BURHAN

Continuité : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/continuite/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Continuité	Entraînement	7

Exercice 1

Deux raccords, deux paramètres

Soit a et b deux réels. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x}$ si $x < -1$;
- $f(x) = ax + b$ si $-1 \leq x \leq 2$;
- $f(x) = \sqrt{x^2+5}$ si $x > 2$.

Le but est de choisir a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

1.

Calculer $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$. Exprimer $f(-1)$ et $f(2)$ en fonction de a et b.

INDICE

À gauche de -1, quelle expression de f s'applique ? Et à droite de 2 ? Pour $f(-1)$ et $f(2)$, regarde quelle ligne contient l'égalité.

CORRIGÉ

Une limite à gauche en -1 ne fait intervenir que les $x < -1$: c'est la première expression qui compte. À droite en 2, seuls les $x > 2$ interviennent : c'est la troisième.

Limite à gauche en -1. Pour $x < -1$, $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x}$. Le numérateur tend vers $(-1)^2 + 2 = 3$ et le dénominateur vers -1, qui n'est pas nul. Par quotient :

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \frac{3}{-1} = -3.$$

Limite à droite en 2. Pour $x > 2$, $f(x) = \sqrt{x^2+5}$. Quand x tend vers 2, x^2+5 tend vers 9, et la fonction racine carrée est continue en 9, donc :

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \sqrt{9} = 3.$$

Valeurs en -1 et en 2. Les réels -1 et 2 vérifient $-1 \leq x \leq 2$: la deuxième expression s'applique, donc $f(-1) = -a + b$ et $f(2) = 2a + b$.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -3$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3$, $f(-1) = -a + b$ et $f(2) = 2a + b$.

2.

Traduire la continuité de f en -1, puis la continuité de f en 2, par une équation portant sur a et b.

INDICE

Être continue en un point, c'est y être continue à gauche **et** à droite. En chacun des deux points, un des deux côtés est automatique : lequel, et pourquoi ? L'autre côté fournit l'équation, grâce à la question 1.

CORRIGÉ

En -1 et en 2, l'expression de f change : on utilise le fait que f est continue en un point si et seulement si elle y est continue à gauche et à droite.

En -1.

- À droite : pour $-1 \leq x \leq 2$, $f(x) = ax + b$, donc $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -a + b = f(-1)$. Ainsi f est continue à droite en -1, quels que soient a et b.
- À gauche : d'après la question 1, $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -3$. La continuité à gauche s'écrit donc $-a + b = -3$.

Ainsi f est continue en -1 si et seulement si $-a + b = -3$.

En 2.

- À gauche : $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2a + b = f(2)$, quels que soient a et b.
- À droite : $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3$, donc la continuité à droite s'écrit $2a + b = 3$.

Ainsi f est continue en 2 si et seulement si $2a + b = 3$.

Conclusion. La continuité de f en -1 équivaut à $-a + b = -3$; sa continuité en 2 équivaut à $2a + b = 3$.

Piège. Comparer la limite à gauche en -1 avec la troisième expression, ou oublier l'un des deux points : il y a deux raccords, donc deux conditions.

3.

En déduire les valeurs de a et b pour lesquelles f est continue en -1 et en 2. Écrire alors l'expression de f sur $[-1, 2]$.

INDICE

Les deux conditions doivent être vraies **en même temps** : c'est un système de deux équations à deux inconnues.

CORRIGÉ

Une seule condition ne fixe pas deux inconnues : il faut les deux raccords à la fois, c'est-à-dire le système

$$\begin{cases} -a + b = -3 \\ 2a + b = 3. \end{cases}$$

Résolution. En soustrayant la première équation de la seconde, $3a = 6$, donc $a = 2$. Puis $b = -3 + a = -1$.

Vérification. $-2 + (-1) = -3$ et $4 + (-1) = 3$: les deux équations sont satisfaites.

Conclusion. f est continue en -1 et en 2 si et seulement si $a = 2$ et $b = -1$. Dans ce cas, pour tout $x \in [-1, 2]$, $f(x) = 2x - 1$.

4.

On donne désormais à a et b les valeurs trouvées à la question 3. Justifier que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 2[$ et $]2, +\infty[$, puis conclure que f est continue sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Sur chaque intervalle ouvert, une seule expression s'applique : reconnais une fonction rationnelle, une fonction affine, une racine carrée d'une fonction positive.

CORRIGÉ

On prend $a = 2$ et $b = -1$ (question 3). La continuité en -1 et en 2 ne suffit pas : il faut aussi la continuité en tous les autres points. Sur chaque intervalle ouvert, une seule expression s'applique.

