applique à toute la parenthèse : $-(x+2) \times 2 = -2x - 4$.

Réponse

On pose $u(x) = x + 2$ et $v(x) = 2x - 1$: $u'(x) = 1$, $v'(x) = 2$, et $v(x) \neq 0$ sur I.

f est dérivable sur I comme **quotient** de fonctions dérivables. Pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} & f'(x) \\ &= \frac{(2x-1) - 2(x+2)}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{2x - 1 - 2x - 4}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{-5}{(2x-1)^2}. \end{aligned}$$

Attention : le produit et le signe moins du quotient

✗ Faux	✓ Juste
$(u\,v)' = u'\,v'$	$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$
$-(2x+1) = -2x + 1$	$-(2x+1) = -2x - 1$

Pour le produit, contre-exemple : $x \times x = x^2$. La règle fausse donne $1 \times 1 = 1$, la vraie $2x$.

Pour le quotient, le moins devant la parenthèse change **tous** les signes. Ainsi $2(x-3) - (2x+1) = 2x - 6 - 2x - 1 = -7$.

Au bac

Méthode : Coin examen : « Montrer que f'(x) = … »

Le calcul de $f'(x)$ figurait dans les 16 sujets étudiés, et le résultat y était presque toujours donné : à toi de **l'atteindre**.

> f est dérivable sur $]3,+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas.
>
> Pour tout $x>3$: $f'(x)=\dfrac{2(x-3)-(2x+1)}{(x-3)^2}$, soit $f'(x)=\dfrac{-7}{(x-3)^2}$.

Les barèmes relevés notent séparément la formule de dérivation et le calcul. Si tu bloques, garde quand même l'expression donnée pour la suite.

La dérivée d'une composée : des vitesses qui se multiplient

Observe

Un petit taxi roule à 2 km par minute ; son compteur ajoute 3 dirhams par kilomètre. Deux « vitesses » se suivent : les kilomètres par minute, puis les dirhams par kilomètre.

Objectif : dériver n'importe quelle composée, sans oublier un facteur.

Devine : Le prix du trajet

Le taxi roule à 2 km par minute, et le compteur ajoute 3 dirhams par kilomètre. De combien de dirhams le prix monte-t-il chaque minute ?

A. 5 dirhams : $3+2$.

Faux.
Additionner des dirhams par kilomètre et des kilomètres par minute n'a pas de sens : les unités ne collent pas.

B. $1{,}5$ dirham : $3\div 2$.

Faux.
En une minute, le taxi fait 2 km, pas un demi-kilomètre. Le prix monte donc plus vite que 3 dirhams par minute.

C. 6 dirhams : 3×2.

Juste.
Chaque minute, 2 km ; chaque kilomètre, 3 dirhams. Donc $2\times 3=6$ dirhams par minute.

D. 3 dirhams : le prix du kilomètre.

Faux.
3 dirhams, c'est pour **un** kilomètre. En une minute, le taxi en parcourt 2.

Correction
6 **dirhams par minute** : les vitesses se **multiplient**, $3\times 2=6$.

> Une composée, c'est pareil. Pour $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$, on calcule d'abord $u = x^2+1$, puis $\sqrt{u}$. Sa dérivée est le **produit** des deux « vitesses » : celle de la racine, puis celle de u.

La formule

Théorème : Dérivée d'une fonction composée

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle J tel que $u(I) \subset J$.

Alors $v \circ u$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$:

$$(v \circ u)'(x) = v'\big(u(x)\big) \times u'(x).$$

En clair. On dérive la fonction **extérieure** (en gardant l'intérieur tel quel), puis on **multiplie** par la dérivée de l'**intérieur**. C'est ce dernier facteur qu'on oublie le plus souvent.

Propriété : Dérivées composées usuelles

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, $n \in \mathbb{N}^*$, et a, b deux réels.

- $(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$ sur I.
- Si $u > 0$ sur I : $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- Si u ne s'annule pas sur I : $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{n\,u'}{u^{n+1}}$.
- $\big(\cos(ax+b)\big)' = -a\sin(ax+b)$ et $\big(\sin(ax+b)\big)' = a\cos(ax+b)$ sur $\mathbb{R}$.

Méthode : dériver une composée

1. **Repère** l'intérieur $u(x)$ et l'extérieur.
2. **Écris** u et u'.
3. **Applique** la formule : dérivée de l'extérieur, évaluée en u, fois u'.
4. **Précise** l'intervalle : par exemple $u > 0$ pour $\sqrt{u}$.

Exemple : Exemples guidés : quatre formes

1. $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$, étape par étape :
   - **Repère** : intérieur $u(x) = x^2+1$, extérieur la racine carrée.
   - **Écris** : $u'(x) = 2x$.
   - **Applique** $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$: le calcul est ci-dessous.
   - **Précise** : c'est valable sur $\mathbb{R}$, car $x^2+1 > 0$.

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x^2+1}\right)' &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.\end{aligned}$$

2. $x \mapsto (2x+1)^5$: $u(x) = 2x+1$, $u'(x) = 2$, et $(u^5)' = 5u^4\,u'$. Donc :

$$\begin{aligned}\left((2x+1)^5\right)' &= 5(2x+1)^4 \times 2 \\ &= 10(2x+1)^4.\end{aligned}$$

3. $\big(\cos(3x+1)\big)' = -3\sin(3x+1)$ (fonctions trigonométriques : non relevées dans les 16 sujets).
4. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$: $u(x) = x^2+1$, $u'(x) = 2x$, et $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$. Donc :

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Une composée cachée dans un produit

Exemple : Exemple guidé : une composée dans un produit

Au bac, la composée arrive rarement seule. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\sqrt{x^2+5}$. Montrons que, pour tout réel x :

$$h'(x) = \frac{2x^2+5}{\sqrt{x^2+5}}.$$

1. **Produit** $u\,v$, avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x^2+5}$. Ici $x^2+5 > 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. **Composée** pour v : $v'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+5}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}$.
3. **Règle du produit**, puis même dénominateur :

$$\begin{aligned}h'(x) &= 1 \times \sqrt{x^2+5} \\ &\quad + x \times \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} \\ &= \frac{(x^2+5)+x^2}{\sqrt{x^2+5}} \\ &= \frac{2x^2+5}{\sqrt{x^2+5}}.\end{aligned}$$

Les barèmes relevés notent séparément la formule de dérivation et le calcul : écris d'abord la règle, puis calcule.

À toi

À toi : Une puissance de x² + 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2+1)^3$. Dérive-la avec la méthode en quatre étapes.

Indice 1
Intérieur : $u = x^2 + 1$. Extérieur : la puissance 3. Écris u'.
Indice 2
Formule de la composée : $(u^3)' = 3u^2\,u'$.
Indice 3
Ne t'arrête pas à $3(x^2+1)^2$: il manque le facteur u'.

Réponse
Règle de la composée. On pose $u(x) = x^2 + 1$, d'où $u'(x) = 2x$ sur $\mathbb{R}$. Avec $(u^3)' = 3u^2\,u'$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x^2+1)^2 \times 2x \\ &= 6x(x^2+1)^2. \end{aligned}$$

À toi : Une racine à dériver

Soit f la fonction définie sur $]2, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x-4}$. Quelle est l'expression de $f'(x)$?

A. $\dfrac{1}{2\sqrt{2x-4}}$
Faux.
C'est la dérivée de la racine, sans le facteur $u' = 2$: la dérivée intérieure manque.

B. $\sqrt{2}$
Faux.
La racine ne se dérive pas morceau par morceau. Utilise $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

C. $\dfrac{2}{\sqrt{2x-4}}$
Faux.
Tu as bien multiplié par $u' = 2$, mais oublié le 2 du dénominateur de $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

D. $\dfrac{1}{\sqrt{2x-4}}$
Juste.
$u' = 2$, donc $\dfrac{2}{2\sqrt{2x-4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x-4}}$.

Correction

Règle de la composée. On pose $u(x) = 2x - 4$: $u(x) > 0$ sur $]2, +\infty[$ et $u'(x) = 2$. Pour tout $x > 2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \\ &= \frac{2}{2\sqrt{2x-4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x-4}}. \end{aligned}$$

Le facteur oublié

Attention : la dérivée intérieure

✗ Faux	✓ Juste
$\left((x^2+1)^2\right)' = 2(x^2+1)$	$\left((x^2+1)^2\right)' = 2(x^2+1) \times 2x$

Vérifie en $x = 1$ avec la forme développée $x^4 + 2x^2 + 1$: sa dérivée $4x^3 + 4x$ vaut 8.

La forme juste donne 8, la fausse 4.

Le mot du prof. Plus loin dans l'année, tu dériveras le logarithme et l'exponentielle avec ce même schéma : extérieur, puis intérieur. Si ces calculs te paraissent longs la première fois, c'est normal ; à la cinquième, ils deviennent automatiques.

La dérivée de la réciproque : la pente vue dans le miroir

Observe

Tu te souviens du miroir $y = x$ de la Continuité : la courbe de f^{-1} est le reflet de celle de f. Que devient une pente dans ce miroir ?

Objectif : calculer $(f^{-1})'(b)$ sans connaître f^{-1}. Question tombée dans 5 des 16 sujets.

Devine : Une pente dans le miroir

Une droite monte de 4 quand on avance de 1 : sa pente vaut 4. On la reflète dans le miroir $y = x$, qui échange les rôles de x et de y. Quelle est la pente de la droite reflétée ?

A. -4

Faux.
Le miroir $y = x$ ne change pas une montée en descente : une droite qui monte donne une droite qui monte.

B. 4

Faux.
Le miroir échange « avancer » et « monter ». Le reflet monte de 1 quand on avance de 4 : il est moins raide.

C. $\frac{1}{4}$
Juste.
On échange « avancer de 1 » et « monter de 4 » : le reflet avance de 4 et monte de 1.

D. $-\frac{1}{4}$
Faux.
L'inverse est juste, pas le signe moins : une droite qui monte reste une droite qui monte.

Correction
$\frac{1}{4}$**.** Le miroir échange « avancer » et « monter » : le reflet monte de 1 quand on avance de 4. Sa pente est l'**inverse** de 4.

Pour f^{-1}, ce sera pareil : sa pente est l'inverse de celle de f au point symétrique, quand cette pente n'est pas nulle.

Le théorème

Remarque : Petit rappel : la fonction réciproque

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, elle admet une réciproque f^{-1} définie sur $J = f(I)$.

Pour $a \in I$ et $b \in J$, $f^{-1}(b) = a$ veut dire $f(a) = b$.

Théorème : Dérivée de la fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et $J = f(I)$. Soit $a \in I$ et $b = f(a)$.

- Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et
$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$
- Si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et $\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

En clair. Pour la pente de f^{-1} en b, on cherche d'abord **l'antécédent** a de b par f, puis on prend l'inverse de $f'(a)$. Il faut $f'(a) \neq 0$: on ne divise pas par zéro.

La méthode

Méthode : nombre dérivé de f⁻¹ en b

1. **Antécédent** : trouve a tel que $f(a) = b$. L'énoncé le donne souvent ; sinon, essaie des valeurs simples (0, 1, -1, 2), ou résous l'équation $f(x) = b$ sur I.
2. **Condition** : vérifie que f est dérivable en a et que $f'(a) \neq 0$.
3. **Conclusion** : f^{-1} est dérivable en b et $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Exemple : Exemple guidé : x³ + x en 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x$. C'est un polynôme : f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et admet une réciproque.

1. **Antécédent** : $f(1) = 1 + 1 = 2$, donc $a = 1$.
2. **Condition** : $f'(1) = 4 \neq 0$.
3. **Conclusion** : f^{-1} est dérivable en 2 et $\left(f^{-1}\right)'(2) = \dfrac{1}{4}$.

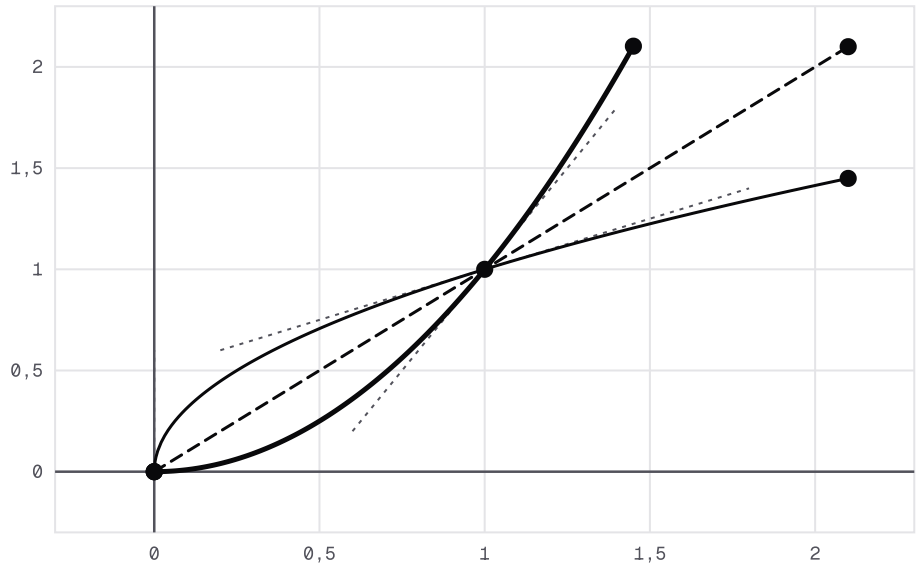
Attention : l'antécédent, pas b lui-même

Pour la fonction $f : x \mapsto x^3 + x$ de l'exemple, avec $b = 2$:

✗ Faux	✓ Juste
$\left(f^{-1}\right)'(2) = \dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{1}{13}$	$\left(f^{-1}\right)'(2) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{4}$, car $f(1) = 2$

On dérive f en l'antécédent 1, jamais en b lui-même.

Le miroir



Au point (1, 1), la tangente à la courbe de x² a pour pente 2, et celle de sa réciproque √x pour pente 1/2 : les deux tangentes sont symétriques par rapport à y = x. En (0, 0), la tangente horizontale de x² devient la demi-tangente verticale de √x, tracée sur l'axe des ordonnées.

Propriété : Dérivée nulle et réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, dérivable en $a \in I$, et $b = f(a)$.

Si $f'(a) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en b : la courbe de f^{-1} admet au point (b, a) une **tangente verticale** (une demi-tangente verticale si a est une borne de I), symétrique de la tangente horizontale de $\mathcal{C}_f$ au point (a, b) par rapport à la droite $y = x$.

Méthode : Coin examen : quand f'(a) = 0

La règle. Si $f'(a) = 0$, avec $b = f(a)$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en b : c'est l'énoncé ci-dessus.

Interprétation : la courbe de f^{-1} admet au point (b, a) une tangente verticale, ou une demi-tangente verticale si b est une borne.

Exemple. Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^2$: $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$. Sa réciproque est $x \mapsto \sqrt{x}$. Son taux en 0 vaut $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$, qui tend vers $+\infty$: on le retrouve.

> $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$, donc f^{-1} n'est pas dérivable à droite en 0.
>
> **Interprétation** : la courbe de f^{-1} admet au point $O(0, 0)$ une demi-tangente verticale.

La courbe de f^{-1} a été demandée dans 3 des 16 sujets, et sa demi-tangente verticale y était notée.

À toi

À toi : x² + 2x en 8

Soit f la fonction définie sur $I = [-1, +\infty[$ par $f(x) = x^2 + 2x$. Pour tout $x \in I$, $f'(x) = 2x + 2 \geq 0$, et f' ne s'annule qu'en -1. Donc f est continue et strictement croissante sur I, et admet une réciproque.

Calcule $\left(f^{-1}\right)'(8)$.

Indice 1
Antécédent d'abord : résous $x^2 + 2x = 8$, c'est-à-dire $(x-2)(x+4) = 0$.
Indice 2
Garde seulement la solution qui est dans I.
Indice 3
Vérifie que $f'(a) \neq 0$ avant de prendre l'inverse.

Réponse

1. **Antécédent.** On résout $x^2 + 2x = 8$, c'est-à-dire $(x-2)(x+4) = 0$: $x = 2$ ou $x = -4$. Or $-4 < -1$: seul 2 est dans I, donc $a = 2$.
2. **Condition.** f est dérivable en 2 et $f'(2) = 6 \neq 0$.
3. **Conclusion.** f^{-1} est dérivable en 8 et $\left(f^{-1}\right)'(8) = \dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{1}{6}$.

À toi : Le cube en 8

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^3$: f est continue, strictement croissante, et $f'(x) = 3x^2$. Que vaut $\left(f^{-1}\right)'(8)$?

A. $\dfrac{1}{192}$
Faux.
Tu as calculé $\dfrac{1}{f'(8)}$. Il faut dériver en l'antécédent de 8, c'est-à-dire 2.

B. 12
Faux.
$12 = f'(2)$ est la pente de f. Celle de f^{-1} en est l'inverse.

C. $\dfrac{1}{3}$
Faux.
$\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{f'(1)}$. Or 1 n'est pas l'antécédent de 8 : $f(1) = 1$.

D. $\dfrac{1}{12}$
Juste.

$f(2) = 8$, donc $a = 2$, et $f'(2) = 12 \neq 0$. L'inverse donne $\dfrac{1}{12}$.

Correction
$\dfrac{1}{12}$.

- **Antécédent** : $f(2) = 8$, donc $a = 2$.
- **Condition** : $f'(2) = 3 \times 2^2 = 12 \neq 0$.
- **Conclusion** : f^{-1} est dérivable en 8 et $\left(f^{-1}\right)'(8) = \dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{1}{12}$.

Au bac

Méthode : Coin examen : nombre dérivé de f⁻¹

Rédaction modèle, pour $f : x \mapsto x^3 + x$:

> On a $f(1) = 2$. f est dérivable en 1 et $f'(1) = 4 \neq 0$.
>
> Donc f^{-1} est dérivable en 2 et $\left(f^{-1}\right)'(2) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{4}$.

Dans les barèmes relevés : $0{,}25$ pour la dérivabilité de f^{-1}, puis le calcul.

L'expression de $f^{-1}(x)$ n'a été demandée dans aucun des sujets étudiés.

Le mot du prof. Le réflexe à garder : **« antécédent d'abord »**. Avec lui, cette question devient l'une des plus sûres du problème.

Racines n-ièmes et puissances : les dérivées

Observe

Dans la Continuité, tu as rencontré $\sqrt[n]{x}$ et x^r. Ici, juste leurs dérivées : cinq minutes, pas plus.

La dérivée de $\sqrt{x}$ a été demandée dans 1 des 16 sujets ; celles de $\sqrt[n]{x}$ pour $n \geq 3$ et de x^r, dans aucun. La dérivée de x^r est un **Bonus**.

Devine : La pente de la racine cubique

La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est la réciproque de $f : x \mapsto x^3$ sur $]0, +\infty[$. Avec la section précédente, que vaut sa pente au point d'abscisse 27 ?

A. $\dfrac{1}{27}$

Juste.
$f(3) = 27$ et $f'(3) = 27$: l'inverse donne $\dfrac{1}{27}$.

B. $\dfrac{1}{2187}$

Faux.
C'est $\dfrac{1}{f'(27)} = \dfrac{1}{3 \times 27^2}$: tu as dérivé en 27 au lieu de l'antécédent 3.

C. 27

Faux.
$27 = f'(3)$ est la pente de x^3 au point d'abscisse 3. Celle de la réciproque en est l'inverse.

D. 3

Faux.
$3 = \sqrt[3]{27}$ est la **valeur** de la racine cubique en 27, pas sa pente.

Indice 1
Antécédent d'abord : quel nombre a pour cube 27 ?

Correction
$\dfrac{1}{27}$. Antécédent : $3^3 = 27$, donc $a = 3$. Condition : $f'(3) = 3 \times 3^2 = 27 \neq 0$. Donc :

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)'(27) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{27}.$$

La formule qui suit donne le même nombre, sans passer par x^3.

La racine n-ième

Propriété : Dérivée de la racine n-ième

Soit n un entier, $n \geq 2$.

- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

- Si u est dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors $\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ sur I.

Exemple : Exemple guidé : la racine cubique

Avec $n = 3$, pour tout $x > 0$:

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

En $x = 8$: $\sqrt[3]{64} = 4$, donc $\left(\sqrt[3]{x}\right)'(8) = \dfrac{1}{3 \times 4} = \dfrac{1}{12}$.

C'est la valeur trouvée pour $\left(f^{-1}\right)'(8)$ avec $f : x \mapsto x^3$: normal, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ **est** la réciproque de $x \mapsto x^3$.

Bonus : les puissances rationnelles

Propriété : Dérivée d'une puissance rationnelle

Soit r un rationnel non nul.

La fonction $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $(x^r)' = r\,x^{r-1}$.

Si u est dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors $(u^r)' = r\,u^{r-1}\,u'$ sur I.

Exemple : Bonus : une puissance d'exposant 3/2

Avec $r = \dfrac{3}{2}$, pour tout $x > 0$:

$$\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}\,x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

En $x = 4$, la pente vaut $\dfrac{3}{2} \times 2 = 3$.

