BURHAN

Continuité : fiche de révision

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/continuite/resume

Chapitre	Semestre
Continuité	Semestre 1

L'essentiel du chapitre

À retenir : Trois idées à retenir

- f est **continue en** a lorsque sa limite en a est égale à sa valeur $f(a)$: la courbe ne saute pas en a.
- Sur un intervalle I, une fonction continue ne « saute » aucune valeur : pour a et b dans I, toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ sont prises. C'est le **TVI**.
- Continue **et** strictement monotone sur I : chaque valeur de $J = f(I)$ est prise **une seule fois**. D'où l'unique solution α de $f(x) = k$ lorsque $k \in J$, et la fonction réciproque f^{-1}.

Chaque question type du chapitre se règle en citant des conditions précises.

Pour montrer que…	il faut citer…
f est continue en a	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
$f(x) = k$ a **au moins une** solution dans $[a, b]$	f continue sur $[a, b]$; k compris entre $f(a)$ et $f(b)$
$f(x) = 0$ a **une seule** solution dans $]a, b[$	f continue et strictement monotone sur $[a, b]$; $f(a) \times f(b) < 0$
f admet une réciproque, définie sur $J = f(I)$	f continue et strictement monotone sur I
la limite ℓ de $u_{n+1} = f(u_n)$ vérifie $f(\ell) = \ell$	f continue sur un intervalle fermé I (par exemple $[a, b]$ ou $[a, +\infty[$) ; $f(I) \subset I$; $u_0 \in I$; (u_n) convergente

Continuité en un point

Définition : Continuité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$.

On dit que f est **continue en** a lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Continue en a

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Continue à droite en a

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Continue à gauche en a

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Continue en a (à gauche et à droite)

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Méthode : point où la formule change

Pour une fonction définie par morceaux, en un point a de raccordement :

1. **Calculer** $f(a)$ avec la formule qui contient le cas $x = a$.
2. **Calculer la limite à gauche** avec la formule de gauche, puis **la limite à droite** avec celle de droite.
3. **Conclure** : si les deux limites sont égales à $f(a)$, f est continue en a ; sinon, elle ne l'est pas.

Exemple : trouver le paramètre

Soit m un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} mx + 1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- $f(2) = 2^2 - 1 = 3$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3$: f est continue à droite en 2, quel que soit m.
- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2m + 1$.
- Donc f est continue en 2 si et seulement si $2m + 1 = 3$, c'est-à-dire $m = 1$.

Attention

- La continuité en a suppose f **définie en** a. Pour $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, la question de la continuité en 0 ne se pose pas.
- Ne calcule pas les deux limites latérales avec la même formule : chaque côté a la sienne.
- L'égalité des deux limites ne suffit pas : il faut aussi qu'elles soient égales à $f(a)$.

Remarque : Prolongement par continuité : en clair

Si f n'est pas définie en a mais admet en a une limite **finie** ℓ, on complète f par la valeur ℓ en a : la nouvelle fonction g est continue en a.

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$. Pour tout réel $x \neq 3$, $f(x) = x + 3$, donc $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 6$.

Le prolongement par continuité de f en 3 est la fonction g égale à f pour $x \neq 3$, avec $g(3) = 6$.

Continuité sur un intervalle

Remarque : En clair

f est continue sur $]a, b[$ lorsqu'elle est continue en chaque point de $]a, b[$. Sur $[a, b]$, on exige en plus la continuité **à droite en** a et **à gauche en** b.

Fonction	Continue sur
polynôme	$\mathbb{R}$
rationnelle	chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0, +\infty[$
$\sin$ et $\cos$	$\mathbb{R}$
$\tan$	chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition

Si f et g sont continues sur l'intervalle I et λ est un réel :

Somme, multiple, produit, puissance (n entier, n ≥ 1)

$$f + g,\ \lambda f,\ f \times g,\ f^n$$

Inverse et quotient, si g ne s'annule pas sur I

$$\frac{1}{g},\ \frac{f}{g}$$

Racine carrée, si f est positive sur I

$$\sqrt{f}$$

Propriété : Continuité d'une composée

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et g une fonction continue sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$.

Alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I.