- **Sur** $]-\infty, -1[$**.** $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x}$: fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule qu'en 0, qui n'appartient pas à cet intervalle. Une fonction rationnelle est continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition : f est continue sur $]-\infty, -1[$.
- **Sur** $]-1, 2[$**.** $f(x) = 2x - 1$: fonction polynôme, continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $]-1, 2[$.
- **Sur** $]2, +\infty[$**.** $x \mapsto x^2 + 5$ est un polynôme, continu et strictement positif sur $\mathbb{R}$. La racine carrée d'une fonction continue et positive est continue : f est continue sur $]2, +\infty[$.

Conclusion. Tout réel appartient à l'un de ces trois intervalles ou vaut -1 ou 2, et f est continue en chacun de ces points (question 3 pour -1 et 2). Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Combien d'antécédents selon m ?

On considère la fonction f définie sur $I = [0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$.

1.

Justifier que f est continue sur I et calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

Quel type de fonction est f ? Son dénominateur peut-il s'annuler ? Pour la limite, factorise par le terme de plus haut degré.

CORRIGÉ

Continuité. f est une fonction rationnelle dont le dénominateur vérifie $x^2 + 4 \geq 4 > 0$: il ne s'annule jamais. Une fonction rationnelle est continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition, donc f est continue sur I.

Limite. Pour $x > 0$, on factorise par x^2 au dénominateur :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x}{x^2\left(1 + \dfrac{4}{x^2}\right)} \\ &= \frac{4}{x} \times \frac{1}{1 + \dfrac{4}{x^2}}. \end{aligned}$$

En $+\infty$, $\dfrac{4}{x}$ tend vers 0 et $1 + \dfrac{4}{x^2}$ tend vers 1. Par produit :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Conclusion. f est continue sur I et sa limite en $+\infty$ est 0.

2.

Calculer $f'(x)$ pour $x \in I$, puis dresser le tableau de variations de f sur I (avec $f(0)$, $f(2)$ et la limite en $+\infty$).

INDICE

Dérivée d'un quotient $\frac{u}{v}$: $\frac{u'v - uv'}{v^2}$. Factorise le numérateur pour lire son signe.

CORRIGÉ

Dérivabilité. f est un quotient de polynômes, et son dénominateur ne prend pas la valeur 0 sur I : f est donc dérivable sur I.

Calcul. Posons $u(x) = 4x$ et $v(x) = x^2 + 4$. D'après la dérivée d'un quotient, le numérateur de $f'(x)$ est $u'(x)v(x) - u(x)v'(x)$:

$$\begin{aligned} &4(x^2+4) - 4x \times 2x \\ &= 16 - 4x^2 \\ &= 4(2-x)(2+x). \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = \frac{4(2-x)(2+x)}{(x^2+4)^2}.$$

Signe de $f'(x)$. Sur I, $2 + x > 0$ et $(x^2+4)^2 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $2 - x$. Ainsi $f'(x) > 0$ sur $[0, 2[$, $f'(2) = 0$ et $f'(x) < 0$ sur $]2, +\infty[$.

Variations. f est strictement croissante sur $[0, 2]$ et strictement décroissante sur $[2, +\infty[$. De plus, $f(0) = 0$, $f(2) = \frac{8}{8} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Conclusion. Tableau de variations : f croît de 0 (en $x = 0$) à 1 (en $x = 2$), puis décroît vers 0 en $+\infty$ sans l'atteindre.

3.

Déterminer $f\big([0,2]\big)$ et $f\big([2,+\infty[\big)$, en soignant les crochets.

INDICE

Sur chaque intervalle, f est continue et strictement monotone : utilise le tableau des images. Une borne obtenue par une limite non atteinte donne un crochet ouvert.

CORRIGÉ

L'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone se lit sur ses bornes : valeurs prises aux bornes fermées, limites aux bornes ouvertes.

Sur $[0,2]$. f est continue et strictement croissante, donc :

$$\begin{aligned} f\big([0,2]\big) &= \big[f(0), f(2)\big] \\ &= [0,1]. \end{aligned}$$

Sur $[2,+\infty[$. f est continue et strictement décroissante, donc :

$$\begin{aligned} &f\big([2,+\infty[\big) \\ &= \Big]\lim_{x\to+\infty} f(x), f(2)\Big] \\ &=]0,1]\,. \end{aligned}$$

Le crochet qui compte. En 0, le premier intervalle est fermé, car $0 = f(0)$ est atteint. Le second est ouvert : la limite 0 en $+\infty$ n'est jamais atteinte, car $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

Conclusion. $f\big([0,2]\big) = [0,1]$ et $f\big([2,+\infty[\big) =]0,1]$.

4.

Soit m un réel. Discuter, selon les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $f(t) = m$ d'inconnue $t \in I$.