À toi : Bonus : une puissance d'exposant 2/3

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$. Dérive-la, et écris le résultat avec une racine cubique.

Indice 1

Formule : $(x^r)' = r\,x^{r-1}$, avec $r = \dfrac{2}{3}$.

Indice 2

$\dfrac{2}{3} - 1 = -\dfrac{1}{3}$, et $x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Réponse

Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{3}\,x^{\frac{2}{3}-1} \\ &= \frac{2}{3}\,x^{-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}. \end{aligned}$$

Signe de f′ et variations : lire la pente

Observe

Sur l'application GPS, le profil de la route du Tizi n'Tichka montre où ça monte et où ça descend. Pour une fonction, c'est la même lecture : le **signe de f'** donne le **sens de variation**.

Objectif : dresser un tableau de variations juste, du premier coup.

Devine : Une pente négative

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$. On a $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$. Sur $]-1, 1[$, ce produit est négatif. Que fait f sur $[-1, 1]$?

A. Elle descend jusqu'à 0, puis remonte, comme f'.

Faux.
Ce sont les variations de f' : elle décroît jusqu'à 0, puis croît. Pour f, seul le **signe** de f' compte.

B. Elle prend des valeurs négatives.

Faux.
Le signe de f' ne donne pas celui de f. Par exemple, $f(-0{,}5) = 1{,}375 > 0$.

C. On ne peut rien dire sans tracer la courbe.

Faux.
Le signe de la pente suffit : c'est tout l'intérêt de la dérivée.

D. Elle descend.

Juste.
Une pente négative en chaque point : la courbe descend, de $f(-1) = 2$ à $f(1) = -2$.

Correction
Elle descend. Sur $]-1, 1[$, $f'(x) < 0$: la pente est négative en chaque point.

Donc f est décroissante sur $[-1, 1]$, de $f(-1) = 2$ à $f(1) = -2$. Le théorème qui suit dit cela pour toute fonction dérivable sur un intervalle.

Du signe aux variations

Remarque : Petit rappel : le signe d'un produit, d'un trinôme

- **Produit** : pour $(x-1)(x+1)$, chaque facteur change de signe en sa racine ; une ligne par facteur dans le tableau de signes. Un carré comme $(x-1)^2$ est positif, nul seulement en 1.
- **Puissances** : pour $x \neq 0$, $x^2 > 0$ et $x^4 > 0$, des deux côtés de 0. Une puissance impaire garde le signe : x^3 est négatif pour $x < 0$ et positif pour $x > 0$; de même, $(x-1)^3$ a le signe de $x - 1$.
- **Trinôme** $ax^2 + bx + c$: si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, il a deux racines ; il est du signe de a **à l'extérieur** des racines et du signe opposé **entre** elles. Si $\Delta < 0$, il garde le signe de a.

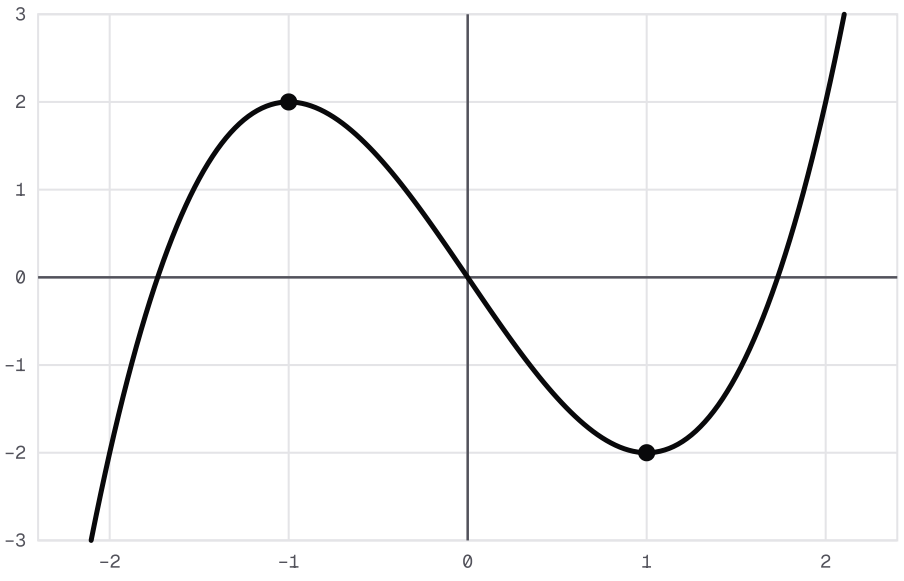
Théorème : Signe de la dérivée et variations

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, et si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points de I, alors f est **strictement croissante** sur I.
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, et si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points de I, alors f est **strictement décroissante** sur I.

- f est **constante** sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

En clair. Sur un intervalle : $f' > 0$, ça monte ; $f' < 0$, ça descend. Si f' s'annule seulement en quelques points isolés, la monotonie stricte reste vraie. D'où la règle d'or : **factorise** f', c'est son signe qui compte.



La courbe de x ↦ x³ – 3x : entre les abscisses –1 et 1, là où la dérivée est négative, elle descend du point (–1, 2) au point (1, –2).

La méthode

Méthode : tableau de variations

1. **Domaine** : ensemble de définition et intervalle de dérivabilité.
2. **Dérivée** : calcule $f'(x)$ et factorise-la.
3. **Signe** : étudie le signe de chaque facteur.
4. **Tableau** : signe de f', flèches, puis valeurs et limites aux bornes.

Exemple : Exemple guidé : x³ – 3x

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$.

1. **Dérivée.** Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3 \\ &= 3(x-1)(x+1). \end{aligned}$$

2. **Signe.** f' est positive sur $]-\infty,-1[$ et sur $]1,+\infty[$, négative sur $]-1,1[$.
3. **Valeurs.** $f(-1)=-1+3=2$ et $f(1)=1-3=-2$.
4. **Limites.** Un polynôme se comporte comme son terme de plus haut degré, x^3 : f tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$.

Variations de f(x) = x³ − 3x : croissante jusqu'à −1 (valeur 2), décroissante jusqu'à 1 (valeur −2), puis croissante.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

À toi

À toi : Une somme sur]0, +∞[

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$. Par la règle de la somme, pour tout $x>0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1-\frac{4}{x^2} \\ &= \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}. \end{aligned}$$

Étudie le signe de $f'(x)$, puis les variations de f.

Indice 1
Sur $]0,+\infty[$, deux facteurs ont un signe connu d'avance : lesquels ?
Indice 2
$x+2>0$ et $x^2>0$: le signe de $f'(x)$ est celui de $x-2$.
Indice 3
Calcule $f(2)$ pour compléter le tableau.

Réponse
Sur $]0,+\infty[$, $x+2>0$ et $x^2>0$: $f'(x)$ a le signe de $x-2$. Il est négatif sur $]0,2[$ et positif sur $]2,+\infty[$.

Donc f est strictement décroissante sur $]0,2]$ et strictement croissante sur $[2,+\infty[$, avec $f(2)=2+\dfrac{4}{2}=4$.

À toi : Une racine retranchée

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x-2\sqrt{x}$. Par la règle de la somme, pour tout $x>0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1-\frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Quelles sont les variations de f ?

A. Décroissante sur $]0,1]$, croissante sur $[1,+\infty[$.

Juste.

$\sqrt{x}>0$: $f'(x)$ a le signe de $\sqrt{x}-1$, négatif avant 1, positif après.

B. Croissante sur $]0,1]$, décroissante sur $[1,+\infty[$.

Faux.

Ordre inversé. Teste $x=\frac{1}{4}$: $\sqrt{x}-1=-\frac{1}{2}<0$, donc f décroît avant 1.

C. Croissante sur $]0,+\infty[$, car $\sqrt{x}>0$.

Faux.

$\sqrt{x}>0$ donne le signe du dénominateur seulement. Le numérateur $\sqrt{x}-1$ change de signe en 1.

D. Décroissante sur $]0,4]$, croissante sur $[4,+\infty[$.

Faux.

En 4, c'est f qui s'annule : $4-2\times 2=0$. Or le tableau dépend de l'endroit où f' s'annule, c'est-à-dire $\sqrt{x}=1$.

Correction

Décroissante sur $]0,1]$, croissante sur $[1,+\infty[$.

Pour $x>0$, $\sqrt{x}>0$: $f'(x)$ a le signe de $\sqrt{x}-1$. Ce signe est négatif sur $]0,1[$ et positif sur $]1,+\infty[$.

Minimum : $f(1)=1-2=-1$.

Attention : domaine et cohérence du tableau

✗ Faux	✓ Juste
Pour $x\mapsto x+\frac{4}{x}$ sur $]0,+\infty[$, placer -2 dans le tableau	$-2\notin\ ]0,+\infty[$: commence toujours par le domaine.
Un signe $+$ sous une flèche qui descend	$f'>0$: la flèche **monte**. Relis chaque colonne avant de rendre.

Au bac

Méthode : Coin examen : signe de f′ avec une fonction auxiliaire

Dans 6 des 16 sujets, $f'(x)$ s'écrivait avec une fonction auxiliaire g étudiée juste avant.

Exemple : soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$. Pour tout $x>0$:

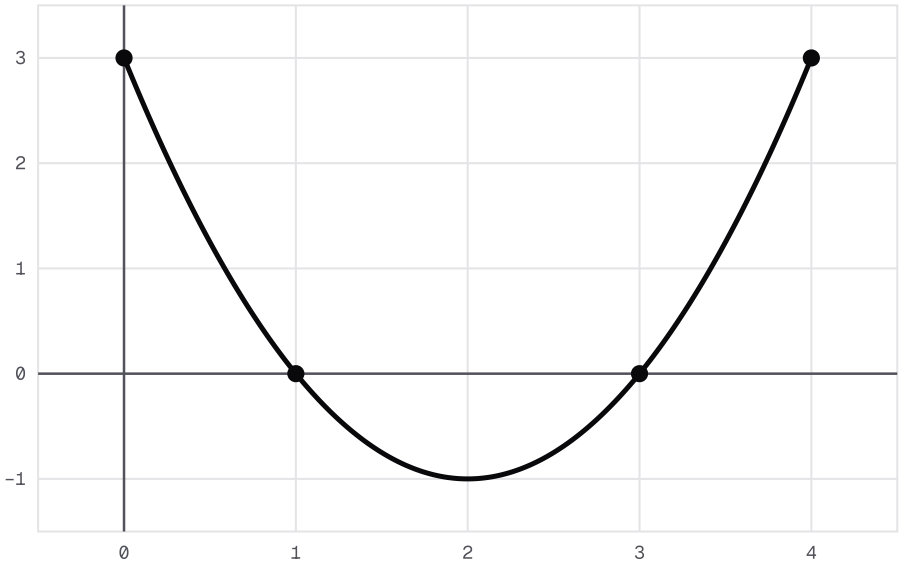
$$f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2},$$

avec $g(x)=2x^3-2$.