En un point : si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Exemple : une justification en une phrase

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 5 &= (x - 2)^2 + 1 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Rédaction : la fonction $x \mapsto x^2 - 4x + 5$ est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme) et strictement positive sur $\mathbb{R}$; donc h, racine carrée d'une fonction continue et positive, est continue sur $\mathbb{R}$.

Attention

« Continue sur son ensemble de définition » ne veut pas dire « continue sur un intervalle ». La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, séparément.

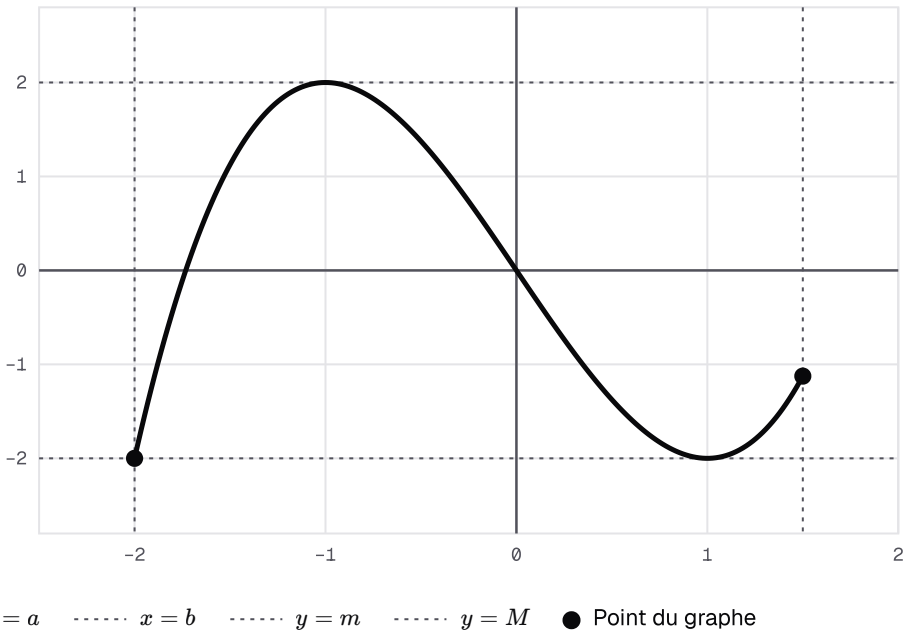
Les théorèmes du chapitre (image d'un intervalle, TVI) s'appliquent sur **un** intervalle à la fois.

Image d'un intervalle

Théorème : Image d'un intervalle, d'un segment

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

- L'image $f(I)$ de l'intervalle I est un intervalle.
- Si $I = [a, b]$ est un segment, $f([a, b])$ est un segment $[m, M]$, où m et M sont respectivement le minimum et le maximum de f sur $[a, b]$.



Pour f(x) = x³ − 3x sur [−2 ; 1,5], le minimum m = −2 et le maximum M = 2 encadrent toutes les valeurs : f([a, b]) = [m, M], même sans monotonie.

Propriété : Image d'un intervalle par une fonction continue strictement monotone

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I d'extrémités a et b ($a < b$, a et b éventuellement infinis pour un intervalle ouvert de ce côté).

Intervalle I	f strictement croissante	f strictement décroissante
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$

Intervalle I	f strictement croissante	f strictement décroissante
$[a, b[$	$[f(a), \lim_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim_{x\to b^-} f(x), f(a)]$
$]a, b]$	$]\lim_{x\to a^+} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim_{x\to a^+} f(x)[$
$]a, b[$	$]\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim_{x\to b^-} f(x), \lim_{x\to a^+} f(x)[$

Les limites aux bornes ouvertes existent dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; une borne infinie de $f(I)$ est alors ouverte.

Remarque : En clair : lire le tableau des images

Si f est continue et **strictement monotone** sur I, on obtient $f(I)$ à partir des bornes de I :

- f croissante : on garde l'ordre des bornes ; f décroissante : on l'inverse ;
- borne **appartenant** à I : on prend la valeur de f, crochet fermé ;
- borne **exclue** de I ou infinie : on prend la limite, crochet ouvert ;
- une borne infinie de $f(I)$ est toujours ouverte.

