BURHAN

Continuité : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/continuite/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Continuité	Entraînement	7

Exercice 1

Deux raccords, deux paramètres

Soit a et b deux réels. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x}$ si $x < -1$;
- $f(x) = ax + b$ si $-1 \leq x \leq 2$;
- $f(x) = \sqrt{x^2+5}$ si $x > 2$.

Le but est de choisir a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

1.

Calculer $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$. Exprimer $f(-1)$ et $f(2)$ en fonction de a et b.

INDICE

À gauche de -1, quelle expression de f s'applique ? Et à droite de 2 ? Pour $f(-1)$ et $f(2)$, regarde quelle ligne contient l'égalité.

2.

Traduire la continuité de f en -1, puis la continuité de f en 2, par une équation portant sur a et b.

INDICE

Être continue en un point, c'est y être continue à gauche **et** à droite. En chacun des deux points, un des deux côtés est automatique : lequel, et pourquoi ? L'autre côté fournit l'équation, grâce à la question 1.

3.

En déduire les valeurs de a et b pour lesquelles f est continue en -1 et en 2. Écrire alors l'expression de f sur $[-1, 2]$.

INDICE

Les deux conditions doivent être vraies **en même temps** : c'est un système de deux équations à deux inconnues.

4.

On donne désormais à a et b les valeurs trouvées à la question 3. Justifier que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 2[$ et $]2, +\infty[$, puis conclure que f est continue sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Sur chaque intervalle ouvert, une seule expression s'applique : reconnais une fonction rationnelle, une fonction affine, une racine carrée d'une fonction positive.

Exercice 2

Combien d'antécédents selon m ?

On considère la fonction f définie sur $I = [0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$.

1.

Justifier que f est continue sur I et calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

Quel type de fonction est f ? Son dénominateur peut-il s'annuler ? Pour la limite, factorise par le terme de plus haut degré.

2.

Calculer $f'(x)$ pour $x \in I$, puis dresser le tableau de variations de f sur I (avec $f(0)$, $f(2)$ et la limite en $+\infty$).

INDICE

Dérivée d'un quotient $\dfrac{u}{v}$: $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Factorise le numérateur pour lire son signe.

3.

Déterminer $f\big([0, 2]\big)$ et $f\big([2, +\infty[\big)$, en soignant les crochets.

INDICE

Sur chaque intervalle, f est continue et strictement monotone : utilise le tableau des images. Une borne obtenue par une limite non atteinte donne un crochet ouvert.

4.

Soit m un réel. Discuter, selon les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $f(t) = m$ d'inconnue $t \in I$.

INDICE

Sur chacun des deux intervalles, f réalise une bijection sur son image : chaque valeur de l'image est atteinte une seule fois **sur ce morceau**. Compte ensuite les morceaux dont l'image contient m, sans compter deux fois le point commun 2.

5.

Vérification : résoudre algébriquement dans I l'équation $f(t) = \dfrac{1}{2}$ et contrôler que le résultat est cohérent avec la question 4.

INDICE

Multiplie les deux membres par $2(t^2 + 4)$, qui n'est jamais nul, pour obtenir une équation du second degré.

Exercice 3

Une racine carrée, une solution, une dichotomie

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2\sqrt{3-x} - x^3$.

1.

Déterminer l'ensemble de définition D de f.

INDICE

Une racine carrée n'existe que pour un nombre positif ou nul.

2.

Justifier que f est continue et strictement décroissante sur D.

INDICE

Ne dérive pas : écris f comme la somme de deux fonctions dont tu connais le sens de variation, et regarde $x \mapsto \sqrt{3-x}$ comme une composée.

3.

Montrer que l'équation $2\sqrt{3-x} = x^3$ admet une unique solution α dans D, puis que $1 < \alpha < 2$.

INDICE

Ramène-toi à l'équation $f(x) = 0$. Pour l'existence sur tout D, cherche l'image de D ; pour situer α, calcule $f(1)$ et $f(2)$.

4.

Par la méthode de dichotomie, en partant de $[1, 2]$, déterminer un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-1}. Présenter chaque étape.

INDICE

À chaque étape, calcule f au milieu c. Attention au sens : f est **décroissante**, donc $f(c) > 0$ signifie que c est **avant** α.

Exercice 4

Une fonction auxiliaire au service des variations

Partie A. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2$.

Partie B. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 3x + \dfrac{2}{x}$. On admet que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

1.

(Partie A) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$, avec $g(0)$, $g(1)$ et les limites en $-\infty$ et $+\infty$.

INDICE

Factorise $g'(x)$ par $6x$. Les limites d'un polynôme en l'infini sont celles de son terme de plus haut degré.

2.

Montrer que g s'annule en un unique réel α, puis que $1{,}8 < \alpha < 1{,}9$.

INDICE

Découpe $\mathbb{R}$ en $]-\infty, 1]$ et $[1, +\infty[$. Sur le premier, quelle est la plus grande valeur de g ? Sur le second, utilise la stricte monotonie.

3.

En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs du réel x.

INDICE

Pour x dans $[1, +\infty[$, compare $g(x)$ à $g(\alpha)$ en utilisant le sens de variation. N'oublie pas $]-\infty, 1]$.

4.

(Partie B) Calculer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$, puis déduire de la question 3 le sens de variation de f sur $]0, +\infty[$.

INDICE

$f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe : pourquoi ? Pour la limite en $+\infty$, écris $x^2 - 3x = x(x - 3)$.

5.