INDICE

Sur chacun des deux intervalles, f réalise une bijection sur son image : chaque valeur de l'image est atteinte une seule fois **sur ce morceau**. Compte ensuite les morceaux dont l'image contient m, sans compter deux fois le point commun 2.

CORRIGÉ

Une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle réalise une bijection de cet intervalle sur son image. Sur chaque morceau, l'équation $f(t) = m$ a donc exactement une solution si m appartient à l'image, aucune sinon. On additionne les deux morceaux, en surveillant le point $t = 2$ qui leur est commun.

- **Si $m < 0$ ou $m > 1$.** m n'appartient ni à $[0, 1]$ ni à $]0, 1]$: aucune solution.
- **Si $m = 0$.** $0 \in [0, 1]$: une solution dans $[0, 2]$, qui est $t = 0$. Mais 0 n'appartient pas à $]0, 1]$: aucune solution dans $[2, +\infty[$. Une seule solution, $t = 0$.
- **Si $0 < m < 1$.** m appartient aux deux images : une solution dans $[0, 2]$ et une dans $[2, +\infty[$. Aucune des deux n'est 2, car $f(2) = 1 \neq m$, et la première n'est pas 0, car $f(0) = 0 \neq m$. Deux solutions distinctes, l'une dans $]0, 2[$, l'autre dans $]2, +\infty[$.
- **Si $m = 1$.** Sur chaque morceau, la solution est $t = 2$: c'est le même réel. Une seule solution, $t = 2$.

Conclusion. L'équation $f(t) = m$ n'a aucune solution si $m < 0$ ou $m > 1$, une seule si $m = 0$ ou $m = 1$, et deux si $0 < m < 1$.

Pièges. Une valeur peut être atteinte deux fois (cas $0 < m < 1$) ; une même solution peut appartenir aux deux morceaux (cas $m = 1$) ; une limite non atteinte n'apporte pas de solution (cas $m = 0$).

5.

Vérification : résoudre algébriquement dans I l'équation $f(t) = \dfrac{1}{2}$ et contrôler que le résultat est cohérent avec la question 4.

INDICE

Multiplie les deux membres par $2(t^2+4)$, qui n'est jamais nul, pour obtenir une équation du second degré.

CORRIGÉ

Soit $t \in I$. Comme $t^2 + 4 > 0$, on peut multiplier les deux membres par $2(t^2+4)$:

$$\begin{aligned} \frac{4t}{t^2+4} &= \frac{1}{2} \\ &\iff 8t = t^2 + 4 \\ &\iff t^2 - 8t + 4 = 0. \end{aligned}$$

Résolution. Le discriminant vaut $64 - 16 = 48 = \left(4\sqrt{3}\right)^2$, d'où deux solutions :

$$\begin{aligned} t_1 &= 4 - 2\sqrt{3}, \\ t_2 &= 4 + 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Comme $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$, on obtient $0{,}4 < t_1 < 0{,}6$ et $7{,}4 < t_2 < 7{,}6$: les deux solutions sont dans I.

Conclusion. Dans I, l'équation $f(t) = \dfrac{1}{2}$ a deux solutions, $4 - 2\sqrt{3}$ et $4 + 2\sqrt{3}$. C'est cohérent avec la question 4 : $m = \dfrac{1}{2}$ vérifie $0 < m < 1$, et l'on trouve bien une solution dans $]0, 2[$ (c'est t_1) et une dans $]2, +\infty[$ (c'est t_2).

Exercice 3

Une racine carrée, une solution, une dichotomie

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2\sqrt{3-x} - x^3$.

1.

Déterminer l'ensemble de définition D de f.

INDICE

Une racine carrée n'existe que pour un nombre positif ou nul.

CORRIGÉ

$f(x)$ existe si et seulement si $3 - x \geq 0$, c'est-à-dire $x \leq 3$; le terme $-x^3$ est défini pour tout réel.

Conclusion. $D =]-\infty, 3]$.

2.

Justifier que f est continue et strictement décroissante sur D.

INDICE

Ne dérive pas : écris f comme la somme de deux fonctions dont tu connais le sens de variation, et regarde $x \mapsto \sqrt{3-x}$ comme une composée.

CORRIGÉ

On évite la dérivée : $x \mapsto \sqrt{3-x}$ n'est pas dérivable en 3. Les propriétés de monotonie des opérations suffisent.

Continuité. $x \mapsto 3 - x$ est continue et positive sur D, donc $x \mapsto \sqrt{3-x}$ est continue sur D. La fonction $x \mapsto -x^3$ est un polynôme, continu sur $\mathbb{R}$. Par produit par 2 et par somme, f est continue sur D.

Stricte décroissance.

