BURHAN

Continuité : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/continuite/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Continuité	Niveau examen	5

Exercice 1 6 pts

Une fonction rationnelle et la droite y = 4

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x}$, et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. 0,5 pts

Déterminer l'ensemble de définition D_f de f, puis justifier que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. Le réel $f(x)$ existe si et seulement si le dénominateur x n'est pas nul. Donc :

$$D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[.$$

Continuité. La fonction f est le quotient de deux fonctions polynômes : c'est une fonction rationnelle. Or, d'après le cours, toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle contenu dans son domaine, et les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ sont inclus dans D_f.

Conclusion. $D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, et f est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

2. 1 pts

Calculer les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$, à gauche en 0 et à droite en 0.

INDICE

Pour les limites à l'infini, écrire $f(x)$ comme somme de deux termes simples. En 0, étudier séparément le numérateur et le signe du dénominateur.

CORRIGÉ

Pour tout $x \in D_f$:

$$f(x) = \frac{x^3}{x} + \frac{2}{x} = x^2 + \frac{2}{x}.$$

En $-\infty$ et en $+\infty$. x^2 tend vers $+\infty$ et $\dfrac{2}{x}$ tend vers 0. Par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

En 0. Le numérateur $x^3 + 2$ tend vers 2, et $2 > 0$.

- À droite, le dénominateur tend vers 0 en restant positif : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.
- À gauche, le dénominateur tend vers 0 en restant négatif : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$.

Conclusion. f tend vers $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

Ce que le correcteur attend. Les quatre limites, chacune justifiée : somme à l'infini ; limite du numérateur et signe du dénominateur en 0.

3. 1,25 pts

Montrer que, pour tout $x \in D_f$:

$$f'(x) = \frac{2(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x^2},$$

puis dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Dériver un quotient, puis factoriser $x^3 - 1$. Le trinôme $x^2 + x + 1$ a un discriminant négatif.

CORRIGÉ

Dérivée. f est une fonction rationnelle, dérivable sur chaque intervalle de D_f. D'après la dérivée d'un quotient, le numérateur de $f'(x)$ vaut :

$$\begin{aligned} &3x^2 \times x - \left(x^3+2\right) \times 1 \\ &= 2x^3 - 2 = 2\left(x^3-1\right). \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{2\left(x^3-1\right)}{x^2}$.

Factorisation. On vérifie en développant :

$$\begin{aligned} &(x-1)\left(x^2+x+1\right) \\ &= x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 \\ &= x^3 - 1. \end{aligned}$$

D'où l'expression demandée de $f'(x)$.

Signe de $f'(x)$. Pour $x \in D_f$, $x^2 > 0$. Le trinôme $x^2 + x + 1$ a pour discriminant $1 - 4 = -3 < 0$: il est strictement positif pour tout réel x. Donc $f'(x)$ a le signe de $x - 1$: $f'(x) < 0$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$, $f'(1) = 0$, et $f'(x) > 0$ sur $]1, +\infty[$.

Variations. Une dérivée strictement négative sur un intervalle, sauf éventuellement en une extrémité où elle s'annule, donne une fonction strictement décroissante sur cet intervalle ; de même pour la croissance. Avec $f(1) = \dfrac{1+2}{1} = 3$ et les limites de la question 2 :

Intervalle	$]-\infty, 0[$	$]0, 1]$	$[1, +\infty[$
Signe de $f'(x)$	$-$	$-$ (nul en 1)	$+$ (nul en 1)
Variations de f	strictement décroissante, de $+\infty$ vers $-\infty$	strictement décroissante, de $+\infty$ vers 3	strictement croissante, de 3 vers $+\infty$

Conclusion. f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1]$, strictement croissante sur $[1, +\infty[$, avec $f(1) = 3$.

Ce que le correcteur attend. Le calcul de $f'(x)$, la factorisation vérifiée, le signe justifié (discriminant de $x^2 + x + 1$) et un tableau complet avec $f(1) = 3$ et les limites.

4. 0,75 pts

Déterminer les images $f\big(]-\infty,0[\big)$, $f\big(]0,1]\big)$ et $f\big([1,+\infty[\big)$.

CORRIGÉ

Sur chacun de ces trois intervalles, f est continue (question 1) et strictement monotone (question 3). L'image d'un intervalle par une telle fonction s'obtient à partir des valeurs et des limites aux bornes.

Sur $]-\infty,0[$**.** f est strictement décroissante, donc :

$$\begin{aligned} & f\big(]-\infty,0[\big) \\ &= \Big]\lim_{x\to 0^-} f(x),\ \lim_{x\to-\infty} f(x)\Big[\\ &=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sur $]0,1]$**.** f est strictement décroissante, donc :

$$\begin{aligned} & f\big(]0,1]\big) \\ &= \Big[f(1),\ \lim_{x\to 0^+} f(x)\Big[\\ &= [3,+\infty[\,. \end{aligned}$$

Sur $[1,+\infty[$**.** f est strictement croissante, donc :

$$\begin{aligned} & f\big([1,+\infty[\big) \\ &= \Big[f(1),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\Big[\\ &= [3,+\infty[\,. \end{aligned}$$

Conclusion. $f\big(]-\infty,0[\big)=\mathbb{R}$, $f\big(]0,1]\big)=[3,+\infty[$ et $f\big([1,+\infty[\big)=[3,+\infty[$.

5. 1,25 pts

Montrer que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1, +\infty[$, puis, en partant de l'intervalle $[1, 2]$, donner par dichotomie un encadrement de α d'amplitude $0{,}25$.