> Pour tout $x>0$, $x^2>0$, donc $f'(x)$ a le signe de $g(x)$.
>
> Or $g'(x)=6x^2>0$ sur $]0,+\infty[$: g est strictement croissante, et $g(1)=0$. Donc $g(x)<0$ sur $]0,1[$ et $g(x)>0$ sur $]1,+\infty[$.
>
> Ainsi f est strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

Le tableau de variations figurait dans les 16 sujets étudiés. Les barèmes relevés notent souvent le signe de f', puis le tableau.

Lire un graphique



La courbe de la dérivée f′ d'une fonction f définie sur [0, 4]. Elle est au-dessus de l'axe des abscisses sur [0, 1[et sur]3, 4], au-dessous sur]1, 3[, et coupe l'axe en 1 et en 3.

À toi : Lire la courbe de la dérivée

Dans 9 des 16 sujets, une question se lisait sur un graphique. La courbe ci-dessus est celle de f', pas celle de f. Sur quels intervalles f est-elle croissante ?

A. Sur $[2, 4]$, là où la courbe de f' monte.

Faux.

Tu as lu le sens de variation de f', pas son signe. Sur $]2, 3[$, la courbe de f' est sous l'axe : $f' < 0$, donc f décroît.

B. Sur $[0, 1]$ et sur $[3, 4]$.

Juste.

Là, la courbe de f' est au-dessus de l'axe des abscisses : $f'(x) > 0$.

C. Sur $[1, 3]$.

Faux.

Sur $]1, 3[$, la courbe de f' est sous l'axe : $f' < 0$, donc f y est décroissante.

D. On ne peut pas savoir : on n'a pas la courbe de f.

Faux.

Le signe de f' suffit pour les variations de f. Il se lit sur la position de la courbe par rapport à l'axe.

Correction

Sur $[0, 1]$ et sur $[3, 4]$. Rédaction type bac :

> D'après le graphique, la courbe de f' est au-dessus de l'axe des abscisses sur $[0, 1[$ et sur $]3, 4]$: $f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $[0, 1]$ et sur $[3, 4]$.
>
> La courbe de f' est au-dessous de l'axe sur $]1, 3[$: f est strictement décroissante sur $[1, 3]$.

En 1, f' s'annule en passant de $+$ à $-$: maximum local. En 3, de $-$ à $+$: minimum local. Lis le **signe** de f', pas son sens de variation.

Le mot du prof. Un tableau de variations, c'est une carte routière : une flèche à l'envers, et tu arrives à Agadir au lieu d'Ifrane. Factorise, relis chaque colonne, et la route est sûre.

Extremums : les sommets et les creux

Observe

Au sommet d'une colline, tu ne montes plus et tu ne descends pas encore : la pente est nulle **et** elle change de signe. C'est ce changement de signe qui permet de conclure.

Devine : Une pente nulle en 0

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. On a $f'(x) = 3x^2$, donc $f'(0) = 0$: la courbe a une tangente horizontale en O. f admet-elle un extremum en 0 ?

A. Oui, un maximum local.

Faux.

Pour $x > 0$, $f(x) = x^3 > 0 = f(0)$: la courbe passe au-dessus de $f(0)$. Ce n'est pas un maximum.

B. Oui, un minimum local.

Faux.
Pour $x < 0$, $f(x) = x^3 < 0 = f(0)$: la courbe passe au-dessous. Ce n'est pas un minimum.

C. Non : f' ne change pas de signe en 0.

Juste.
$f'(x) = 3x^2 \geq 0$ des deux côtés : f est strictement croissante, sans sommet ni creux.

Correction
Non. $f'(0) = 0$, mais $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ des deux côtés de 0. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: **pas** d'extremum en 0.

$f'(a) = 0$ ne suffit donc pas. Pour conclure à un extremum, il suffit de montrer que f' s'annule en a **en changeant de signe**.

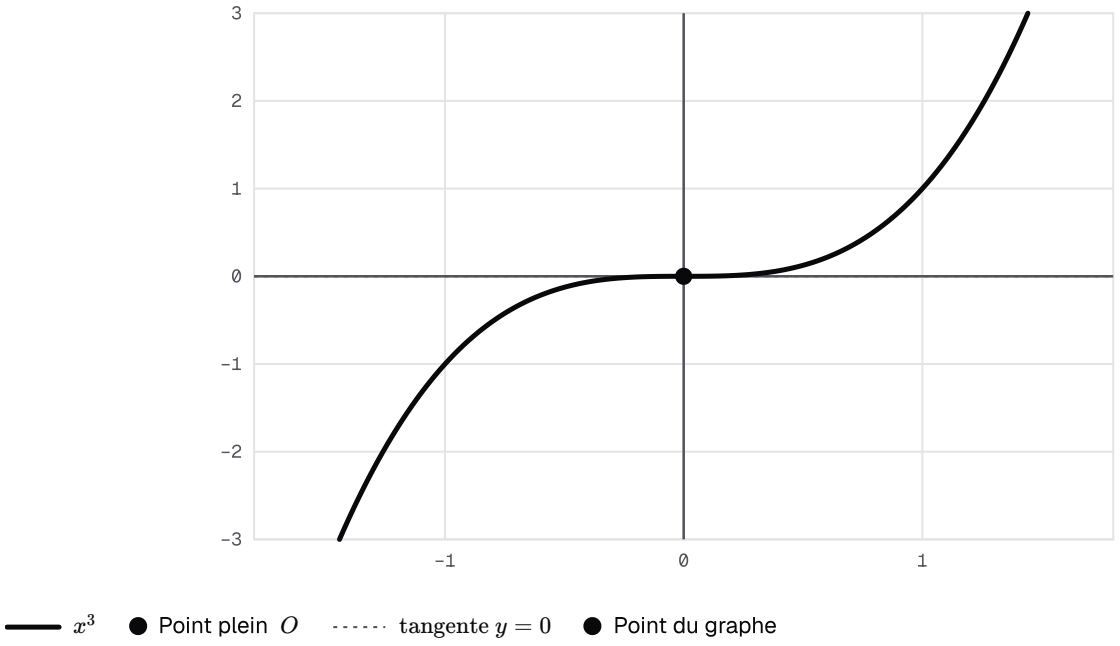
La propriété

Propriété : Extremum et dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

- Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.
- Si f' s'annule en a **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en a : un maximum si f' passe de positive à négative, un minimum si f' passe de négative à positive.

La réciproque du premier point est fausse : $f'(a) = 0$ ne suffit pas.



La courbe de x ↦ x³ a une tangente horizontale en O, l'axe des abscisses, mais elle la traverse : elle monte avant O et continue de monter après.

Exemple : Exemple guidé : x³ – 3x

Avec le tableau de la section précédente :

- en -1, f' s'annule en passant de $+$ à $-$: f admet un **maximum local**, $f(-1) = 2$;
- en 1, f' passe de $-$ à $+$: f admet un **minimum local**, $f(1) = -2$.

À toi

À toi : Une inégalité

Déduis de la section précédente que, pour tout $x > 0$, $x + \dfrac{4}{x} \geq 4$.

Indice 1

Dans la section précédente, tu as étudié les variations de $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

Indice 2

f décroît sur $]0, 2]$ et croît sur $[2, +\infty[$: que représente $f(2)$?

Réponse

On reprend $f : x \mapsto x + \dfrac{4}{x}$ sur $]0, +\infty[$. Sa dérivée s'annule en 2 en changeant de signe : f décroît sur $]0, 2]$, puis croît sur $[2, +\infty[$.

Donc $f(2) = 4$ est le minimum de f sur tout $]0, +\infty[$.

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $x + \dfrac{4}{x} \geq 4$.

Au bac

Méthode : Coin examen : rédiger un extremum

> f' s'annule en -1 en changeant de signe (de $+$ à $-$), donc f admet un **maximum local** en -1, égal à $f(-1) = 2$.

Local ou absolu ? Un maximum local est le plus haut **au voisinage** du point. Ici, $f(-1) = 2$ n'est pas le maximum sur tout $\mathbb{R}$, puisque f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Sur $]0, +\infty[$, au contraire, le minimum 4 de $x \mapsto x + \dfrac{4}{x}$ est **absolu** : il vaut pour tout $x > 0$.

Bonus : l'enclos le plus grand

Exemple : Bonus : l'enclos le plus grand

Un problème concret, pour voir la dérivée au travail. Avec 20 m de grillage, on clôture un terrain rectangulaire. Si un côté mesure x, l'autre mesure $10 - x$.

Pour tout $x \in\ ]0, 10[$, l'aire vaut $A(x) = x(10 - x)$ et $A'(x) = 10 - 2x$: positif avant 5, négatif après.

L'aire est maximale pour $x = 5$: un carré de 5 m, d'aire 25 m².

Concavité : un bol ou un parapluie

Observe

Une courbe **convexe** a la forme d'un bol : elle retiendrait l'eau. Une courbe **concave**, celle d'un parapluie. Là où elle passe de l'un à l'autre, c'est un **point d'inflexion**.

Objectif : le savoir avec la dérivée seconde.

Devine : La parabole et sa tangente

Pour la fonction $x \mapsto x^2$, les pentes en $-1, 0, 1, 2$ valent $-2, 0, 2, 4$: la pente **augmente**. La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = 2x - 1$. Où est la courbe par rapport à cette tangente ?

A. Au-dessus, sauf au point de contact.

Juste.
$x^2 - (2x - 1) = (x - 1)^2 \geq 0$, nul seulement en 1.

B. Au-dessous.

Faux.

Teste $x = 0$: la courbe passe en 0, la tangente en -1. La courbe est au-dessus.

C. Elle la traverse au point de contact.

Faux.
Pour traverser, il faudrait un changement de signe de $x^2 - (2x - 1) = (x - 1)^2$. Un carré ne change pas de signe.

D. Au-dessus loin de 1, au-dessous tout près de 1.

Faux.
Même tout près de 1, $(x - 1)^2 \geq 0$: la courbe reste au-dessus.

Correction
Au-dessus. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} x^2 - (2x - 1) &= x^2 - 2x + 1 \\ &= (x - 1)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

et c'est nul seulement en 1.