Variations de f(x) = (2x − 1)/(x + 2) sur [0, +∞[: f croît de −1/2, valeur atteinte en 0, vers 2, limite jamais atteinte.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	↗	2

Exemple : lire f(I)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$. Pour tout $x \neq -2$:

$$f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2} > 0.$$

Donc f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et sur $]-2, 0]$.

- $f(0) = -\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, donc $f\big([0, +\infty[\big) = \left[-\dfrac{1}{2}, 2\right[$.
- $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$, donc $f\big(]-2, 0]\big) = \left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$.

Attention : sans monotonie, les bornes ne suffisent pas

Soit f la fonction définie sur $[-1, 2]$ par $f(x) = x^2$. On a $f(-1) = 1$ et $f(2) = 4$, mais $f(0) = 0$. En réalité $f\big([-1, 2]\big) = [0, 4]$, et non $[1, 4]$.

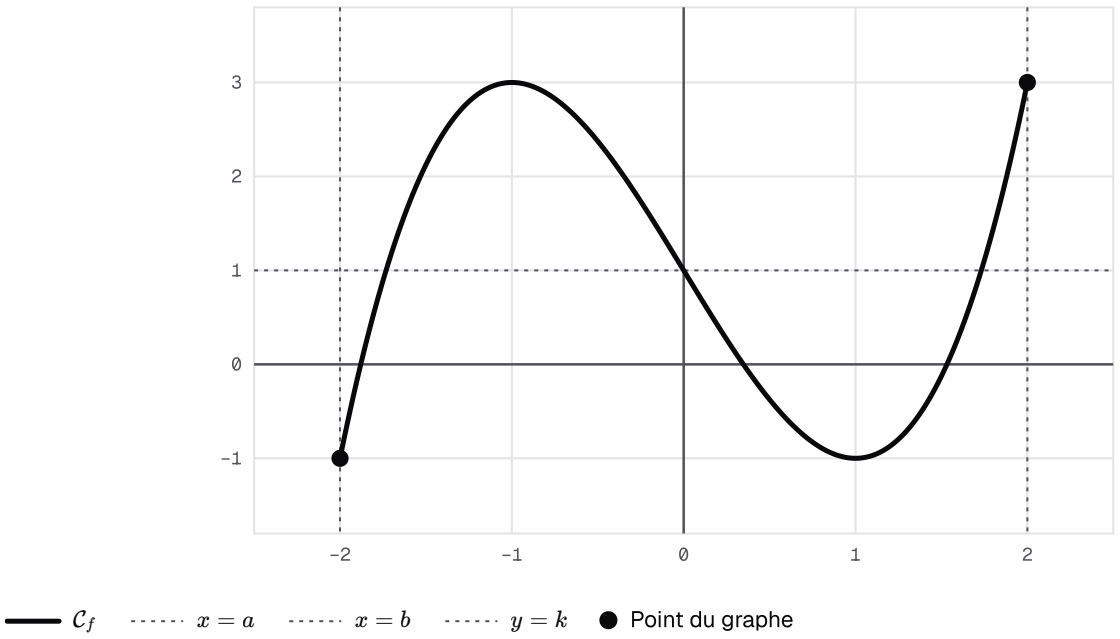
On découpe l'intervalle en intervalles sur lesquels f est monotone, ici $[-1, 0]$ et $[0, 2]$, puis on réunit les images.

Équation f(x) = k : au moins une solution, une seule solution

Théorème : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.



Exemple avec a = −2, b = 2 et k = 1 pour f(x) = x³ − 3x + 1 : k est entre f(a) = −1 et f(b) = 3, et la courbe rencontre la droite y = k, ici même trois fois.

Propriété : Cas f(a) · f(b) < 0

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$.

Alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a, b[$.

Remarque : En clair : au moins une solution

Une courbe tracée sans lever le crayon, qui passe sous la droite $y = k$ puis au-dessus, la coupe au moins une fois. Pour $k = 0$: un **changement de signe** de f sur un segment où elle est continue garantit au moins une solution de $f(x) = 0$.

Attention : au moins une, pas une seule

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$. On a $f(-2) = -1$ et $f(2) = 3$, donc l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $]-2, 2[$.