INDICE

Utiliser l'image de $[1, +\infty[$ trouvée à la question 4. Pour la dichotomie, comparer à 4 (et non à 0) l'image du milieu de l'intervalle en cours.

CORRIGÉ

Existence et unicité. Sur $[1, +\infty[$, f est continue et strictement croissante : elle réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[3, +\infty[$ (question 4). Comme $4 \in [3, +\infty[$, l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α dans $[1, +\infty[$. De plus, $f(1) = 3 \neq 4$, donc $\alpha > 1$.

Dichotomie. On part de $[1, 2]$: $f(1) = 3 < 4$ et $f(2) = \dfrac{10}{2} = 5 > 4$, donc $1 < \alpha < 2$. Comme f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, comparer $f(m)$ à $4 = f(\alpha)$ indique de quel côté de m se trouve α.

- Milieu $1{,}5$: $1{,}5^3 + 2 = 5{,}375$, donc $f(1{,}5) = \dfrac{5{,}375}{1{,}5} \approx 3{,}583 < 4$. Ainsi $\alpha > 1{,}5$: $1{,}5 < \alpha < 2$.
- Milieu $1{,}75$: $1{,}75^3 + 2 = 7{,}359375$, donc $f(1{,}75) = \dfrac{7{,}359375}{1{,}75} \approx 4{,}205 > 4$. Ainsi $\alpha < 1{,}75$.

Conclusion. L'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α dans $[1, +\infty[$, et $1{,}5 < \alpha < 1{,}75$: c'est un encadrement d'amplitude $0{,}25$.

Ce que le correcteur attend. Continuité et stricte monotonie citées, image $[3, +\infty[$ écrite et $4 \in [3, +\infty[$; puis, à chaque étape, l'image du milieu calculée, comparée à 4, et le nouvel intervalle justifié par la monotonie.

6. 0,5 pts

Montrer que l'équation $f(x) = 4$ admet exactement trois solutions dans D_f : α, une solution β dans $]-\infty, 0[$ et une solution γ dans $]0, 1[$.

INDICE

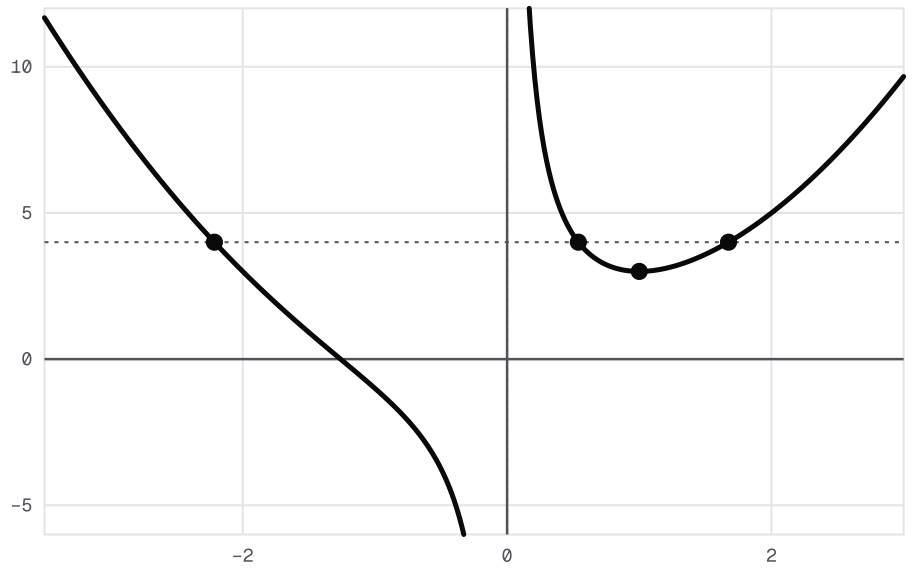
Reprendre les trois images de la question 4. Sur $]0, 1]$, la solution peut-elle être 1 ?

CORRIGÉ

On raisonne sur les trois intervalles de la question 4, de réunion D_f. Ils n'ont en commun que le réel 1, qui n'est pas solution car $f(1) = 3$.

- Sur $]-\infty, 0[$: f est continue et strictement décroissante, d'image $\mathbb{R}$, qui contient 4. L'équation admet une unique solution β dans cet intervalle.
- Sur $]0, 1]$: f est continue et strictement décroissante, d'image $[3, +\infty[$, qui contient 4. L'équation admet une unique solution γ dans cet intervalle ; et $\gamma \neq 1$ car $f(1) = 3$, donc $0 < \gamma < 1$.
- Sur $[1, +\infty[$: l'unique solution est α (question 5).

Conclusion. L'équation $f(x) = 4$ admet exactement trois solutions dans D_f, avec $\beta < 0 < \gamma < 1 < \alpha$.



La courbe de f(x) = (x³ + 2)/x et la droite y = 4 : trois points communs, d'abscisses β négative, γ entre 0 et 1, α plus grande que 1.

7. 0,75 pts

Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de la droite Δ d'équation $y = 4$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$. En déduire le signe de $x^3 - 4x + 2$ pour $x > 0$.

INDICE

Comparer $f(x)$ à $f(\gamma)$ ou à $f(\alpha)$ en utilisant le sens de variation de f sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$.

CORRIGÉ

On étudie le signe de $f(x) - 4$ grâce à la stricte monotonie, sans résoudre l'équation.

- Sur $]0, 1]$, f est strictement décroissante et $f(\gamma) = 4$: si $0 < x < \gamma$, alors $f(x) > 4$; si $\gamma < x \leq 1$, alors $f(x) < 4$.
- Sur $[1, +\infty[$, f est strictement croissante et $f(\alpha) = 4$: si $1 \leq x < \alpha$, alors $f(x) < 4$; si $x > \alpha$, alors $f(x) > 4$.