- $x \mapsto 3 - x$ est strictement décroissante sur D, à valeurs dans $[0, +\infty[$, où la racine carrée est strictement croissante. La composée $x \mapsto \sqrt{3-x}$ est donc strictement décroissante sur D ; multipliée par $2 > 0$, elle le reste.
- $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto -x^3$ est strictement décroissante.

Conclusion. f est continue sur D et, somme de deux fonctions strictement décroissantes, elle est strictement décroissante sur D.

3.

Montrer que l'équation $2\sqrt{3-x} = x^3$ admet une unique solution α dans D, puis que $1 < \alpha < 2$.

INDICE

Ramène-toi à l'équation $f(x) = 0$. Pour l'existence sur tout D, cherche l'image de D ; pour situer α, calcule $f(1)$ et $f(2)$.

CORRIGÉ

Reformulation. Pour $x \in D$, l'équation $2\sqrt{3-x} = x^3$ équivaut à $f(x) = 0$.

Image de D. $f(3) = 0 - 27 = -27$. En $-\infty$, $3 - x$ tend vers $+\infty$, donc $2\sqrt{3-x}$ aussi, et $-x^3$ tend vers $+\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Comme f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 3]$:

$$\begin{aligned} f(D) &= \left[f(3), \lim_{x \to -\infty} f(x) \right[\\ &= [-27, +\infty[\,. \end{aligned}$$

Existence et unicité. f est continue et strictement monotone sur l'intervalle D : c'est une bijection de D sur $f(D)$. Comme $0 \in f(D)$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans D.

Localisation. $f(1) = 2\sqrt{2} - 1 > 0$, car $2\sqrt{2} > 2$, et $f(2) = 2 - 8 = -6 < 0$. La fonction f est continue sur $[1, 2]$ et 0 est compris entre $f(2)$ et $f(1)$: le théorème des valeurs intermédiaires donne une solution dans $]1, 2[$, qui est α par unicité.

Conclusion. L'équation $2\sqrt{3-x} = x^3$ admet une unique solution α dans D, et $1 < \alpha < 2$.

Piège. Sans la stricte décroissance, on obtiendrait « au moins une » solution, jamais « une unique ».

4.

Par la méthode de dichotomie, en partant de $[1, 2]$, déterminer un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-1}. Présenter chaque étape.

INDICE

À chaque étape, calcule f au milieu c. Attention au sens : f est **décroissante**, donc $f(c) > 0$ signifie que c est **avant** α.

CORRIGÉ

f est strictement décroissante et $f(\alpha) = 0$. Si $f(c) > 0 = f(\alpha)$, alors $c < \alpha$: on garde la moitié droite. Si $f(c) < 0$, alors $c > \alpha$: on garde la moitié gauche. C'est l'inverse du cas croissant.

Intervalle	Milieu c	$f(c)$ (arrondi)	Conclusion
$[1\,;\,2]$	$1{,}5$	$-0{,}93 < 0$	$\alpha < 1{,}5$
$[1\,;\,1{,}5]$	$1{,}25$	$0{,}69 > 0$	$\alpha > 1{,}25$
$[1{,}25\,;\,1{,}5]$	$1{,}375$	$-0{,}05 < 0$	$\alpha < 1{,}375$
$[1{,}25\,;\,1{,}375]$	$1{,}3125$	$0{,}34 > 0$	$\alpha > 1{,}3125$

Conclusion. $1{,}3125 < \alpha < 1{,}375$: l'amplitude vaut $0{,}0625 \leq 10^{-1}$, c'est l'encadrement demandé. En particulier $1{,}3 < \alpha < 1{,}4$, et $1{,}3$ est une valeur approchée de α par défaut à 10^{-1} près.

Contrôle. À chaque ligne, f est positive à la borne gauche du nouvel intervalle et négative à sa borne droite : c'est le comportement attendu d'une fonction décroissante qui s'annule entre les deux.

Exercice 4

Une fonction auxiliaire au service des variations

Partie A. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2$.

Partie B. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 3x + \dfrac{2}{x}$. On admet que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

1.

(Partie A) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$, avec $g(0)$, $g(1)$ et les limites en $-\infty$ et $+\infty$.

INDICE

Factorise $g'(x)$ par $6x$. Les limites d'un polynôme en l'infini sont celles de son terme de plus haut degré.

CORRIGÉ

Dérivée. g est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 6x^2 - 6x \\ &= 6x(x - 1). \end{aligned}$$

Par un tableau de signes, $g'(x) > 0$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]1, +\infty[$, $g'(x) < 0$ sur $]0, 1[$, et g' s'annule en 0 et en 1.