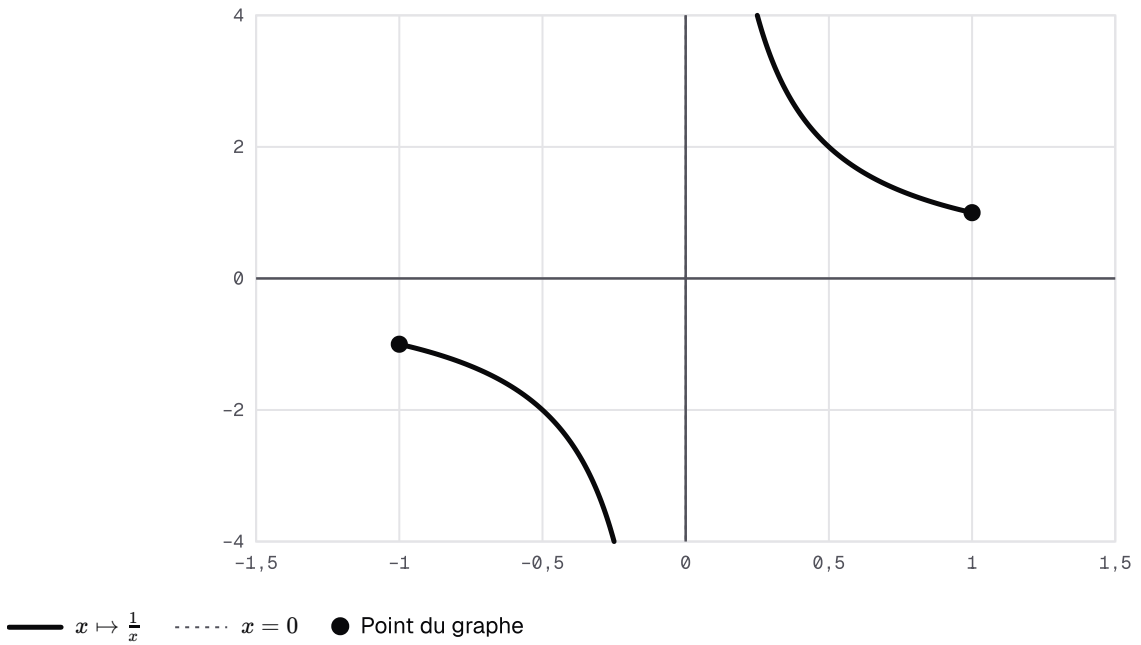
Or $f(-1) = 3$ et $f(1) = -1$: le signe change sur $]-2, -1[$, sur $]-1, 1[$ et sur $]1, 2[$. Il y a donc **au moins trois** solutions (exactement trois, car un polynôme de degré 3 a au plus trois racines).

Le TVI seul ne dit rien sur leur nombre.

Attention : continue sur tout le segment

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On a $f(-1) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$, pourtant $f(x) = 0$ n'a aucune solution.

Le TVI ne s'applique pas : f n'est pas définie en 0, donc pas continue sur $[-1, 1]$.



Les deux branches de x ↦ 1/x sur [−1, 1] : la courbe passe de −1 à 1 en sautant par-dessus l'axe des abscisses, coupée en 0 où f n'est pas définie.

Propriété : Unicité par stricte monotonie

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$.

Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique** solution dans $]a, b[$.

Méthode : une seule solution α dans]a, b[

1. **Continuité** : f est continue sur $[a, b]$, avec sa justification (polynôme, opérations, composée, ou bien : f est dérivable sur $[a, b]$, donc continue).
2. **Stricte monotonie** : signe de f' sur $[a, b]$. Si $f'(x) \geq 0$ et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, f est strictement croissante ; si $f'(x) \leq 0$ dans les mêmes conditions, strictement décroissante.
3. **Signes aux bornes** : calculer $f(a)$ et $f(b)$, puis constater $f(a) \times f(b) < 0$.
4. **Conclusion** : l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique** solution α dans $]a, b[$.

Variations de f(x) = x³ + 2x − 4 sur [1, 2], dérivée positive : f va de −1 (en 1) à 8 (en 2) et prend la valeur 0 une seule fois, en α.

x	1		α		2
$f'(x)$	+		+		
$f(x)$	-1	↗	0	↗	8

Exemple : Rédaction type

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x - 4$. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1, 2[$.

Existence. f est continue sur $[1, 2]$ (fonction polynôme), $f(1) = -1$ et $f(2) = 8$, d'où $f(1) \times f(2) < 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution dans $]1, 2[$.