Position relative. Sur $]0, +\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ sur $]0, \gamma[$ et sur $]\alpha, +\infty[$, au-dessous de Δ sur $]\gamma, \alpha[$; $\mathcal{C}_f$ et Δ se coupent aux points d'abscisses γ et α.

Signe de $x^3 - 4x + 2$. Pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) - 4 &= \frac{x^3 + 2 - 4x}{x} \\ &= \frac{x^3 - 4x + 2}{x}. \end{aligned}$$

Comme $x > 0$, $x^3 - 4x + 2$ a le signe de $f(x) - 4$.

Conclusion. Pour $x > 0$: $x^3 - 4x + 2 > 0$ sur $]0, \gamma[$ et sur $]\alpha, +\infty[$, $x^3 - 4x + 2 < 0$ sur $]\gamma, \alpha[$, et $x^3 - 4x + 2$ s'annule en γ et en α.

Exercice 2 5 pts

Réciproque d'un quotient avec racine carrée

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [-2, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}}$.

1. 0,75 pts

Justifier que f est continue sur I, puis vérifier que pour tout $x \in I$, $f(x) = \sqrt{x+3} - \dfrac{4}{\sqrt{x+3}}$.

INDICE

Pour la seconde partie, écrire $x - 1 = (x+3) - 4$.

CORRIGÉ

Continuité. Pour $x \in I$, $x \geq -2$, donc $x + 3 \geq 1 > 0$. La fonction $x \mapsto x + 3$ est continue (polynôme) et strictement positive sur I : la fonction $x \mapsto \sqrt{x+3}$ est donc continue sur I, et elle ne s'y annule pas. La fonction $x \mapsto x - 1$ est continue sur I (polynôme). Quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, f est continue sur I.

Autre écriture. Soit $x \in I$. On écrit $x - 1 = (x+3) - 4$, avec $\sqrt{x+3} > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+3}{\sqrt{x+3}} - \frac{4}{\sqrt{x+3}} \\ &= \sqrt{x+3} - \frac{4}{\sqrt{x+3}}, \end{aligned}$$

car $\dfrac{x+3}{\sqrt{x+3}} = \dfrac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2}{\sqrt{x+3}} = \sqrt{x+3}$.

Conclusion. f est continue sur I et, pour tout $x \in I$, $f(x) = \sqrt{x+3} - \dfrac{4}{\sqrt{x+3}}$.

2. 1 pts

Montrer, sans calculer de dérivée, que f est strictement croissante sur I.

INDICE

Prendre deux réels $a < b$ de I et comparer successivement $\sqrt{a+3}$ et $\sqrt{b+3}$, puis leurs inverses, en utilisant l'écriture de la question 1.

CORRIGÉ

Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$.

- $0 < a+3 < b+3$, et la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$: $\sqrt{a+3} < \sqrt{b+3}$.
- La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$: $\dfrac{1}{\sqrt{a+3}} > \dfrac{1}{\sqrt{b+3}}$, donc $-\dfrac{4}{\sqrt{a+3}} < -\dfrac{4}{\sqrt{b+3}}$.
- On ajoute membre à membre ces deux inégalités strictes de même sens. Avec l'écriture de la question 1, on obtient $f(a) < f(b)$.

Conclusion. Pour tous réels $a < b$ de I, $f(a) < f(b)$: f est strictement croissante sur I.

Ce que le correcteur attend. Deux réels quelconques $a < b$ de I, chaque comparaison justifiée par le sens de variation d'une fonction de référence (racine carrée, inverse), puis l'addition des inégalités.

3. 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis déterminer l'intervalle $J = f(I)$.

CORRIGÉ

Limite. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+3) = +\infty$, donc $\sqrt{x+3}$ tend vers $+\infty$ et $\dfrac{4}{\sqrt{x+3}}$ tend vers 0. Par différence, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Image. $f(-2) = \dfrac{-3}{\sqrt{1}} = -3$. La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $I = [-2, +\infty[$, donc :

$$\begin{aligned} J &= \Big[f(-2), \lim_{x \to +\infty} f(x) \Big[\\ &= [-3, +\infty[\,. \end{aligned}$$

Conclusion. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $J = f(I) = [-3, +\infty[$.

4. 0,5 pts

Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J, et préciser la continuité et le sens de variation de f^{-1} sur J.

CORRIGÉ

f est continue et strictement croissante sur l'intervalle I, et $J = f(I)$. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de I sur J : elle admet une fonction réciproque f^{-1}, définie sur $J = [-3, +\infty[$ et à valeurs dans I.

D'après les propriétés de la fonction réciproque, f^{-1} est continue sur J et strictement croissante sur J : elle a le même sens de variation que f.

Conclusion. f admet une fonction réciproque f^{-1}, définie, continue et strictement croissante sur J. Son expression n'est pas nécessaire pour l'étudier.

5. 0,75 pts

Calculer $f(1)$, $f(6)$ et $f(13)$. En déduire $f^{-1}(0)$, $f^{-1}\left(\dfrac{5}{3}\right)$ et $f^{-1}(3)$.

CORRIGÉ

On calcule :

$$f(1) = \frac{0}{\sqrt{4}} = 0,$$
$$f(6) = \frac{5}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3},$$
$$f(13) = \frac{12}{\sqrt{16}} = \frac{12}{4} = 3.$$

Par définition de la fonction réciproque, pour $x \in J$ et $y \in I$:

$$y = f^{-1}(x) \iff f(y) = x.$$

Les réels 1, 6 et 13 appartiennent à I, et 0, $\dfrac{5}{3}$ et 3 appartiennent à $J = [-3, +\infty[$.

