BURHAN

Continuité : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/continuite/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Continuité	Niveau examen	5

Exercice 1 6 pts

Une fonction rationnelle et la droite y = 4

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x}$, et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. 0,5 pts

Déterminer l'ensemble de définition D_f de f, puis justifier que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

2. 1 pts

Calculer les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$, à gauche en 0 et à droite en 0.

INDICE

Pour les limites à l'infini, écrire $f(x)$ comme somme de deux termes simples. En 0, étudier séparément le numérateur et le signe du dénominateur.

3. 1,25 pts

Montrer que, pour tout $x \in D_f$:

$$f'(x) = \frac{2(x-1)\left(x^2 + x + 1\right)}{x^2},$$

puis dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Dériver un quotient, puis factoriser $x^3 - 1$. Le trinôme $x^2 + x + 1$ a un discriminant négatif.

4. 0,75 pts

Déterminer les images $f\big(]-\infty, 0[\big)$, $f\big(]0, 1]\big)$ et $f\big([1, +\infty[\big)$.

5. 1,25 pts

Montrer que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1, +\infty[$, puis, en partant de l'intervalle $[1, 2]$, donner par dichotomie un encadrement de α d'amplitude $0{,}25$.

INDICE

Utiliser l'image de $[1, +\infty[$ trouvée à la question 4. Pour la dichotomie, comparer à 4 (et non à 0) l'image du milieu de l'intervalle en cours.

6. 0,5 pts

Montrer que l'équation $f(x) = 4$ admet exactement trois solutions dans D_f : α, une solution β dans $]-\infty, 0[$ et une solution γ dans $]0, 1[$.

INDICE

Reprendre les trois images de la question 4. Sur $]0, 1]$, la solution peut-elle être 1 ?

7. 0,75 pts

Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de la droite Δ d'équation $y = 4$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$. En déduire le signe de $x^3 - 4x + 2$ pour $x > 0$.

INDICE

Comparer $f(x)$ à $f(\gamma)$ ou à $f(\alpha)$ en utilisant le sens de variation de f sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$.

Exercice 2 5 pts

Réciproque d'un quotient avec racine carrée

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [-2, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}}$.

1. 0,75 pts

Justifier que f est continue sur I, puis vérifier que pour tout $x \in I$, $f(x) = \sqrt{x+3} - \dfrac{4}{\sqrt{x+3}}$.

INDICE

Pour la seconde partie, écrire $x - 1 = (x+3) - 4$.

2. 1 pts

Montrer, sans calculer de dérivée, que f est strictement croissante sur I.

INDICE

Prendre deux réels $a < b$ de I et comparer successivement $\sqrt{a+3}$ et $\sqrt{b+3}$, puis leurs inverses, en utilisant l'écriture de la question 1.

3. 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis déterminer l'intervalle $J = f(I)$.

4. 0,5 pts

Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J, et préciser la continuité et le sens de variation de f^{-1} sur J.

5. 0,75 pts

Calculer $f(1)$, $f(6)$ et $f(13)$. En déduire $f^{-1}(0)$, $f^{-1}\left(\dfrac{5}{3}\right)$ et $f^{-1}(3)$.

6. 1 pts

Résoudre dans J l'inéquation $f^{-1}(x) \leq 13$, puis l'inéquation $1 < f^{-1}(x) \leq 13$.

INDICE

Écrire 13 et 1 comme des images par f^{-1} grâce à la question 5, puis utiliser le sens de variation de f^{-1}.

7. 0,5 pts

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}'$ les courbes de f et de f^{-1}. Justifier que le point $A\left(6, \dfrac{5}{3}\right)$ appartient à $\mathcal{C}_f$, puis donner deux points de $\mathcal{C}'$: l'un d'ordonnée 6, l'autre situé sur l'axe des ordonnées. Quelle transformation du plan échange $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}'$?

Exercice 3 4 pts

Une suite récurrente et un intervalle stable

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{x^2+3}{4}$. Soit (u_n) la suite telle que $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$.

On admet les résultats suivants sur les suites :

- **(R1)** si une suite (v_n) converge vers L et si $m \leq v_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $m \leq L \leq M$;
- **(R2)** si une suite (v_n) converge vers L et si une fonction h est continue en L, alors la suite $\big(h(v_n)\big)$ converge vers $h(L)$;
- **(R3)** si une suite (v_n) converge vers L, la suite (v_{n+1}) converge aussi vers L ;
- **(R4)** une suite convergente admet une unique limite : si (v_n) converge vers L et vers L', alors $L = L'$.