Unicité. Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$, donc f est strictement croissante sur $[1, 2]$; elle ne peut s'annuler qu'une fois. La solution est unique : on la note α.

Cas décroissant. On écrit « strictement décroissante », et l'on a alors $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$.

Méthode : En déduire le signe de f(x) à partir de α

On utilise $f(\alpha) = 0$ et la stricte monotonie :

- f strictement croissante : pour $x < \alpha$, $f(x) < f(\alpha) = 0$; pour $x > \alpha$, $f(x) > 0$. Signes : $-, 0, +$.
- f strictement décroissante : les signes s'inversent, $+, 0, -$.

Dans l'exemple, $f(x) < 0$ sur $[1, \alpha[$ et $f(x) > 0$ sur $]\alpha, 2]$. La relation $f(\alpha) = 0$ sert aussi à simplifier : ici $\alpha^3 = 4 - 2\alpha$.

Méthode : Encadrer α, puis l'approcher par dichotomie

Encadrer. $f(1{,}1) = -0{,}469 < 0$ et $f(1{,}2) = 0{,}128 > 0$. Le TVI donne une solution strictement comprise entre $1{,}1$ et $1{,}2$, donc dans $]1,2[$; par unicité, c'est α. Donc $1{,}1 < \alpha < 1{,}2$.

Dichotomie. On calcule f au milieu, $f(1{,}15) = -0{,}179125 < 0$, et on garde la moitié où le signe change : $1{,}15 < \alpha < 1{,}2$.

Chaque étape divise par 2 la longueur de l'encadrement ; après n étapes sur $[a,b]$, elle vaut $\dfrac{b-a}{2^n}$.

Fonction réciproque

Théorème : Bijection

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et $J = f(I)$.

Alors f est une **bijection** de I sur J : pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans I.

Remarque : En clair

f^{-1} « défait » ce que fait f : si f envoie x sur y, alors f^{-1} renvoie y sur x. Elle est définie sur $J = f(I)$, l'ensemble des **valeurs** prises par f, et non sur I.

Équivalence, pour y dans I et x dans J (x est ici la variable de la réciproque)

$$y = f^{-1}(x) \iff f(y) = x$$

Pour tout x de I

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x$$

Pour tout y de J

$$f\big(f^{-1}(y)\big) = y$$

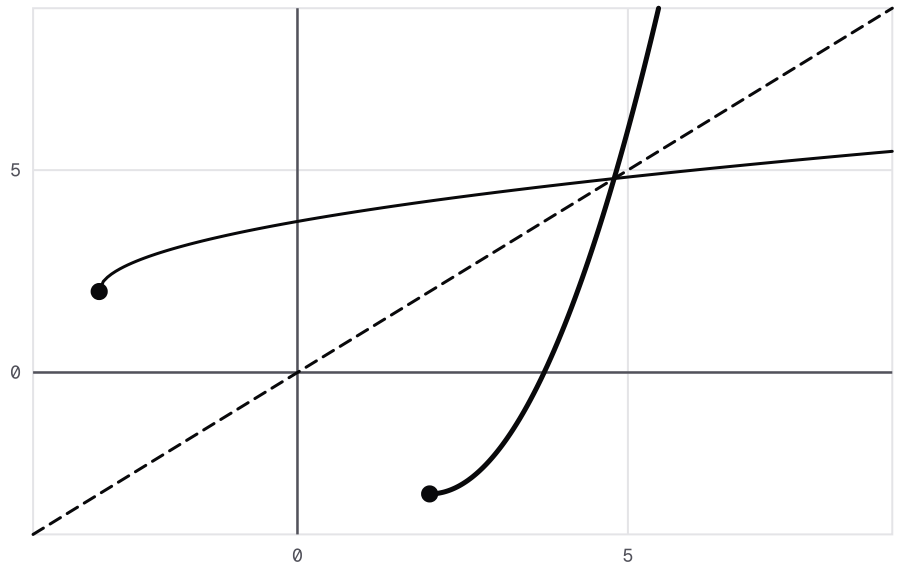
Points des deux courbes

$$(a,b) \in \mathcal{C}_f \iff (b,a) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}$$

Propriété : Propriétés de la fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et $J = f(I)$.