Conclusion. $f^{-1}(0) = 1$, $f^{-1}\left(\dfrac{5}{3}\right) = 6$ et $f^{-1}(3) = 13$.

6. 1 pts

Résoudre dans J l'inéquation $f^{-1}(x) \leq 13$, puis l'inéquation $1 < f^{-1}(x) \leq 13$.

INDICE

Écrire 13 et 1 comme des images par f^{-1} grâce à la question 5, puis utiliser le sens de variation de f^{-1}.

CORRIGÉ

f^{-1} est strictement croissante sur J. Pour x et x' dans J, on a donc $x \leq x' \iff f^{-1}(x) \leq f^{-1}(x')$, et de même avec des inégalités strictes. Le sens direct est la croissance ; la réciproque s'obtient par contraposée : si $x > x'$, alors $f^{-1}(x) > f^{-1}(x')$.

Première inéquation. D'après la question 5, $13 = f^{-1}(3)$ avec $3 \in J$. Pour $x \in J$:

$$\begin{aligned} & f^{-1}(x) \leq 13 \\ \iff\ & f^{-1}(x) \leq f^{-1}(3) \\ \iff\ & x \leq 3. \end{aligned}$$

Avec $x \in J = [-3, +\infty[$, l'ensemble des solutions est $S_1 = [-3, 3]$.

Seconde inéquation. De même, $1 = f^{-1}(0)$ avec $0 \in J$. Pour $x \in J$, la condition $1 < f^{-1}(x)$ s'écrit $f^{-1}(0) < f^{-1}(x)$, c'est-à-dire $0 < x$; avec la première inéquation :

$$\begin{aligned} & 1 < f^{-1}(x) \leq 13 \\ \iff\ & 0 < x \leq 3. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $S_2 =]0, 3]$.

Conclusion. $S_1 = [-3, 3]$ et $S_2 =]0, 3]$.

Ce que le correcteur attend. 13 et 1 écrits comme images par f^{-1}, la stricte croissance de f^{-1} citée pour les équivalences, et l'intersection avec J.

7. 0,5 pts

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}'$ les courbes de f et de f^{-1}. Justifier que le point $A\left(6, \frac{5}{3}\right)$ appartient à $\mathcal{C}_f$, puis donner deux points de $\mathcal{C}'$: l'un d'ordonnée 6, l'autre situé sur l'axe des ordonnées. Quelle transformation du plan échange $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}'$?

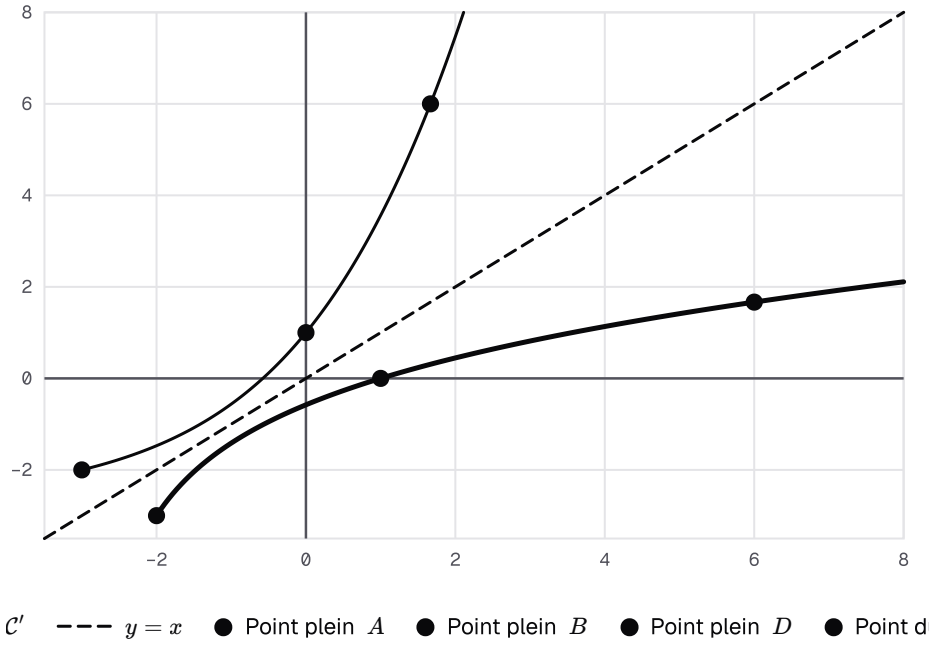
CORRIGÉ

Point de $\mathcal{C}_f$. $f(6) = \frac{5}{3}$ (question 5), donc le point $A\left(6, \frac{5}{3}\right)$ appartient à $\mathcal{C}_f$.

Lien entre les deux courbes. Soit $M(x, y)$ un point avec $x \in J$. M est sur $\mathcal{C}'$ si et seulement si $y = f^{-1}(x)$, c'est-à-dire $f(y) = x$ avec $y \in I$. Ainsi $M(x, y)$ est sur $\mathcal{C}'$ si et seulement si le point (y, x) est sur $\mathcal{C}_f$.

- Comme $f^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) = 6$, le point $B\left(\frac{5}{3}, 6\right)$, d'ordonnée 6, appartient à $\mathcal{C}'$.
- Le point de $\mathcal{C}'$ situé sur l'axe des ordonnées a pour abscisse 0, et $0 \in J$: son ordonnée est $f^{-1}(0) = 1$. C'est le point $D(0, 1)$.