1. 0,5 pts

Justifier que g est continue sur $\mathbb{R}$, puis calculer u_1 et u_2.

2. 1 pts

Montrer que g est strictement croissante sur l'intervalle $[0,1]$, puis déterminer $g\big([0,1]\big)$. En déduire que $g\big([0,1]\big) \subset [0,1]$.

INDICE

Sur $[0,1]$, les nombres sont positifs : la fonction carré y conserve l'ordre strict.

3. 0,75 pts

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 1$.

4. 1 pts

On admet que la suite (u_n) est convergente et on note ℓ sa limite. Montrer que $\ell \in [0,1]$, puis que $g(\ell) = \ell$.

INDICE

Pour $\ell \in [0,1]$, appliquer (R1) avec l'encadrement de la question 3. Pour $g(\ell) = \ell$, regarder la suite (u_{n+1}) de deux façons : avec (R3), puis comme la suite $\big(g(u_n)\big)$ avec (R2), en citant la continuité de g en ℓ.

5. 0,75 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) - x = 0$, puis déterminer ℓ.

Exercice 4 5 pts

Fonction par morceaux : raccord, zéros et image de $\mathbb{R}$

Soit a un réel. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3$ si $x \leq 0$;
- $f(x) = \dfrac{x + a}{x + 1}$ si $x > 0$.

1. 0,75 pts

Trouver le réel a tel que f soit continue en 0.

INDICE

Comparer $f(0)$ avec la limite à droite en 0 ; la continuité à gauche est automatique ici.

2. 0,5 pts

Dans toute la suite, $a = -3$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. 1 pts

Étude sur $]-\infty, 0]$: calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, étudier les variations de f sur $]-\infty, 0]$ et calculer $f(-2)$.

INDICE

Sur $]-\infty, 0]$, f coïncide avec une fonction polynôme P ; étudier le signe de $P'(x)$.

4. 0,75 pts

Étude sur $]0, +\infty[$: vérifier que pour tout $x > 0$, $f(x) = 1 - \dfrac{4}{x + 1}$. En déduire, sans dérivée, que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, puis déterminer $f\big(]0, +\infty[\big)$.

5. 1,25 pts

Montrer que f s'annule en exactement trois réels $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$, avec $-3 < \beta_1 < -2 < \beta_2 < -1$, et calculer β_3.

INDICE

Sur combien d'intervalles f est-elle strictement monotone ? Sur chacun, l'image contient-elle 0 ? Pour situer β_1 et β_2, chercher des entiers où f change de signe.

6. 0,75 pts

Déterminer $f(\mathbb{R})$. La fonction f admet-elle un maximum sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5 5 pts

Une somme avec racine cubique

Soit f la fonction définie sur $I = [-1, +\infty[$ par $f(x) = x + 2\sqrt[3]{x+1}$.

1. 0,75 pts

Montrer que f est bien définie sur I et qu'elle y est continue.

INDICE

La racine cubique n'est définie ici que pour un nombre positif : regarder le signe de $x+1$. Pour la continuité, voir $x \mapsto \sqrt[3]{x+1}$ comme une composée.

2. 0,75 pts

Montrer que f est strictement croissante sur I.

3. 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Justifier ensuite que f établit une bijection de I vers l'intervalle $J = f(I)$, et expliciter J.

4. 0,75 pts

a) Justifier que pour tout $x > -1$, $f(x) = x + 2(x+1)^{\frac{1}{3}}$.

b) Calculer $f(7)$ et $f\left(\frac{1}{8} - 1\right)$ en écrivant les racines cubiques comme des puissances rationnelles.

INDICE

Écrire 8 et $\frac{1}{8}$ comme des puissances de 2 et utiliser $(x^r)^{r'} = x^{rr'}$.

5. 0,75 pts

Résoudre dans I l'équation $f(x) = 11$, puis l'inéquation $f(x) \leq 11$.

6. 1,25 pts

a) Montrer que f s'annule en un unique réel β de I.

b) Calculer la valeur exacte de $f\left(-\frac{26}{27}\right)$, puis, à l'aide de la question 4, en déduire que $-\frac{26}{27} < \beta < -\frac{7}{8}$.

INDICE

Pour b), remarquer que $1 - \frac{26}{27}$ est le cube d'un nombre rationnel.