La pente augmente : la courbe se relève en **bol**, et elle reste au-dessus de sa tangente. On dira qu'elle est **convexe**.

Bol, parapluie et dérivée seconde

Définition : Concavité

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- La courbe $\mathcal{C}_f$ est **convexe** sur I lorsqu'elle est située au-dessus de chacune de ses tangentes en un point de I.
- La courbe $\mathcal{C}_f$ est **concave** sur I lorsqu'elle est située au-dessous de chacune de ses tangentes en un point de I.

Théorème : Dérivée seconde et concavité

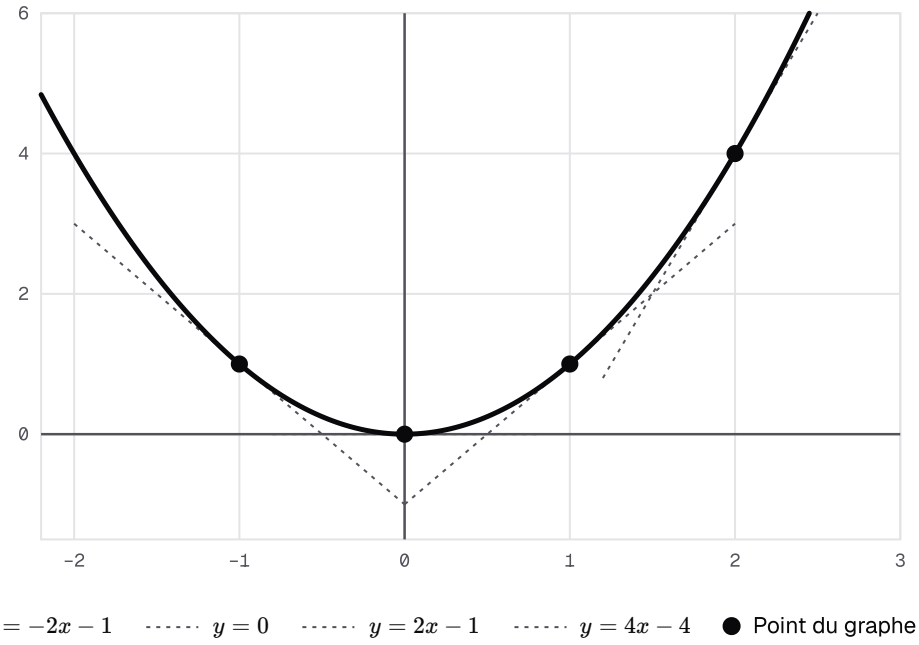
Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I ; on note f'' la dérivée de f'.

- Si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors $\mathcal{C}_f$ est convexe sur I.
- Si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors $\mathcal{C}_f$ est concave sur I.

En clair. f'' est la dérivée de f'.

- Si $f'' \geq 0$, la pente augmente : la courbe se relève comme un bol, et elle reste **au-dessus de ses tangentes**.
- Si $f'' \leq 0$, la pente diminue : parapluie, la courbe reste **au-dessous de ses tangentes**.

C'est ainsi qu'on situe une courbe par rapport à une tangente.



La parabole de x ↦ x² et ses tangentes aux points d'abscisses –1, 0, 1 et 2, de pentes –2, 0, 2 et 4 : la courbe reste au-dessus de chacune.

Propriété : Point d'inflexion

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

Le point $A(a, f(a))$ est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$ lorsque la courbe change de concavité en A ; la courbe y traverse alors sa tangente.

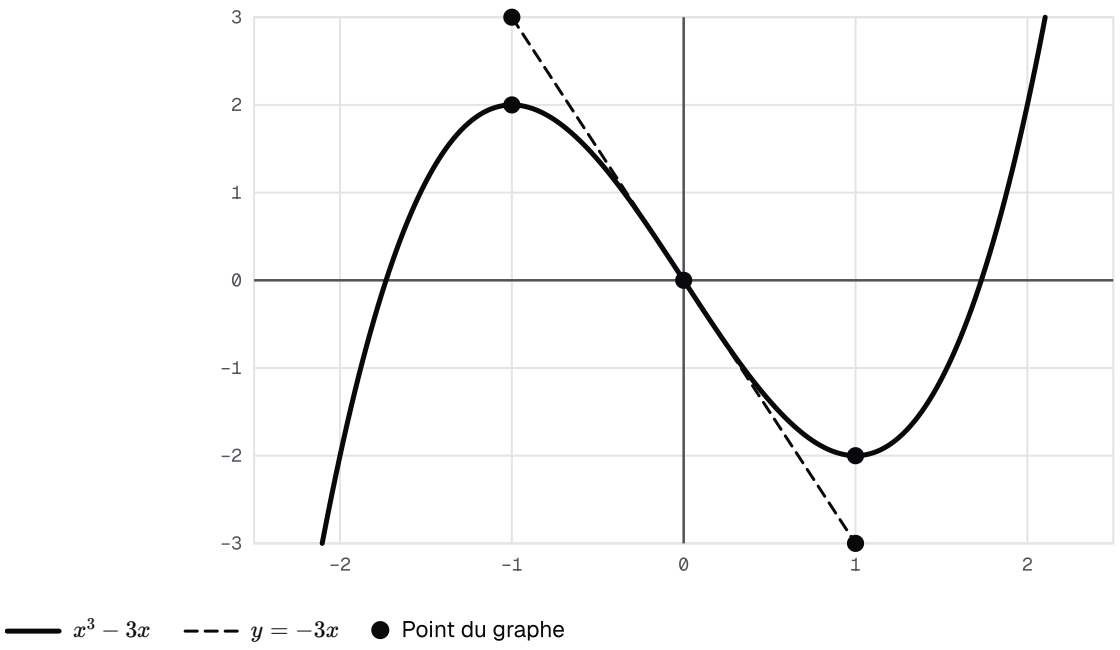
Si f'' s'annule en a **en changeant de signe**, alors $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Exemple : Exemple guidé : x³ – 3x

Pour $f : x \mapsto x^3 - 3x$, on a $f'(x) = 3x^2 - 3$, donc $f''(x) = 6x$.

1. **Signe** : $f'' < 0$ sur $]-\infty, 0[$, $f'' > 0$ sur $]0, +\infty[$.
2. **Concavité** : concave sur $]-\infty, 0]$, convexe sur $[0, +\infty[$.
3. **Inflexion** : f'' s'annule en 0 en changeant de signe : $O(0, 0)$ est un point d'inflexion. La tangente en O a pour équation $y = -3x$, et la courbe la traverse.

Le point d'inflexion de près



La courbe de x ↦ x³ − 3x : maximum local en −1, minimum local en 1, point d'inflexion à l'origine, où la courbe traverse sa tangente y = −3x.

Attention : c'est le changement de signe de f″ qui compte

- Pour $f : x \mapsto x^4$, $f''(x) = 12x^2$ s'annule en 0, mais reste positive des deux côtés. La courbe reste convexe : **pas** de point d'inflexion en 0.
- Pour $f : x \mapsto x^3$, $f'(0) = 0$, et $f''(x) = 6x$ change de signe en 0. Le point O est un point d'inflexion **à tangente horizontale** : la courbe traverse sa tangente $y = 0$.
- Ce n'est **pas** un extremum : $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ ne change pas de signe (section 11). Un point peut avoir $f' = 0$ sans être un sommet.

À toi

À toi : Un polynôme de degré 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, avec $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$. Étudie la concavité de sa courbe, et trouve son point d'inflexion.

Indice 1
Dérive f' pour obtenir f'', puis étudie son signe.
Indice 2
$f''(x) = 6x - 12$ s'annule en 2. Change-t-elle de signe en 2 ?
Indice 3
Pour le point, calcule l'ordonnée $f(2)$.

Réponse

Pour tout réel x, $f''(x) = 6x - 12$: négative sur $]-\infty, 2[$, positive sur $]2, +\infty[$. La courbe est concave sur $]-\infty, 2]$ et convexe sur $[2, +\infty[$.

f'' s'annule en 2 en changeant de signe, et $f(2) = 8 - 24 + 18 = 2$: le point d'inflexion est $(2, 2)$.

À toi : Un autre point d'inflexion

Quel est le point d'inflexion de la courbe de $f : x \mapsto x^3 - 3x^2$?

A. $(0, 0)$

Faux.
En 0, c'est f' qui s'annule : $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$. C'est un maximum local, pas une inflexion.

B. $(2, -4)$

Faux.
En 2, c'est aussi f' qui s'annule : un minimum local. Pour l'inflexion, regarde f''.

C. $(1, -2)$

Juste.
$f''(x) = 6x - 6$ s'annule en 1 en changeant de signe, et $f(1) = -2$.

D. $(1, 0)$

Faux.
L'abscisse 1 est juste, mais l'ordonnée est $f(1) = 1 - 3 = -2$, pas 0.

Indice 1
Calcule f', puis f'', et cherche où f'' s'annule en changeant de signe.

Correction
$(1, -2)$**.** Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 - 6x$, puis $f''(x) = 6x - 6$.

f'' s'annule en 1 en changeant de signe : négative avant, positive après. Le point d'inflexion est $(1, f(1)) = (1, -2)$.

Au bac

Méthode : Coin examen : concavité

> $f''(x) = 6x$. Sur $]-\infty, 0]$, $f''(x) \leq 0$: $\mathcal{C}_f$ est concave. Sur $[0, +\infty[$, $f''(x) \geq 0$: $\mathcal{C}_f$ est convexe.
>
> f'' s'annule en 0 en changeant de signe : $O(0, 0)$ est un point d'inflexion.

Question relevée dans 7 des 16 sujets. Barème relevé : $0{,}5$ pour la concavité, $0{,}25$ par point d'inflexion.

Le mot du prof. Si tu hésites entre les deux mots, pense à la pluie : le bol retient l'eau, c'est **convexe**, $f'' \geq 0$; le parapluie la renvoie, c'est **concave**, $f'' \leq 0$.

Branches infinies : ce que fait la courbe très loin

Observe

Sur l'autoroute, la voie d'insertion longe la voie principale de plus en plus près. Très loin, une courbe peut faire pareil avec une droite : c'est une **asymptote**. Ou s'en aller sans en longer aucune : une **branche parabolique**.

Objectif : interpréter les limites aux bornes. Elles figuraient dans les 16 sujets étudiés, et l'interprétation y était notée à part.

Vérifie : Très loin, comment se comporte-t-elle

Quand x devient très grand, comme quelle expression simple la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+3}{x-1}$ se comporte-t-elle ?

A. Comme x^2.
Faux.
Le dénominateur compte aussi : son terme de plus haut degré est x. Le quotient se comporte comme $\dfrac{x^2}{x}$.