Conclusion. Les points $B\left(\frac{5}{3}, 6\right)$ et $D(0, 1)$ sont sur $\mathcal{C}'$. Dans un repère orthonormé, $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}'$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$: cette symétrie envoie A sur B, et le point $(1, 0)$ de $\mathcal{C}_f$ (car $f(1) = 0$) sur D.



Les courbes de f et de sa réciproque, reflets l'une de l'autre dans la droite y = x : A(6, 5/3) va en B(5/3, 6), et (1, 0) va en D(0, 1).

Exercice 3 4 pts

Une suite récurrente et un intervalle stable

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{x^2+3}{4}$. Soit (u_n) la suite telle que $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$.

On admet les résultats suivants sur les suites :

- **(R1)** si une suite (v_n) converge vers L et si $m \leq v_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $m \leq L \leq M$;
- **(R2)** si une suite (v_n) converge vers L et si une fonction h est continue en L, alors la suite $\big(h(v_n)\big)$ converge vers $h(L)$;
- **(R3)** si une suite (v_n) converge vers L, la suite (v_{n+1}) converge aussi vers L ;
- **(R4)** une suite convergente admet une unique limite : si (v_n) converge vers L et vers L', alors $L = L'$.

1. 0,5 pts

Justifier que g est continue sur $\mathbb{R}$, puis calculer u_1 et u_2.

CORRIGÉ

Continuité. g est une fonction polynôme de degré 2 : elle est continue sur $\mathbb{R}$.

Premiers termes.

$$u_1 = g(0) = \frac{0+3}{4} = \frac{3}{4},$$
$$u_2 = g\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\frac{9}{16}+3}{4} = \frac{\frac{57}{16}}{4} = \frac{57}{64}.$$

Conclusion. g est continue sur $\mathbb{R}$, $u_1 = \dfrac{3}{4}$ et $u_2 = \dfrac{57}{64}$.

2. 1 pts

Montrer que g est strictement croissante sur l'intervalle $[0,1]$, puis déterminer $g\big([0,1]\big)$. En déduire que $g\big([0,1]\big) \subset [0,1]$.

INDICE

Sur $[0,1]$, les nombres sont positifs : la fonction carré y conserve l'ordre strict.

CORRIGÉ

Monotonie. Soit a et b dans $[0,1]$ avec $a < b$. Comme $0 \leq a < b$ et que la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, on a $a^2 < b^2$. Donc $a^2 + 3 < b^2 + 3$ et, en divisant par $4 > 0$, $g(a) < g(b)$: g est strictement croissante sur $[0,1]$.

Image. $g(0) = \dfrac{3}{4}$ et $g(1) = \dfrac{1+3}{4} = 1$. Comme g est continue et strictement croissante sur le segment $[0,1]$:

$$\begin{aligned} g\big([0,1]\big) &= \big[g(0), g(1)\big] \\ &= \left[\frac{3}{4}, 1\right]. \end{aligned}$$

Inclusion. $0 \leq \dfrac{3}{4}$ et $1 \leq 1$, donc $\left[\dfrac{3}{4}, 1\right] \subset [0,1]$.

Conclusion. g est strictement croissante sur $[0,1]$, $g\big([0,1]\big) = \left[\dfrac{3}{4}, 1\right]$ et $g\big([0,1]\big) \subset [0,1]$: l'intervalle $[0,1]$ est stable par g.

Ce que le correcteur attend. La stricte croissance justifiée sur $[0,1]$ (positivité utilisée), l'image du segment par une fonction continue strictement croissante, puis l'inclusion.

3. 0,75 pts

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 1$.

CORRIGÉ

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété « $u_n \in [0,1]$ ».

- **Initialisation.** $u_0 = 0$ et $0 \in [0,1]$: $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire $u_n \in [0,1]$. Alors $u_{n+1} = g(u_n)$ appartient à $g\big([0,1]\big)$, qui est inclus dans $[0,1]$ (question 2). Donc $u_{n+1} \in [0,1]$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

4. 1 pts

On admet que la suite (u_n) est convergente et on note ℓ sa limite. Montrer que $\ell \in [0,1]$, puis que $g(\ell) = \ell$.

INDICE

Pour $\ell \in [0,1]$, appliquer (R1) avec l'encadrement de la question 3. Pour $g(\ell) = \ell$, regarder la suite (u_{n+1}) de deux façons : avec (R3), puis comme la suite $\big(g(u_n)\big)$ avec (R2), en citant la continuité de g en ℓ.

CORRIGÉ

Encadrement de la limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$ (question 3), et (u_n) converge vers ℓ. D'après le résultat admis (R1), $0 \leq \ell \leq 1$.

Équation vérifiée par ℓ.

- La suite (u_{n+1}) converge vers ℓ, d'après (R3).
- La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ (question 1), donc continue en ℓ. Comme (u_n) converge vers ℓ, le résultat (R2) donne : la suite $\big(g(u_n)\big)$ converge vers $g(\ell)$.
- Or $g(u_n) = u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: c'est la même suite. D'après (R4), unicité de la limite, $g(\ell) = \ell$.

Conclusion. $\ell \in [0,1]$ et $g(\ell) = \ell$.

Ce que le correcteur attend. (R1) appliqué à l'encadrement de la question 3 ; la continuité de g **en** ℓ citée ; l'unicité de la limite invoquée.

5. 0,75 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) - x = 0$, puis déterminer ℓ.