Variations. g est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$, strictement décroissante sur $[0, 1]$, strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

Valeurs et limites. $g(0) = -2$ et $g(1) = 2 - 3 - 2 = -3$. Les limites d'un polynôme en l'infini sont celles de son terme de plus haut degré, ici $2x^3$: $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Conclusion. Tableau de variations : g croît de $-\infty$ jusqu'au maximum local -2 (en 0), décroît jusqu'à -3 (en 1), puis croît vers $+\infty$.

2.

Montrer que g s'annule en un unique réel α, puis que $1{,}8 < \alpha < 1{,}9$.

INDICE

Découpe $\mathbb{R}$ en $]-\infty, 1]$ et $[1, +\infty[$. Sur le premier, quelle est la plus grande valeur de g ? Sur le second, utilise la stricte monotonie.

CORRIGÉ

g n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$: on applique le théorème de la bijection morceau par morceau.

Sur $]-\infty, 1]$. D'après la question 1, g est croissante sur $]-\infty, 0]$ puis décroissante sur $[0, 1]$: son maximum sur $]-\infty, 1]$ est $g(0) = -2$. Donc $g(x) \leq -2 < 0$ pour tout $x \leq 1$: g ne s'y annule pas.

Sur $[1, +\infty[$. g est continue (polynôme) et strictement croissante, donc :

$$\begin{aligned} & g\big([1, +\infty[\big) \\ &= \Big[g(1), \lim_{x \to +\infty} g(x)\Big[\\ &= [-3, +\infty[\,. \end{aligned}$$

Cet intervalle contient 0, et g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[-3, +\infty[$: g s'annule en un unique réel $\alpha \geq 1$, et même $\alpha > 1$ car $g(1) \neq 0$.

Encadrement. On calcule :

$$\begin{aligned} g(1{,}8) &= 11{,}664 - 9{,}72 - 2 \\ &= -0{,}056, \\ g(1{,}9) &= 13{,}718 - 10{,}83 - 2 \\ &= 0{,}888. \end{aligned}$$

g est continue et strictement croissante sur $[1{,}8\,;\,1{,}9]$, inclus dans $[1, +\infty[$, et $g(1{,}8) < 0 < g(1{,}9)$: g s'annule sur ce segment, et ce zéro est α par unicité.

Conclusion. g s'annule en un unique réel α, et $1{,}8 < \alpha < 1{,}9$.

3.

En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs du réel x.

INDICE

Pour x dans $[1, +\infty[$, compare $g(x)$ à $g(\alpha)$ en utilisant le sens de variation. N'oublie pas $]-\infty, 1]$.

CORRIGÉ

On compare $g(x)$ à $g(\alpha) = 0$ grâce au sens de variation.

- Pour $x \leq 1$: $g(x) \leq -2 < 0$ (question 2).
- Pour $1 \leq x < \alpha$: g est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, donc $g(x) < g(\alpha) = 0$.
- Pour $x > \alpha$: de même, $g(x) > g(\alpha) = 0$.

Conclusion. $g(x) < 0$ pour $x < \alpha$, $g(\alpha) = 0$, et $g(x) > 0$ pour $x > \alpha$.

Piège. Inverser le signe en oubliant que g est croissante sur $[1, +\infty[$: avant α, elle est en dessous de 0.

4.

(Partie B) Calculer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$, puis déduire de la question 3 le sens de variation de f sur $]0, +\infty[$.

INDICE

$f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe : pourquoi ? Pour la limite en $+\infty$, écris $x^2 - 3x = x(x-3)$.

CORRIGÉ

Limite en 0^+. $x^2 - 3x$ tend vers 0 et $\dfrac{2}{x}$ tend vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Limite en $+\infty$. $x^2 - 3x = x(x-3)$ tend vers $+\infty$ et $\dfrac{2}{x}$ tend vers 0, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Signe de $f'(x)$. Pour $x > 0$, $x^2 > 0$, donc $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ a le signe de $g(x)$. D'après la question 3, et comme $\alpha > 0$: $f'(x) < 0$ sur $]0, \alpha[$, $f'(\alpha) = 0$ et $f'(x) > 0$ sur $]\alpha, +\infty[$.

Conclusion. f tend vers $+\infty$ en 0^+ et en $+\infty$; elle est strictement décroissante sur $]0, \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$. Elle admet donc en α un minimum égal à $f(\alpha)$.

5.

En utilisant $g(\alpha) = 0$, montrer que $f(\alpha) = 3\alpha(\alpha - 2)$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à l'aide de l'encadrement de α obtenu à la question 2.

INDICE

La seule information exacte sur α est $g(\alpha) = 0$. Quel terme de $f(\alpha)$ gêne ? Exprime-le à l'aide de cette égalité. Pour l'encadrement, attention au signe des facteurs avant de multiplier des inégalités.