B. Comme -3, le quotient des termes constants.
Faux.
Les constantes comptent près de 0, pas à l'infini. À l'infini, les termes de plus haut degré dominent.

C. Comme x : son quotient par x tend vers 1.
Juste.
On garde les termes de plus haut degré : $\dfrac{x^2}{x} = x$.

D. Comme 1, le quotient des coefficients.
Faux.
Les degrés diffèrent : 2 en haut, 1 en bas. Il reste un x après simplification.

Correction
Comme x. Deux rappels :

- Un polynôme a la limite de son terme de plus haut degré : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - 5x\right) = +\infty$.
- Une fraction rationnelle a la limite du quotient de ses termes de plus haut degré : $\dfrac{x^2+3}{x-1}$ se comporte comme $\dfrac{x^2}{x} = x$.

Elle tend donc vers $+\infty$ en $+\infty$, et son quotient par x tend vers 1.

> Attention : la droite $y = x$ n'est pas pour autant son asymptote. L'exemple guidé montre que c'est $y = x + 1$.

Les asymptotes

Définition : Asymptotes verticale et horizontale

Soit f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

- Si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ vaut $+\infty$ ou $-\infty$, la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ (ou en $-\infty$), avec b réel, la droite d'équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$).

En clair.

- Limite **finie** en $\pm\infty$: asymptote **horizontale**.
- Limite **infinie** en un réel a : asymptote **verticale**.
- Limite **infinie** en $\pm\infty$: il faut regarder $\dfrac{f(x)}{x}$ pour savoir comment la courbe s'en va.

Exemple : Exemple guidé : une asymptote verticale, une horizontale

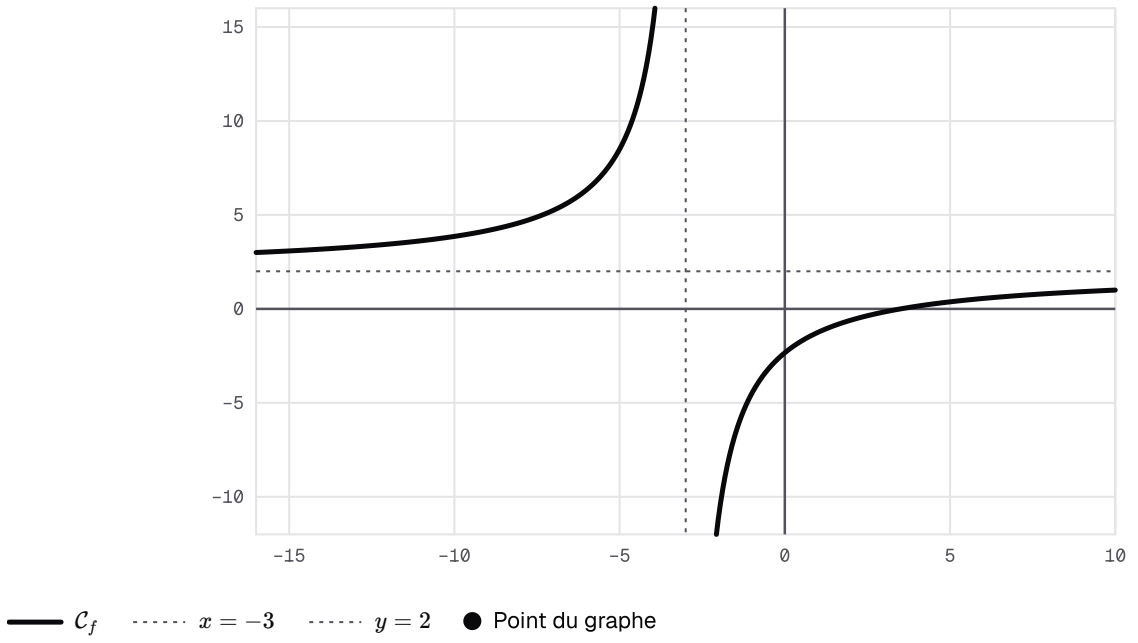
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par $f(x) = \dfrac{2x - 7}{x + 3}$.

1. **En -3.** Le numérateur tend vers -13. À droite, $x + 3$ tend vers 0^+, donc $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$. À gauche, $x + 3$ tend vers 0^-, donc $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$.

   Interprétation : la droite $x = -3$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

2. **En $-\infty$ et en $+\infty$.** $f(x)$ se comporte comme $\dfrac{2x}{x} = 2$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$, et de même en $-\infty$.

   Interprétation : la droite $y = 2$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.



La courbe de f(x) = (2x − 7)/(x + 3) et ses deux asymptotes : la droite verticale x = −3 et la droite horizontale y = 2.

Propriété : Asymptote oblique

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$, et $a \neq 0, b$ deux réels.

La droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ si et seulement si

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0.$$

C'est le cas si et seulement si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - ax\big) = b$. On définit de même une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

Exemple : Exemple guidé : (x² + 3)/(x − 1) en +∞

Pour $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$, en $+\infty$:

1. $f(x)$ tend vers $+\infty$.
2. $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - x}$ tend vers 1, donc $a = 1$.
3. On réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{x^2 + 3 - x^2 + x}{x - 1} \\ &= \frac{x + 3}{x - 1}, \end{aligned}$$

qui tend vers 1, donc $b = 1$.

Conclusion : la droite $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ (et de même en $-\infty$).

Les branches paraboliques

Définition : Branches paraboliques

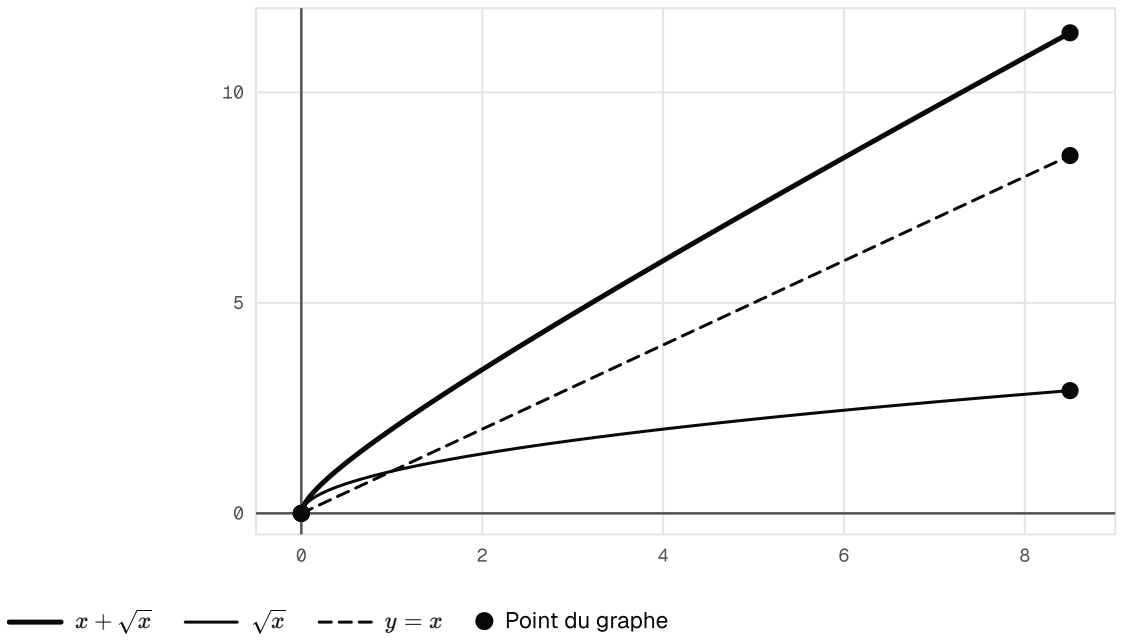
Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$.

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $-\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées**.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, $\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses**.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ avec $a \neq 0$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - ax\big) = +\infty$ ou $-\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction la droite d'équation** $y = ax$.

On définit de même les branches paraboliques au voisinage de $-\infty$.

Exemple : Trois branches paraboliques en +∞

$f(x)$	$\dfrac{f(x)}{x}$	$f(x) - x$	**Branche**
x^2	$x \to +\infty$	sans objet	direction (Oy)
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}} \to 0$	sans objet	direction (Ox)
$x + \sqrt{x}$	$1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} \to 1$	$\sqrt{x} \to +\infty$	direction $y = x$



Deux branches paraboliques en +∞ : √x part vers la droite en s'aplatissant (direction l'axe des abscisses) ; x + √x prend la direction de y = x, mais s'en écarte de plus en plus, sans asymptote.

La méthode

Méthode : branche infinie en +∞

1. **Limite de** f : réelle ℓ, asymptote horizontale $y=\ell$, c'est fini. Infinie : étape 2.
2. **Limite de** $\dfrac{f(x)}{x}$: infinie, branche parabolique de direction (Oy) ; nulle, direction (Ox) ; égale à $a\neq 0$, étape 3.
3. **Limite de** $f(x)-ax$: réelle b, asymptote oblique $y=ax+b$; infinie, branche parabolique de direction $y=ax$.

Attention : f(x)/x → a ne suffit pas

✗ Faux	✓ Juste
« $\dfrac{f(x)}{x}\to 1$, donc asymptote $y=x$. »	Il faut aussi $f(x)-x\to b$ réel. Pour $x+\sqrt{x}$, $f(x)-x\to+\infty$: pas d'asymptote.

À toi

À toi : Une asymptote à trouver

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x}$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Étudie sa branche infinie en $+\infty$ avec la méthode.

Indice 1

Étape 2 : $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{2x^2-1}{x^2}$. Vers quoi tend ce quotient ?

Indice 2

Étape 3 : avec $a=2$, sépare la fraction : $\dfrac{2x^2-1}{x}=2x-\dfrac{1}{x}$.

Réponse

Étape 2. Pour tout $x>0$:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{2x^2-1}{x^2}=2-\frac{1}{x^2},$$

qui tend vers 2 : $a=2$.

Étape 3. $f(x)-2x=-\dfrac{1}{x}$, qui tend vers 0 : $b=0$.

Interprétation : la droite $y=2x$ est asymptote oblique à la courbe au voisinage de $+\infty$.

À toi : Une racine retranchée, très loin

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=x-\sqrt{x}$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Pour $x>0$, $\dfrac{f(x)}{x}=1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, qui tend vers 1, et $f(x)-x=-\sqrt{x}$.

Que conclure en $+\infty$?

A. La droite $y=x$ est asymptote.

Faux.
$\dfrac{f(x)}{x}\to 1$ ne suffit pas : il faut aussi que $f(x)-x$ ait une limite réelle. Ici, $-\sqrt{x}$ tend vers $-\infty$.

B. Branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

Faux.
Cette direction correspond à $\dfrac{f(x)}{x}\to 0$. Ici, la limite vaut 1.

C. La droite $y=x-1$ est asymptote.

Faux.
Aucun calcul ne donne $b=-1$: $f(x)-x=-\sqrt{x}$ ne tend vers aucun réel.

D. Branche parabolique de direction la droite $y=x$.

Juste.
$\dfrac{f(x)}{x}\to 1$, puis $f(x)-x\to-\infty$: c'est l'étape 3 de la méthode, avec une limite infinie.

Correction

Branche parabolique de direction la droite $y=x$. $f(x)$ tend vers $+\infty$, $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers 1, et $f(x)-x=-\sqrt{x}$ tend vers $-\infty$.

> La courbe prend la direction de $y = x$ en s'en écartant vers le bas, sans asymptote.

Au bac

Méthode : Coin examen : interpréter une limite

> $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - x\big) = 1$.
>
> Donc la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Voie directe, quand l'énoncé donne la droite : « Montrer que $(D) : y = x + 1$ est asymptote » se règle en une ligne. On montre que $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - (x+1)\big) = 0$.

Astuce : **sépare la fraction**, par exemple $\dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$; la différence se lit tout de suite.

Branche parabolique (pour $f : x \mapsto \sqrt{x}$) :

> $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.
>
> Donc $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

Si $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers $+\infty$, la direction est l'axe des ordonnées. Dans les barèmes relevés : la limite, puis $0{,}25$ pour l'interprétation. Ne saute jamais la phrase d'interprétation.

Au-dessus ou au-dessous ? Position relative

Le signe d'une différence

Une fois l'asymptote trouvée, une question suit souvent : la courbe est-elle au-dessus ou au-dessous ? Tout se joue sur le **signe d'une différence**.

Propriété : Position relative d'une courbe et d'une droite

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (D) la droite d'équation $y = ax + b$.

- Si $f(x) - (ax+b) > 0$ pour tout $x \in I$, $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de (D) sur I.
- Si $f(x) - (ax+b) < 0$ pour tout $x \in I$, $\mathcal{C}_f$ est **au-dessous** de (D) sur I.
- Les solutions de $f(x) = ax + b$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et (D).

Exemple : Exemple guidé : (x² + 3)/(x − 1) et y = x + 1

Pour $f : x \mapsto \dfrac{x^2+3}{x-1}$ et la droite $y = x + 1$, on pose $d(x) = f(x) - (x+1)$ pour $x \neq 1$. On réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{x^2+3}{x-1} - (x+1) \\ &= \frac{x^2+3-(x+1)(x-1)}{x-1} \\ &= \frac{x^2+3-x^2+1}{x-1} \\ &= \frac{4}{x-1}. \end{aligned}$$

- Pour $x > 1$: $d(x) > 0$, la courbe est **au-dessus** de la droite.
- Pour $x < 1$: $d(x) < 0$, la courbe est **au-dessous**.

À toi

À toi : Au-dessus d'une asymptote

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$. Comme $x^2-2x+2 = (x-1)^2+1$, on a, pour tout $x \neq 1$:

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Étudie la position de sa courbe par rapport à la droite d'équation $y = x - 1$.

Indice 1
Calcule la différence $d(x) = f(x) - (x-1)$.
Indice 2
$d(x) = \dfrac{1}{x-1}$: son signe est celui de $x - 1$.

Réponse
Pour tout $x \neq 1$, $d(x) = f(x) - (x-1) = \dfrac{1}{x-1}$.

- Pour $x > 1$: $d(x) > 0$, la courbe est **au-dessus** de la droite.
- Pour $x < 1$: $d(x) < 0$, la courbe est **au-dessous**.

À toi : Une courbe et la bissectrice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Où est sa courbe par rapport à la droite $y = x$?

A. Au-dessus pour $x > 0$, au-dessous pour $x < 0$.

Juste.
$f(x) - x = \dfrac{1}{x}$ a le signe de x.

B. Au-dessus partout, car on ajoute $\dfrac{1}{x}$ à x.

Faux.
Ajouter $\frac{1}{x}$ fait monter seulement si $\frac{1}{x} > 0$. Pour $x = -2$, $f(-2) = -2{,}5 < -2$: la courbe est au-dessous.

C. Au-dessous pour $x > 0$, au-dessus pour $x < 0$.

Faux.
Signes inversés. Pour $x = 2$: $f(2) - 2 = \frac{1}{2} > 0$, la courbe est au-dessus.

D. Ni l'un ni l'autre, car $f(x) - x$ tend vers 0 en $+\infty$.

Faux.
La limite dit que la courbe s'approche de la droite, pas de quel côté. Il faut le signe de $f(x) - x$.

Correction

Au-dessus pour $x > 0$, au-dessous pour $x < 0$. Pour tout $x \neq 0$, $f(x) - x = \frac{1}{x}$.

Pour $x > 0$, $\frac{1}{x} > 0$: la courbe est au-dessus de la droite. Pour $x < 0$, $\frac{1}{x} < 0$: elle est au-dessous.

Au bac

Méthode : Coin examen : rédiger une position

> Pour tout $x > 1$: $f(x) - (x+1) = \frac{4}{x-1} > 0$, donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D) sur $]1, +\infty[$.
>
> Pour tout $x < 1$: $\frac{4}{x-1} < 0$, donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de (D) sur $]-\infty, 1[$.

Question relevée dans 11 des 16 sujets. Barèmes relevés : $0{,}25$ par position.

Variante fréquente, « montrer que $f(x) \leq x$ » : étudie le signe de $f(x) - x$, ou les variations de $x \mapsto f(x) - x$.

Attention : une limite ne donne pas un signe

✗ Faux	✓ Juste
« $f(x) - (x+1) \to 0$, donc la courbe est au-dessus. »	La limite dit que la courbe s'**approche** de la droite, pas de quel côté. Ici $d(x) \to 0$ en $-\infty$, et pourtant la courbe est au-dessous. Il faut le **signe** de $d(x)$.

Le mot du prof. La limite dit **où** va la courbe, le signe dit **de quel côté** elle passe. Il te faut les deux.

L'étude complète : on assemble le puzzle

Le plan

Toutes les pièces sont là : limites, dérivée, variations, concavité, asymptotes, position. Une étude complète, c'est un puzzle qu'on assemble **dans l'ordre**.

Fais-la une fois en entier avec moi. C'est le plan du problème de bac, ici sans logarithme ni exponentielle : ces deux fonctions arrivent plus loin dans l'année.

Méthode : Plan d'étude d'une fonction

1. **Ensemble de définition**, et éventuels éléments de symétrie (en Bonus, plus bas).
2. **Limites aux bornes et branches infinies** (section 13), avec leur interprétation géométrique (une phrase à part).
3. **Dérivabilité** (points particuliers compris), calcul et signe de f', **tableau de variations** (sections 10 et 11).
4. **Concavité et points d'inflexion**, si c'est demandé (section 12).
5. **Tangentes particulières, position relative**, intersections avec les axes (sections 5 et 14).
6. **Construction** : asymptotes et tangentes d'abord, puis points remarquables, puis la courbe (Coin examen plus bas).

Limites et variations

Exemple : Étude guidée de f(x) = (x² + 3)/(x – 1) : domaine et limites

1. **Domaine** : $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. **En** 1 : $x^2 + 3$ tend vers $4 > 0$, et $x - 1$ tend vers 0^- à gauche, vers 0^+ à droite. Un nombre positif divisé par un nombre négatif de plus en plus proche de 0 devient très grand en valeur absolue, et négatif. Donc $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

   Interprétation : la droite $x = 1$ est asymptote verticale.

   Attention : un dénominateur comme x^2 ou $(x-1)^2$ reste positif des deux côtés ; il tend vers 0^+ à gauche comme à droite.
3. **En** $\pm\infty$: $f(x)$ se comporte comme $\dfrac{x^2}{x} = x$. Donc f tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$; asymptote oblique $y = x + 1$ (section 13).

Exemple : Étude guidée : dérivée et variations

On a vu que $f(x) - (x+1) = \dfrac{4}{x-1}$. Donc, pour tout $x \neq 1$:

$$f(x) = x + 1 + \frac{4}{x-1}.$$

f est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$, comme fonction rationnelle. Avec $\left(\frac{1}{x-1}\right)' = -\frac{1}{(x-1)^2}$, pour tout $x \neq 1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{4}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(x-1)^2 - 2^2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(x-1-2)(x-1+2)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

La formule du quotient donne le même résultat. Pour $x \neq 1$, $(x-1)^2 > 0$: le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-3)(x+1)$.

Maximum local $f(-1) = -2$, minimum local $f(3) = 6$.

Variations de f(x) = (x² + 3)/(x − 1). Croissante jusqu'à −1 (maximum local −2), puis décroissante jusqu'à 1, où f tend vers −∞. La double barre marque la valeur interdite 1. De l'autre côté, f part de +∞ et décroît jusqu'à 3 (minimum local 6), puis croît. Sur ta copie, écris −∞ juste à gauche de la double barre et +∞ juste à droite.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	‖	↘	6	↗	$+\infty$

Concavité, position, courbe

Exemple : Étude guidée : concavité, position, points

- **Dérivée seconde** : on part de $f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2}$. Avec $\left(\frac{1}{u^2}\right)' = -\frac{2u'}{u^3}$ et $u(x) = x - 1$ (règle de la composée), pour $x \neq 1$:

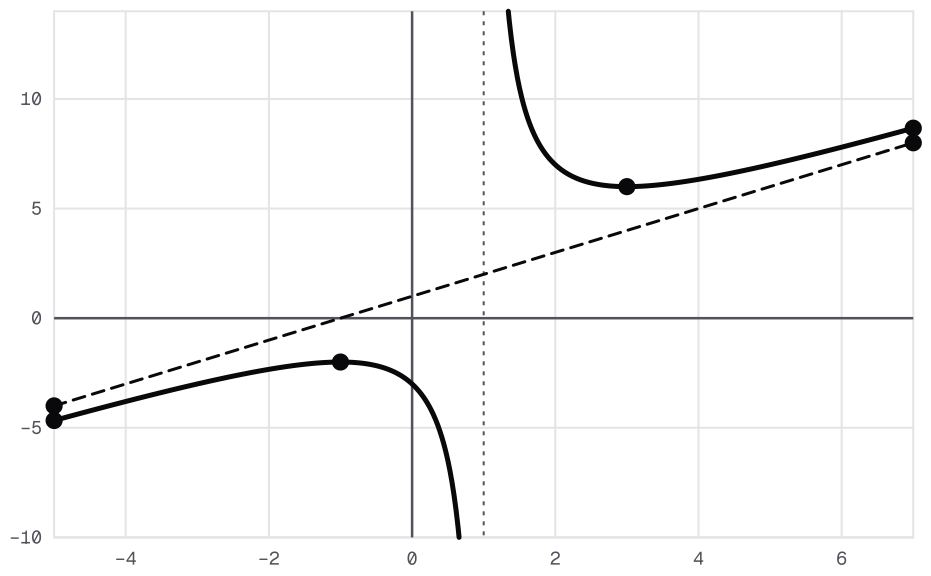
  $$\begin{aligned} f''(x) &= -4 \times \left(-\frac{2}{(x-1)^3}\right) \\ &= \frac{8}{(x-1)^3}. \end{aligned}$$

  Pour vérifier, applique la formule du quotient à $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$. Le numérateur vaut $2(x-1)$ fois $(x-1)^2 - (x^2 - 2x - 3) = 4$, soit $8(x-1)$, sur $(x-1)^4$: on retrouve $\frac{8}{(x-1)^3}$.