CORRIGÉ

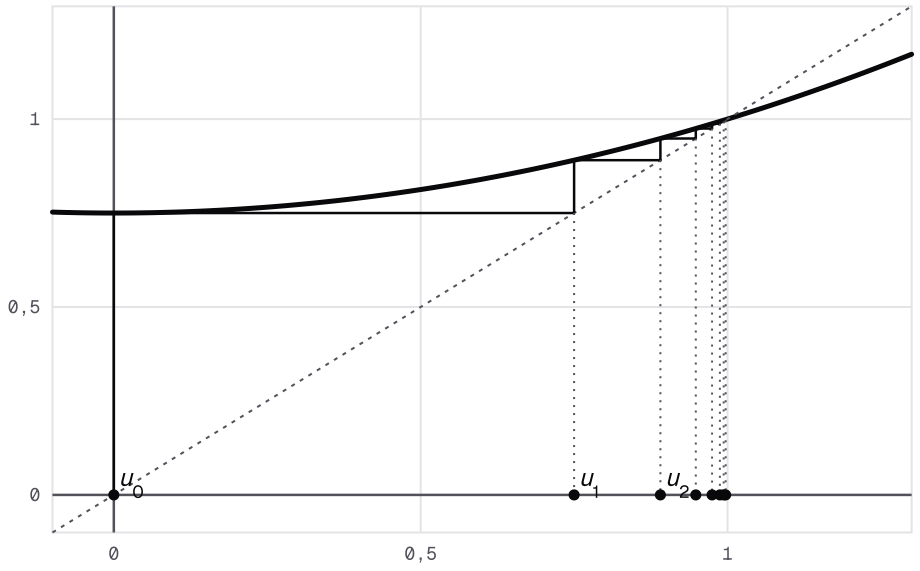
Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & g(x) - x = 0 \\ \iff & \frac{x^2 + 3}{4} = x \\ \iff & x^2 - 4x + 3 = 0 \\ \iff & (x-1)(x-3) = 0. \end{aligned}$$

En effet, $(x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$. Les solutions sont donc 1 et 3.

D'après la question 4, ℓ est une solution de cette équation et $\ell \in [0,1]$. Or $3 \notin [0,1]$, tandis que $1 \in [0,1]$.

Conclusion. L'équation $g(x) - x = 0$ a pour solutions 1 et 3, et $\ell = 1$: la suite (u_n) converge vers 1. Sans l'information $\ell \in [0,1]$, on ne pourrait pas choisir entre 1 et 3.



L'escalier des termes de la suite, avec $u_0 = 0$: les termes montent vers 1, abscisse du point commun de la courbe de g et de la droite y = x situé dans [0, 1].

Exercice 4 5 pts

Fonction par morceaux : raccord, zéros et image de $\mathbb{R}$

Soit a un réel. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3$ si $x \leq 0$;
- $f(x) = \dfrac{x + a}{x + 1}$ si $x > 0$.

1. 0,75 pts

Trouver le réel a tel que f soit continue en 0.

INDICE

Comparer $f(0)$ avec la limite à droite en 0 ; la continuité à gauche est automatique ici.

CORRIGÉ

f est bien définie sur $\mathbb{R}$, car $x + 1 > 0$ pour $x > 0$. En 0, c'est la première expression qui s'applique : $f(0) = 0 + 0 - 3 = -3$.

- **À gauche.** La fonction polynôme $x \mapsto x^3 + 3x^2 - 3$ est continue en 0, donc $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -3 = f(0)$: f est continue à gauche en 0, quel que soit a.
- **À droite.** Pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x + a}{x + 1}$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{a}{1} = a$.

f est continue en 0 si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en 0, c'est-à-dire si et seulement si $a = -3$.

Conclusion. f est continue en 0 si et seulement si $a = -3$.

2. 0,5 pts

Dans toute la suite, $a = -3$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

CORRIGÉ

On étudie la continuité sur chaque intervalle ouvert, puis en 0.

- Sur $]-\infty, 0[$, $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3$: fonction polynôme, continue.
- Sur $]0, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{x - 3}{x + 1}$: fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle ($x + 1 > 1$), donc continue.
- En 0 : f est continue d'après la question 1, puisque $a = -3$.

Conclusion. f est continue en tout point de $\mathbb{R}$: elle est continue sur $\mathbb{R}$.

3. 1 pts

Étude sur $]-\infty, 0]$: calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, étudier les variations de f sur $]-\infty, 0]$ et calculer $f(-2)$.

INDICE

Sur $]-\infty, 0]$, f coïncide avec une fonction polynôme P ; étudier le signe de $P'(x)$.

CORRIGÉ

Sur $]-\infty, 0]$, f coïncide avec la fonction polynôme $P : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 3$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Limite. Pour $x \neq 0$:

$$P(x) = x^3 \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^3}\right).$$

En $-\infty$, la parenthèse tend vers 1 et x^3 tend vers $-\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Variations. Pour tout réel x, $P'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$.

- Sur $]-\infty, -2[$: $x < 0$ et $x + 2 < 0$, donc $P'(x) > 0$; $P'(-2) = 0$. Donc f est strictement croissante sur $]-\infty, -2]$.
- Sur $]-2, 0[$: $x < 0$ et $x + 2 > 0$, donc $P'(x) < 0$; P' ne s'annule qu'aux extrémités -2 et 0. Donc f est strictement décroissante sur $[-2, 0]$.

Valeurs. $f(-2) = -8 + 12 - 3 = 1$ et $f(0) = -3$.

Intervalle	$]-\infty, -2]$	$[-2, 0]$
Variations de f	strictement croissante, de $-\infty$ vers 1	strictement décroissante, de 1 vers -3

Conclusion. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; f est strictement croissante sur $]-\infty, -2]$ et strictement décroissante sur $[-2, 0]$; $f(-2) = 1$.