CORRIGÉ

On ne connaît pas α exactement ; la seule information exacte est $g(\alpha) = 0$. On s'en sert pour remplacer le terme $\dfrac{2}{\alpha}$.

Simplification. $g(\alpha) = 0$ s'écrit $2\alpha^3 - 3\alpha^2 - 2 = 0$. Comme $\alpha \neq 0$, on divise par α :

$$\frac{2}{\alpha} = 2\alpha^2 - 3\alpha.$$

Donc :

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha^2 - 3\alpha + 2\alpha^2 - 3\alpha \\ &= 3\alpha^2 - 6\alpha \\ &= 3\alpha(\alpha - 2). \end{aligned}$$

Encadrement. Écrivons $f(\alpha) = -3\alpha(2 - \alpha)$. De $1{,}8 < \alpha < 1{,}9$, on tire :

$$\begin{aligned} 5{,}4 < 3\alpha < 5{,}7, \\ 0{,}1 < 2 - \alpha < 0{,}2. \end{aligned}$$

Ces nombres sont positifs : on peut multiplier les inégalités membre à membre, ce qui donne $0{,}54 < 3\alpha(2 - \alpha) < 1{,}14$.

Conclusion. $f(\alpha) = 3\alpha(\alpha - 2)$ et :

$$-1{,}14 < f(\alpha) < -0{,}54.$$

En particulier, le minimum $f(\alpha)$ de f (question 4) est strictement négatif.

Piège. Remplacer α par $1{,}8$ ou $1{,}9$ dans $f(\alpha)$ ne donne pas un encadrement justifié : on encadre chaque facteur, puis on multiplie des inégalités entre nombres positifs.

Exercice 5

Une réciproque qu'on n'écrit pas

On considère la fonction f définie sur $I = [0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{6}{x^2 + 2}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé. On ne cherchera pas l'expression de la réciproque.

1.

Justifier que f est continue et strictement décroissante sur I.

INDICE

Pour la monotonie, pars de deux réels $0 \leq a < b$ et compare successivement $a^2 + 2$ et $b^2 + 2$, puis leurs inverses.

CORRIGÉ

Continuité. f est une fonction rationnelle dont le dénominateur vérifie $x^2 + 2 \geq 2 > 0$: il ne s'annule pas. f est donc continue sur I.

Stricte décroissance. Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$. Comme $0 \leq a < b$, on a $a^2 < b^2$, donc $0 < a^2 + 2 < b^2 + 2$. La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, donc :

$$\frac{1}{a^2 + 2} > \frac{1}{b^2 + 2}.$$

En multipliant par $6 > 0$, on obtient $f(a) > f(b)$.

Conclusion. f est continue et strictement décroissante sur I.

Remarque. L'hypothèse $a \geq 0$ sert : sur $\mathbb{R}$, $a < b$ n'entraîne pas $a^2 < b^2$ (par exemple $-3 < 1$ mais $9 > 1$).

2.

Déterminer l'intervalle $J = f(I)$. En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} ; préciser son ensemble de définition et l'ensemble de ses valeurs. Les nombres $f^{-1}(3)$ et $f^{-1}(0)$ existent-ils ?

INDICE

Calcule $f(0)$ et la limite de f en $+\infty$. Pour une fonction décroissante, dans quel ordre s'écrivent les bornes de l'image ? Une limite non atteinte donne quel crochet ?

CORRIGÉ

Image. $f(0) = \dfrac{6}{2} = 3$. En $+\infty$, $x^2 + 2$ tend vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Comme f est continue et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, les bornes s'inversent :

$$\begin{aligned} J &= \left] \lim_{x \to +\infty} f(x), f(0) \right] \\ &=]0, 3] \,. \end{aligned}$$

Le crochet est ouvert en 0 : pour tout $x \in I$, $f(x) > 0$, donc la limite 0 n'est jamais atteinte.

Réciproque. f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I : c'est une bijection de I sur J. Elle admet une fonction réciproque f^{-1}, définie sur $J =]0, 3]$, à valeurs dans $I = [0, +\infty[$.

Les deux valeurs. $f(0) = 3$ avec $0 \in I$, donc $f^{-1}(3) = 0$. En revanche, $0 \notin J$: aucun réel de I n'a pour image 0, et $f^{-1}(0)$ n'existe pas.

Conclusion. $J =]0, 3]$; f^{-1} est définie sur J, à valeurs dans I ; $f^{-1}(3) = 0$ existe, $f^{-1}(0)$ n'existe pas.

Piège. $J \neq I$: f^{-1} n'est définie ni en 0, ni au-delà de 3, alors que f est définie sur $[0, +\infty[$.

3.