- **Concavité** : $(x-1)^3$ a le signe de $x - 1$. Donc $\mathcal{C}_f$ est concave sur $]-\infty, 1[$ et convexe sur $]1, +\infty[$. Pas de point d'inflexion : 1 n'est pas dans D.

- **Position** : au-dessus de $y = x + 1$ pour $x > 1$, au-dessous pour $x < 1$.

- **Points** : $f(0) = -3$; $x^2 + 3 = 0$ n'a pas de solution, donc la courbe ne coupe pas l'axe des abscisses.



La courbe de f(x) = (x² + 3)/(x − 1), construite à partir de l'étude : asymptote verticale x = 1, asymptote oblique y = x + 1, maximum local (−1, −2), minimum local (3, 6).

Lire l'étude

À toi : Combien de solutions

D'après l'étude et le tableau de variations, combien de solutions l'équation $f(x) = 7$ a-t-elle ?

A. Aucune : 7 n'apparaît pas dans le tableau.

Faux.

Une valeur absente du tableau peut être atteinte. Sur $]1, 3]$, f descend de $+\infty$ à 6 : elle passe par 7.

B. Une seule, dans $]1, 3]$.

Faux.

Tu as oublié l'autre côté du minimum : sur $[3, +\infty[$, f remonte de 6 vers $+\infty$ et repasse par 7.

C. Trois : une sur chaque partie du tableau.

Faux.

Sur $]-\infty, 1[$, le maximum de f est -2 : $f(x) \leq -2$, donc $f(x) \neq 7$.

D. Deux : une dans $]1, 3]$, une dans $[3, +\infty[$.

Juste.

De part et d'autre du minimum 6, f est continue et strictement monotone : elle prend la valeur 7 une fois de chaque côté.

Indice 1
Regarde chaque intervalle où f est strictement monotone, et les valeurs qu'elle y prend.

Correction
Deux.

- f est continue et strictement décroissante sur $]1,3]$: c'est une bijection de $]1,3]$ sur $[6,+\infty[$. Comme $7 \in [6,+\infty[$, l'équation a une unique solution dans $]1,3]$.
- De même, f est une bijection de $[3,+\infty[$ sur $[6,+\infty[$: une unique solution dans $[3,+\infty[$.
- Sur $]-\infty,1[$, aucune, puisque $f(x) \leq -2$.

Vérification : pour $x \neq 1$, $f(x) = 7$ équivaut à $x^2+3 = 7(x-1)$, soit $x^2-7x+10=0$, de solutions 2 et 5.

Et $f(x) = 0$ n'a aucune solution : $f(x) \leq -2$ à gauche de 1, $f(x) \geq 6$ à droite.

Bonus : un centre de symétrie

Propriété : Axe et centre de symétrie

Soit f une fonction d'ensemble de définition D, et a, b deux réels.

- La droite d'équation $x = a$ est un **axe de symétrie** de $\mathcal{C}_f$ si, pour tout $x \in D$, $2a - x \in D$ et $f(2a-x) = f(x)$.
- Le point $\Omega(a,b)$ est un **centre de symétrie** de $\mathcal{C}_f$ si, pour tout $x \in D$, $2a - x \in D$ et $f(2a-x) + f(x) = 2b$.

Exemple : Bonus : un centre de symétrie

On reprend $f(x) = x + 1 + \dfrac{4}{x-1}$. Pour tout $x \neq 1$, on a $2-x \neq 1$ et :

$$\begin{aligned} f(2-x) &= 3 - x + \frac{4}{1-x} \\ &= 3 - x - \frac{4}{x-1}. \end{aligned}$$

Donc $f(2-x) + f(x) = 4 = 2 \times 2$. Le point $\Omega(1,2)$, intersection des deux asymptotes, est centre de symétrie de la courbe.

Au bac : construire la courbe

Méthode : Coin examen : construire la courbe

La construction était demandée dans 14 des 16 sujets. Dans les barèmes relevés ($0{,}75$ à $1{,}5$ point), elle est notée **élément par élément**. Un ordre sûr :

1. les **asymptotes**, en pointillés ;
2. les **tangentes horizontales** (là où $f'=0$) et les **demi-tangentes**, en petits segments ;
3. les **points remarquables** : extremums, points d'inflexion, intersections avec les axes ;
4. la **courbe**, qui respecte le tableau de variations, les asymptotes et la concavité.

À toi : une étude complète

À toi : Une étude à mener

On reprend la fonction f de la section 14, définie sur $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par :

$$\begin{aligned} f(x) &= x-1+\frac{1}{x-1} \\ &= \frac{x^2-2x+2}{x-1}. \end{aligned}$$

Mène son étude dans l'ordre du plan :

1. limites en 1, asymptotes ;
2. dérivée, signe et tableau de variations, avec $f(0)$ et $f(2)$;
3. construction de la courbe.

Indice 1

Limites : en 1, le terme $\dfrac{1}{x-1}$ décide. En $-\infty$ et en $+\infty$, $f(x)-(x-1)=\dfrac{1}{x-1}$ tend vers 0.

Indice 2

Dérivée, par la règle de la somme : $f'(x)=1-\dfrac{1}{(x-1)^2}=\dfrac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}$. Factorise le numérateur comme A^2-B^2.

Indice 3

Signe : pour $x\neq 1$, $(x-1)^2>0$, donc $f'(x)$ a le signe de $x(x-2)$.

Réponse

1. **Limites** : $x-1$ tend vers 0^- à gauche, donc $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$; et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$. **Interprétation** : la droite $x=1$ est asymptote verticale. La droite $y=x-1$ est asymptote oblique en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. **Dérivée** : pour tout $x \neq 1$, avec $(x-1)^2 - 1 = x(x-2)$:

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

   Le signe est celui de $x(x-2)$: maximum local $f(0) = -2$, minimum local $f(2) = 2$. Le tableau suit.

3. **Construction** : asymptotes $x = 1$ et $y = x - 1$ en pointillés ; tangentes horizontales en $(0, -2)$ et $(2, 2)$. La branche gauche monte sous l'asymptote oblique jusqu'à $(0, -2)$, puis descend vers $-\infty$. La branche droite descend de $+\infty$ jusqu'à $(2, 2)$, puis remonte au-dessus de l'asymptote oblique.

Le tableau de la correction

Réponse : variations de f(x) = x − 1 + 1/(x − 1). Croissante jusqu'à 0 (maximum local −2), puis décroissante jusqu'à 1, où f tend vers −∞. La double barre marque la valeur interdite 1. De l'autre côté, f part de +∞ et décroît jusqu'à 2 (minimum local 2), puis croît. Sur ta copie, écris −∞ juste à gauche de la double barre et +∞ juste à droite.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	‖	↘	2	↗	$+\infty$

Le mot du prof. Tu viens de dérouler le cœur du problème de bac, étape par étape. Avec les fonctions logarithme et exponentielle, ce sera le même plan, les mêmes phrases, d'autres calculs.

Fiche examen et synthèse

À retenir : Je retiens

1. **Nombre dérivé** : limite réelle du taux d'accroissement. Une interprétation géométrique va avec chaque limite.
2. **Composée** : dérivée de l'extérieur, fois dérivée de l'intérieur.
3. **Réciproque** : antécédent d'abord, puis $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$ si $f'(a) \neq 0$. Si $f'(a) = 0$: tangente verticale pour la courbe de f^{-1}.
4. **Variations** : signe de f' factorisée, sur le domaine. **Extremum** : il suffit que f' s'annule **en changeant de signe**.
5. **Concavité** : signe de f''. **Inflexion** : f'' s'annule en changeant de signe.

6. **Branches infinies** : f, puis $\dfrac{f(x)}{x}$, puis $f(x) - ax$.

7. **Position** : signe de $f(x) - (ax + b)$.

8. **Plan d'étude** : les six étapes, du domaine à la construction.

Tangente

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Produit

$$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$$

Quotient

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$$

Composée

$$(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$$

Racine d'une fonction

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Puissance

$$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$$

Réciproque

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}, \quad b = f(a)$$

Racine n-ième

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

Remarque : Glossaire français : arabe

Français	Arabe
dérivable, nombre dérivé	قابلة للاشتقاق، العدد المشتق
fonction dérivée	الدالة المشتقة
taux d'accroissement	معدل التغير
tangente, demi-tangente	المماس، نصف المماس
composée	مركب دالتين
extremum, maximum, minimum	مطراف، قيمة قصوى، قيمة دنيا
concave, convexe, point d'inflexion	مقعرة، محدبة، نقطة انعطاف
asymptote, branche parabolique	مقارب، فرع شلجمي
tableau de variations	جدول التغيرات

Méthode : Avant l'examen, je sais…

- étudier la dérivabilité en un point et l'**interpréter** ;
- écrire l'équation d'une tangente ;

- atteindre un « $f'(x) = \dots$ » donné, composée comprise ;
- dresser un tableau de variations à partir du signe de f' ;
- calculer $\left(f^{-1}\right)'(b)$;
- étudier la concavité et trouver un point d'inflexion ;
- interpréter les limites aux bornes : asymptotes, branches paraboliques ;
- étudier une position relative et construire la courbe.

Le mot du prof. Si tu coches ces huit lignes, le problème d'étude de fonction ne te fera plus peur. Quand les fonctions logarithme et exponentielle arriveront, reviens à cette fiche : tout y reste vrai.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Dérivation et étude de fonctions » (2bac · sciences-experimentales · mathematiques)