Ce que le correcteur attend. La limite en $-\infty$ justifiée, $P'(x)$ factorisée et son signe, le sens de variation sur chaque intervalle et $f(-2) = 1$.

4. 0,75 pts

Étude sur $]0,+\infty[$: vérifier que pour tout $x>0$, $f(x)=1-\dfrac{4}{x+1}$. En déduire, sans dérivée, que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, puis déterminer $f\big(]0,+\infty[\big)$.

CORRIGÉ

Écriture. Pour $x>0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x-3}{x+1} \\ &= \frac{(x+1)-4}{x+1} \\ &= 1-\frac{4}{x+1}. \end{aligned}$$

Monotonie. Soit s et t deux réels tels que $0<s<t$. Alors $1<s+1<t+1$. La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, donc $\dfrac{4}{s+1}>\dfrac{4}{t+1}$, puis $1-\dfrac{4}{s+1}<1-\dfrac{4}{t+1}$, c'est-à-dire $f(s)<f(t)$. Donc f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

Image. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-3$ (question 1) et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x+1}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. Comme f est continue et strictement croissante sur l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned} &f\big(]0,+\infty[\big) \\ &= \Big]\lim_{x\to 0^+} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\Big[\\ &=]-3,1[\,. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x>0$, $f(x)=1-\dfrac{4}{x+1}$; f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et $f\big(]0,+\infty[\big)=]-3,1[$.

5. 1,25 pts

Montrer que f s'annule en exactement trois réels $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$, avec $-3 < \beta_1 < -2 < \beta_2 < -1$, et calculer β_3.

INDICE

Sur combien d'intervalles f est-elle strictement monotone ? Sur chacun, l'image contient-elle 0 ? Pour situer β_1 et β_2, chercher des entiers où f change de signe.

CORRIGÉ

On découpe $\mathbb{R}$ en trois intervalles disjoints : $]-\infty,-2]$, $]-2,0]$ et $]0,+\infty[$.

Sur $]-\infty,-2]$. f est continue et strictement croissante, d'image $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(-2)\right] =]-\infty,1]$, qui contient 0 : f s'annule en un unique réel β_1 de $]-\infty,-2]$. De plus, $f(-3) = -27+27-3 = -3$, donc $f(-3) < 0 < f(-2)$. Comme f est strictement croissante sur $[-3,-2]$, on obtient $-3 < \beta_1 < -2$.

Sur $]-2,0]$. f est continue et strictement décroissante sur $[-2,0]$, d'image $\big[f(0), f(-2)\big] = [-3,1]$, qui contient 0 : f s'annule en un unique réel β_2 de $[-2,0]$, et $\beta_2 \neq -2$ car $f(-2) = 1$. De plus, $f(-1) = -1+3-3 = -1$, donc $f(-1) < 0 < f(-2)$. Par stricte décroissance sur $[-2,-1]$, on obtient $-2 < \beta_2 < -1$.

Sur $]0,+\infty[$. f est strictement croissante, donc s'annule au plus une fois. Pour $x > 0$, $\dfrac{x-3}{x+1} = 0$ équivaut à $x = 3$. Donc $\beta_3 = 3$.

Conclusion. f s'annule en exactement trois réels : $-3 < \beta_1 < -2 < \beta_2 < -1$ et $\beta_3 = 3$.

Ce que le correcteur attend. Un découpage en intervalles disjoints ; sur chacun, continuité, stricte monotonie et image contenant 0 ; les signes de $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$ pour situer ; β_3 calculé.

6. 0,75 pts

Déterminer $f(\mathbb{R})$. La fonction f admet-elle un maximum sur $\mathbb{R}$?

CORRIGÉ

$\mathbb{R}$ est la réunion de $]-\infty,-2]$, $[-2,0]$ et $]0,+\infty[$, donc $f(\mathbb{R})$ est la réunion des images de ces trois intervalles :

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}) &=]-\infty,1] \cup [-3,1] \\ &\quad \cup]-3,1[\\ &=]-\infty,1]\,. \end{aligned}$$

C'est cohérent avec le théorème de l'image d'un intervalle : f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc $f(\mathbb{R})$ est un intervalle.

Maximum. Pour tout réel x, $f(x) \leq 1$, et $f(-2) = 1$.

Conclusion. $f(\mathbb{R}) =]-\infty,1]$, et f admet sur $\mathbb{R}$ un maximum égal à 1, atteint en -2. En revanche, f n'admet pas de minimum, car $f(\mathbb{R})$ n'est pas minoré.

Exercice 5 5 pts

Une somme avec racine cubique

Soit f la fonction définie sur $I = [-1, +\infty[$ par $f(x) = x + 2\sqrt[3]{x+1}$.

1. 0,75 pts

Montrer que f est bien définie sur I et qu'elle y est continue.

INDICE

La racine cubique n'est définie ici que pour un nombre positif : regarder le signe de $x+1$. Pour la continuité, voir $x \mapsto \sqrt[3]{x+1}$ comme une composée.

CORRIGÉ

Définition. La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est définie sur $[0, +\infty[$. Pour $x \in I$, $x \geq -1$, donc $x + 1 \geq 0$: $\sqrt[3]{x+1}$ existe, et $f(x)$ aussi.

Continuité.

- La fonction $u : x \mapsto x + 1$ est continue sur I (polynôme) et $u(I) = [0, +\infty[$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ (propriété de la racine n-ième).
- Par composition, $x \mapsto \sqrt[3]{x+1}$ est continue sur I ; par produit par 2 et somme avec $x \mapsto x$, f est continue sur I.