Résoudre dans I l'équation $\dfrac{6}{x^2+2} = \dfrac{3}{2}$ et en déduire $f^{-1}\left(\dfrac{3}{2}\right)$. Calculer $f(1)$ et $f(4)$, et en déduire $f^{-1}(2)$ et $f^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

INDICE

Rappel : pour $y \in J$ et $x \in I$, $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$. Après résolution, vérifie que chaque solution appartient bien à I.

CORRIGÉ

Par définition, $f^{-1}\left(\dfrac{3}{2}\right)$ est l'unique réel $x \in I$ tel que $f(x) = \dfrac{3}{2}$: il suffit de résoudre cette équation dans I.

Résolution. Soit $x \in I$. Comme $x^2 + 2 > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{6}{x^2+2} &= \frac{3}{2} \\ &\iff 12 = 3(x^2+2) \\ &\iff x^2 = 2. \end{aligned}$$

Les réels de carré 2 sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, et $-\sqrt{2} \notin I$. L'unique solution dans I est $\sqrt{2}$, donc $f^{-1}\left(\dfrac{3}{2}\right) = \sqrt{2}$.

Autres valeurs. $f(1) = \dfrac{6}{3} = 2$ et $f(4) = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$. Comme 1 et 4 appartiennent à I, $f^{-1}(2) = 1$ et $f^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right) = 4$.

Conclusion. $f^{-1}\left(\dfrac{3}{2}\right) = \sqrt{2}$, $f^{-1}(2) = 1$ et $f^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right) = 4$.

Remarque. Sur $\mathbb{R}$, la valeur $\dfrac{3}{2}$ serait atteinte deux fois, en $\sqrt{2}$ et en $-\sqrt{2}$: c'est en se limitant à I, où f est strictement monotone, que l'on obtient une bijection.

4.

Préciser le sens de variation et la continuité de f^{-1} sur J. Sans calculer $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, montrer que $1 < f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) < 4$.

INDICE

f^{-1} a le même sens de variation que f. Place $\frac{1}{2}$ entre deux nombres de J dont tu connais l'image par f^{-1}, puis applique ce sens de variation.

CORRIGÉ

Propriétés. f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle I, donc sa réciproque f^{-1} est continue et strictement décroissante sur J : elle a le même sens de variation que f.

Encadrement. Les nombres $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ et 2 appartiennent à J, et $\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 2$. Comme f^{-1} est strictement décroissante sur J, l'ordre s'inverse :

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) &> f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \\ &> f^{-1}(2). \end{aligned}$$

Or $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 4$ et $f^{-1}(2) = 1$ (question 3).

Conclusion. f^{-1} est continue et strictement décroissante sur J, et $1 < f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) < 4$.

Pièges. Garder le sens des inégalités alors que f^{-1} est décroissante, ou croire que f^{-1} a le sens de variation contraire de celui de f.

5.

a) Un élève écrit : « $f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{3}{2}\right)}$ ». Expliquer son erreur à l'aide d'un calcul.

b) Donner deux points de la courbe de f^{-1} obtenus à partir de la question 3, et justifier que ce sont les symétriques de deux points de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.

INDICE

Compare la valeur trouvée à la question 3 avec $\frac{1}{f\left(\frac{3}{2}\right)}$. Pour b), une égalité $f(x) = y$ fournit un point de $\mathcal{C}_f$; quel point de la courbe de f^{-1} lui correspond ?

CORRIGÉ

a) On calcule :

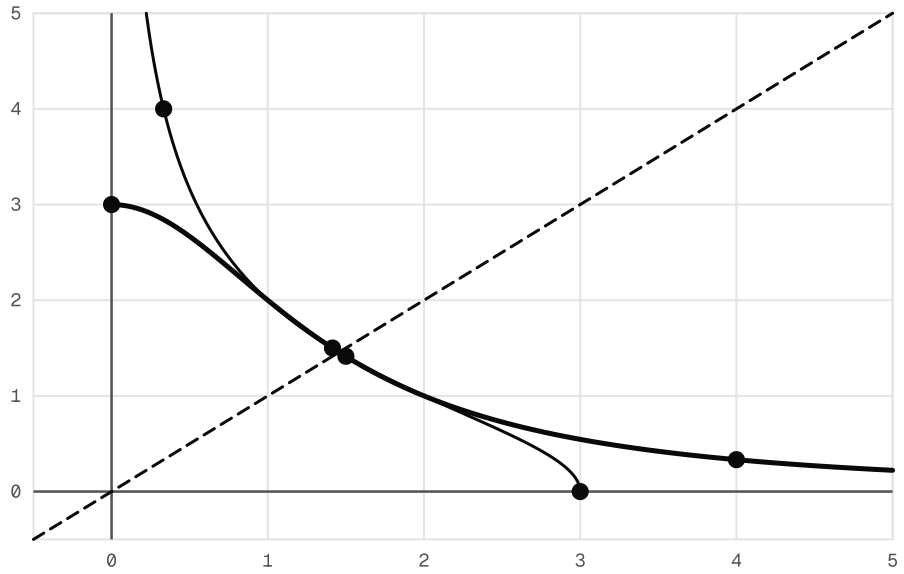
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{6}{\frac{9}{4} + 2} = \frac{6}{\frac{17}{4}} = \frac{24}{17}.$$