En utilisant $g(\alpha) = 0$, montrer que $f(\alpha) = 3\alpha(\alpha - 2)$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à l'aide de l'encadrement de α obtenu à la question 2.

INDICE

La seule information exacte sur α est $g(\alpha) = 0$. Quel terme de $f(\alpha)$ gêne ? Exprime-le à l'aide de cette égalité. Pour l'encadrement, attention au signe des facteurs avant de multiplier des inégalités.

Exercice 5

Une réciproque qu'on n'écrit pas

On considère la fonction f définie sur $I = [0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{6}{x^2 + 2}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé. On ne cherchera pas l'expression de la réciproque.

1.

Justifier que f est continue et strictement décroissante sur I.

INDICE

Pour la monotonie, pars de deux réels $0 \leq a < b$ et compare successivement $a^2 + 2$ et $b^2 + 2$, puis leurs inverses.

2.

Déterminer l'intervalle $J = f(I)$. En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} ; préciser son ensemble de définition et l'ensemble de ses valeurs. Les nombres $f^{-1}(3)$ et $f^{-1}(0)$ existent-ils ?

INDICE

Calcule $f(0)$ et la limite de f en $+\infty$. Pour une fonction décroissante, dans quel ordre s'écrivent les bornes de l'image ? Une limite non atteinte donne quel crochet ?

3.

Résoudre dans I l'équation $\dfrac{6}{x^2 + 2} = \dfrac{3}{2}$ et en déduire $f^{-1}\left(\dfrac{3}{2}\right)$. Calculer $f(1)$ et $f(4)$, et en déduire $f^{-1}(2)$ et $f^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

INDICE

Rappel : pour $y \in J$ et $x \in I$, $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$. Après résolution, vérifie que chaque solution appartient bien à I.

4.

Préciser le sens de variation et la continuité de f^{-1} sur J. Sans calculer $f^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$, montrer que $1 < f^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) < 4$.

INDICE

f^{-1} a le même sens de variation que f. Place $\dfrac{1}{2}$ entre deux nombres de J dont tu connais l'image par f^{-1}, puis applique ce sens de variation.

5.

a) Un élève écrit : « $f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{3}{2}\right)}$ ». Expliquer son erreur à l'aide d'un calcul.

b) Donner deux points de la courbe de f^{-1} obtenus à partir de la question 3, et justifier que ce sont les symétriques de deux points de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.

INDICE

Compare la valeur trouvée à la question 3 avec $\frac{1}{f\left(\frac{3}{2}\right)}$. Pour b), une égalité $f(x) = y$ fournit un point de $\mathcal{C}_f$; quel point de la courbe de f^{-1} lui correspond ?

Exercice 6

Racines n-ièmes et puissances rationnelles en action

1.

Écrire chacun des nombres suivants sous la forme d'un entier :

$$A = \frac{\sqrt[3]{9} \times \sqrt{3}}{\sqrt[6]{3}},$$
$$B = \frac{27^{\frac{2}{3}} \times 9^{-\frac{1}{2}}}{81^{\frac{1}{4}}},$$
$$C = \left(\sqrt[4]{27}\right)^{\frac{4}{3}}.$$

INDICE

Écris chaque racine sous forme de puissance rationnelle d'un même nombre premier, puis additionne ou soustrais les exposants.

2.

Pour $x > 0$, on pose $E(x) = \dfrac{x^{\frac{3}{4}} \times \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$.

a) Simplifier $E(x)$ et en déduire $E(125)$.

b) Pourquoi l'énoncé impose-t-il $x > 0$?

INDICE

Écris $\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$ et $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$. Pour b), relis la définition d'une puissance rationnelle.

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt[3]{2x - 1} < 3$.

INDICE

Commence par le domaine : sous la racine, le nombre doit être positif. Écris ensuite 3 comme une racine cubique et utilise la stricte croissance de $t \mapsto \sqrt[3]{t}$.

4.

Vrai ou faux ? Justifier.

a) Pour tout réel x, $\sqrt[3]{x^3} = x$.

b) $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{32}$.

c) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4}$.

INDICE

a) Relis la définition de la racine n-ième dans ce chapitre : pour quels réels est-elle définie ? Teste un réel négatif. b) Écris chaque facteur comme une puissance rationnelle de 2. c) Mets $\sqrt[3]{2}$ en facteur, puis fais entrer le coefficient sous la racine.

Exercice 7

Compter exactement les solutions

Soit P la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3$.

1.

Calculer $P'(x)$ et le factoriser. Dresser le tableau de variations de P sur $\mathbb{R}$, avec les valeurs de P aux points où P' s'annule et les limites en $-\infty$ et $+\infty$.

INDICE

Mets $12x$ en facteur dans $P'(x)$, puis factorise le trinôme restant.

2.

Déterminer le nombre exact de solutions de l'équation $P(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.

INDICE

Sur chacun des quatre intervalles de la question 1, détermine l'image par P et regarde si elle contient 0. Le théorème des valeurs intermédiaires seul donne « au moins une » solution : qu'apporte la stricte monotonie ?

3.

Par la même méthode, déterminer le nombre exact de solutions de l'équation $P(x) = 3$ dans $\mathbb{R}$.

INDICE

Reprends le tableau des images. Avant d'additionner, vérifie si une même solution peut appartenir à deux intervalles consécutifs.

4.

Vérifier le résultat de la question 3 en résolvant algébriquement l'équation $P(x) = 3$.

INDICE

$P(x) = 3$ se ramène à $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 = 0$: mets x^2 en facteur.