1. f^{-1} est continue sur J.
2. f^{-1} est strictement monotone sur J, de même sens de variation que f.
3. Dans un repère orthonormé, les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Avec la fonction de l'exemple qui suit, f(x) = x² − 4x + 1 sur [2, +∞[: sa courbe et celle de sa réciproque sont le reflet l'une de l'autre par rapport à la droite y = x.

Variations de f(x) = x² − 4x + 1 sur [2, +∞[: f'(2) = 0, f' > 0 ensuite ; f croît de −3 vers +∞, donc J = [−3, +∞[.

x	2		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$	-3	↗	$+\infty$

Exemple : existence et intervalle J

Soit f la fonction définie sur $I = [2, +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

f est continue sur I (polynôme). $f'(x) = 2x - 4$ est strictement positive pour $x > 2$ et ne s'annule qu'en 2 : f est strictement croissante sur I. Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = f(I)$.

Comme $f(2) = -3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, on obtient $J = [-3, +\infty[$. f^{-1} est strictement croissante sur J, comme f.

Remarque : Pour aller plus loin : expression de la réciproque

Pour $x \in J$ et $y \in I$:

$$\begin{aligned} f(y) = x &\iff (y-2)^2 = x + 3 \\ &\iff y = 2 + \sqrt{x+3}, \end{aligned}$$

car $y - 2 \geq 0$. Donc, pour tout $x \in [-3, +\infty[$:

$$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+3}.$$

Contrôle : $f^{-1}(-3) = 2$ et $f(2) = -3$.

Ce calcul peut être demandé en devoir. Il n'a pas été relevé dans les sujets nationaux étudiés pour cette fiche, et son exigibilité à l'examen reste à confirmer : demande à ton professeur.

Attention

- f^{-1} n'est **pas** $\dfrac{1}{f}$. Pour $f : x \mapsto 2x+1$, on a $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$, alors que $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{2x+1}$. En 3 : $f^{-1}(3) = 1$, mais $\dfrac{1}{f(3)} = \dfrac{1}{7}$.
- f^{-1} est définie sur $J = f(I)$: dans l'exemple, $[-3, +\infty[$ et non $[2, +\infty[$.
- La symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ suppose un repère **orthonormé**. Pour tracer la courbe de f^{-1}, on prend les symétriques de quelques points de la courbe de f : $(2, -3)$ donne $(-3, 2)$.

Racine n-ième et puissances rationnelles

Définition : Racine n-ième

Soit n un entier naturel non nul. La fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

Sa fonction réciproque est appelée **fonction racine n-ième** et notée $x \mapsto \sqrt[n]{x}$. Pour tous réels positifs x et y :

$$\sqrt[n]{x} = y \iff y^n = x.$$

En particulier $\sqrt[1]{x} = x$ et $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$.

Pour n et p entiers naturels non nuls, et x, y réels positifs :

Racine et puissance n-ièmes se compensent
$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x = \sqrt[n]{x^n}$$

Produit
$$\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$$

Quotient, si y > 0
$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$

Racine d'une racine
$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[np]{x}$$

Puissance d'une racine
$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^p = \sqrt[n]{x^p}$$

Simplifier l'indice
$$\sqrt[np]{x^p} = \sqrt[n]{x}$$

Comparer
$$\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \iff x < y$$

Limite en plus l'infini
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

Définition : Puissance rationnelle d'un réel strictement positif

Soit x un réel strictement positif et r un rationnel non nul, écrit $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

On pose $x^r = \sqrt[q]{x^p}$. Ce réel ne dépend pas de l'écriture choisie pour r.

En particulier, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

Pour x et y réels strictement positifs, r et r' rationnels (avec $x^0 = 1$) :

Produit
$$x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$$

Quotient
$$\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$$

Puissance d'une puissance
$$(x^r)^{r'} = x^{rr'}$$

Produit de deux réels
$$(xy)^r = x^r\, y^r$$

Quotient de deux réels

$$\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$$

Inverse

$$x^{-r} = \frac{1}{x^r}$$

Exemple : Exemples de calcul

- $\sqrt[3]{8} = 2$ car $2^3 = 8$; $\sqrt[4]{81} = 3$ car $3^4 = 81$.
- $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = 2$ et $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$.
- $8^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 4$ et $16^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^3} = \dfrac{1}{8}$.
- Comparer $\sqrt[3]{2}$ et $\sqrt[4]{3}$: avec l'indice commun 12, $\sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{16}$ et $\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{27}$. Comme $16 < 27$, $\sqrt[3]{2} < \sqrt[4]{3}$.