Conclusion. f est bien définie et continue sur I.

2. 0,75 pts

Montrer que f est strictement croissante sur I.

CORRIGÉ

Soit a et b dans I tels que $a < b$. Alors $0 \leq a + 1 < b + 1$. La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc $\sqrt[3]{a+1} < \sqrt[3]{b+1}$, puis $2\sqrt[3]{a+1} < 2\sqrt[3]{b+1}$. En ajoutant l'inégalité $a < b$:

$$a + 2\sqrt[3]{a+1} < b + 2\sqrt[3]{b+1},$$

c'est-à-dire $f(a) < f(b)$.

Conclusion. f est strictement croissante sur I.

3. 0,75 pts

Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Justifier ensuite que f établit une bijection de I vers l'intervalle $J = f(I)$, et expliciter J.

CORRIGÉ

Limite. Pour tout $x \in I$, $\sqrt[3]{x+1} \geq 0$, donc $f(x) \geq x$. Comme $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, par comparaison, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Bijection. $f(-1) = -1 + 2\sqrt[3]{0} = -1$. La fonction f est continue (question 1) et strictement croissante (question 2) sur l'intervalle $I = [-1, +\infty[$: elle réalise une bijection de I sur

$$\begin{aligned} J &= \left[f(-1), \lim_{x\to+\infty} f(x) \right[\\ &= [-1, +\infty[. \end{aligned}$$

Conclusion. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et f est une bijection de I sur $J = f(I) = [-1, +\infty[$.

4. 0,75 pts

a) Justifier que pour tout $x > -1$, $f(x) = x + 2(x+1)^{\frac{1}{3}}$.

b) Calculer $f(7)$ et $f\left(\frac{1}{8} - 1\right)$ en écrivant les racines cubiques comme des puissances rationnelles.

INDICE

Écrire 8 et $\frac{1}{8}$ comme des puissances de 2 et utiliser $(x^r)^{r'} = x^{rr'}$.

CORRIGÉ

a) Soit $x > -1$. Alors $x + 1 > 0$ et, par définition des puissances rationnelles, $(x+1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x+1}$. Donc $f(x) = x + 2(x+1)^{\frac{1}{3}}$.

b) $7 + 1 = 8 = 2^3$, donc :

$$8^{\frac{1}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{3 \times \frac{1}{3}} = 2.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f(7) &= 7 + 2 \times 8^{\frac{1}{3}} \\ &= 7 + 2 \times 2 = 11. \end{aligned}$$

De même, $\left(\frac{1}{8} - 1\right) + 1 = \frac{1}{8} = 2^{-3}$, donc :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} &= \left(2^{-3}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= 2^{-1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{8} - 1\right) &= f\left(-\frac{7}{8}\right) \\ &= -\frac{7}{8} + 2 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Conclusion. $f(7) = 11$ et $f\left(\frac{1}{8} - 1\right) = \frac{1}{8}$.

5. 0,75 pts

Résoudre dans I l'équation $f(x) = 11$, puis l'inéquation $f(x) \leq 11$.

CORRIGÉ

Équation. $11 \in J = [-1, +\infty[$ et f est une bijection de I sur J : l'équation $f(x) = 11$ admet une unique solution dans I. Or $7 \in I$ et $f(7) = 11$ (question 4) : cette solution est 7.

Inéquation. f est strictement croissante sur I. Pour $x \in I$:

$$\begin{aligned} f(x) \leq 11 &\iff f(x) \leq f(7) \\ &\iff x \leq 7. \end{aligned}$$

En effet, si $x > 7$, la stricte croissance donne $f(x) > 11$.

Conclusion. L'équation $f(x) = 11$ a pour ensemble de solutions $\{7\}$; l'inéquation $f(x) \leq 11$ a pour ensemble de solutions $[-1, 7]$.

6. 1,25 pts

a) Montrer que f s'annule en un unique réel β de I.

b) Calculer la valeur exacte de $f\left(-\dfrac{26}{27}\right)$, puis, à l'aide de la question 4, en déduire que $-\dfrac{26}{27} < \beta < -\dfrac{7}{8}$.

INDICE

Pour b), remarquer que $1 - \dfrac{26}{27}$ est le cube d'un nombre rationnel.

CORRIGÉ

a) $0 \in J = [-1, +\infty[$ et f est une bijection de I sur J : il existe un unique $\beta \in I$ tel que $f(\beta) = 0$. Comme $f(-1) = -1 \neq 0$, on a $\beta > -1$.

b) $-\dfrac{26}{27} + 1 = \dfrac{1}{27} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3$, donc $\sqrt[3]{\dfrac{1}{27}} = \dfrac{1}{3}$ et :

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{26}{27}\right) &= -\frac{26}{27} + \frac{2}{3} \\ &= -\frac{26}{27} + \frac{18}{27} \\ &= -\frac{8}{27}. \end{aligned}$$

D'après la question 4, $f\left(-\dfrac{7}{8}\right) = \dfrac{1}{8}$. Comme $f(\beta) = 0$:

$$f\left(-\frac{26}{27}\right) < f(\beta) < f\left(-\frac{7}{8}\right).$$

Les trois réels $-\dfrac{26}{27}$, β et $-\dfrac{7}{8}$ sont dans I, où f est strictement croissante : elle conserve l'ordre dans les deux sens.

Conclusion. f s'annule en un unique réel β de I, et $-\dfrac{26}{27} < \beta < -\dfrac{7}{8}$.

Ce que le correcteur attend. $0 \in J$ et la bijection citée pour l'unicité ; les deux valeurs exactes et leurs signes ; la stricte croissance invoquée pour l'encadrement.