Attention : les domaines

- Dans ce chapitre, $\sqrt[n]{x}$ n'a de sens que pour $x \geq 0$, et x^r que pour $x > 0$: on n'écrit ni $\sqrt[3]{-8}$ ni $(-8)^{\frac{1}{3}}$. Le réel dont le cube vaut -8 s'écrit $-\sqrt[3]{8}$, c'est-à-dire -2.
- $\sqrt[n]{x^n} = x$ exige $x \geq 0$: $\sqrt{(-3)^2} = 3$, et non -3.
- La racine d'une somme n'est pas la somme des racines : $\sqrt[3]{1+7} = 2$, alors que $1 + \sqrt[3]{7} > 2$.

Méthodes pour le bac

Dans les sujets nationaux 2BAC SE consultés pour préparer cette fiche (une sélection de sessions entre 2016 et 2024), ce chapitre intervenait surtout dans les trois situations ci-dessous. Les rédactions proposées sont des modèles BURHAN, non des corrigés d'examen.

Méthode : Question « unique solution α »

Réflexe : trois conditions sur le segment, puis une conclusion avec le mot « unique » (méthode, rédaction type et signe de $f(x)$: section *Équation f(x) = k*). Dans les sujets consultés, le segment était donné par l'énoncé.

Variante $f(x) = k$: on applique la méthode à la fonction $g : x \mapsto f(x) - k$.

Si I n'est pas un segment : f continue et strictement monotone sur I réalise une bijection de I sur $J = f(I)$. Si $0 \in J$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans I.

Méthode : Question « réciproque définie sur J »

Modèle : « f est continue sur I (justification) et strictement croissante sur I (signe de f'). Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $J = f(I)$, et $J = \dots$ » ; on remplace « croissante » par « décroissante » si besoin.

On lit J sur le tableau de variations, en soignant les crochets. Questions possibles ensuite : le sens de variation de f^{-1} (celui de f) et sa courbe (symétrique de celle de f par rapport à $y = x$). Le nombre dérivé de f^{-1} relève du chapitre Dérivation.

Méthode : Suites définies par récurrence : où sert la continuité

Pour une suite définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$, on cite :

1. f est **continue** sur un intervalle **fermé** I, par exemple $[a, b]$ ou $[a, +\infty[$;
2. $f(I) \subset I$ et $u_0 \in I$, donc $u_n \in I$ pour tout n ;
3. (u_n) est **convergente** (établi par ailleurs).

Alors sa limite ℓ appartient à I et vérifie $f(\ell) = \ell$: on résout cette équation dans I.

Exemple : trouver la limite

Soit f la fonction définie sur $I = [0, 2]$ par $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x + 2}$, et la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{1}{(x + 2)^2} > 0$: f est continue et strictement croissante sur I. Donc $f(I) = \left[\dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{4}\right] \subset I$; de plus $u_0 \in I$.

Si (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell \in I$ et $f(\ell) = \ell$, soit $2\ell + 3 = \ell^2 + 2\ell$, d'où $\ell^2 = 3$. Comme $\ell \in I = [0, 2]$, $\ell = \sqrt{3}$.

Checklist avant le devoir

À retenir : Je sais…

- écrire la définition de la continuité en un point et l'appliquer en un point de raccordement ;
- trouver la valeur d'un paramètre qui rend une fonction continue ;
- justifier la continuité sur un intervalle par les fonctions usuelles, les opérations et la composée ;
- déterminer $f(I)$ à partir d'un tableau de variations, crochets compris ;
- appliquer le TVI, et expliquer pourquoi il ne donne pas l'unicité ;
- rédiger « unique solution α », encadrer α et en déduire le signe de $f(x)$;
- montrer qu'une fonction admet une réciproque et déterminer J ;
- ne pas confondre f^{-1} et $\dfrac{1}{f}$;

- calculer avec $\sqrt[n]{x}$ et x^r en respectant leur domaine ;
- citer les conditions de continuité et de stabilité pour la limite d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$.