Donc $\frac{1}{f\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{17}{24} < 1$, alors que $f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{2} > 1$. Les deux nombres sont différents : f^{-1} désigne la fonction réciproque, qui « défait » f, et non l'inverse $\frac{1}{f}$.

b) D'après la question 3, $f(\sqrt{2}) = \frac{3}{2}$ et $f(4) = \frac{1}{3}$: les points $A\left(\sqrt{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$ et $B\left(4\,;\,\frac{1}{3}\right)$ sont sur $\mathcal{C}_f$. Comme $f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{2}$ et $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 4$, les points $A'\left(\frac{3}{2}\,;\,\sqrt{2}\right)$ et $B'\left(\frac{1}{3}\,;\,4\right)$ sont sur la courbe de f^{-1}.

Justification. Dans un repère orthonormé, le symétrique du point de coordonnées $(x\,;\,y)$ par rapport à la droite d'équation $y = x$ est le point $(y\,;\,x)$. Donc A' est le symétrique de A, et B' celui de B. C'est un cas particulier d'une propriété de la réciproque : sa courbe est l'image de $\mathcal{C}_f$ par cette symétrie axiale.

Conclusion. L'élève confond fonction réciproque et inverse. Les points A' et B' de la courbe de f^{-1} sont les symétriques des points A et B de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.



$\mathcal{C}_f$ $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ $y = x$ Point plein A Point plein B Point plein A' Point plein B' Point du graphe

Les courbes de f(x) = 6/(x² + 2) et de sa réciproque se reflètent dans la droite y = x : A et A', B et B' s'échangent dans ce miroir.

Exercice 6

Racines n-ièmes et puissances rationnelles en action

1.

Écrire chacun des nombres suivants sous la forme d'un entier :

$$A = \frac{\sqrt[3]{9} \times \sqrt{3}}{\sqrt[6]{3}},$$
$$B = \frac{27^{\frac{2}{3}} \times 9^{-\frac{1}{2}}}{81^{\frac{1}{4}}},$$
$$C = \left(\sqrt[4]{27}\right)^{\frac{4}{3}}.$$

INDICE

Écris chaque racine sous forme de puissance rationnelle d'un même nombre premier, puis additionne ou soustrais les exposants.

CORRIGÉ

Des racines d'indices différents ne se combinent pas directement. Écrites comme puissances rationnelles d'un même nombre $x > 0$, elles suivent les règles $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$ et $\dfrac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$.

Calcul de A. $\sqrt[3]{9} = 3^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ et $\sqrt[6]{3} = 3^{\frac{1}{6}}$. Donc :

$$\begin{aligned} A &= 3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} \\ &= 3^{\frac{4+3-1}{6}} = 3^1 = 3. \end{aligned}$$

Calcul de B. On écrit chaque facteur comme une puissance de 3 :

$$27^{\frac{2}{3}} = \left(3^3\right)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9,$$
$$9^{-\frac{1}{2}} = \left(3^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 3^{-1},$$
$$81^{\frac{1}{4}} = \left(3^4\right)^{\frac{1}{4}} = 3.$$

Donc $B = \dfrac{9 \times \frac{1}{3}}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$.

Calcul de C. $\sqrt[4]{27} = 27^{\frac{1}{4}}$, donc :

$$\begin{aligned} C &= 27^{\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} \\ &= \sqrt[3]{27} = 3, \end{aligned}$$

car $3^3 = 27$ et $3 \geq 0$.

Conclusion. $A = 3$, $B = 1$ et $C = 3$.

2.

Pour $x > 0$, on pose $E(x) = \dfrac{x^{\frac{3}{4}} \times \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$.

a) Simplifier $E(x)$ et en déduire $E(125)$.

b) Pourquoi l'énoncé impose-t-il $x > 0$?

INDICE

Écris $\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$ et $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$. Pour b), relis la définition d'une puissance rationnelle.

CORRIGÉ

a) Pour $x > 0$, $\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$ et $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$. Donc :

$$\begin{aligned} E(x) &= x^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}} = x^{1-\frac{2}{3}} \\ &= x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}. \end{aligned}$$

Ainsi $E(125) = \sqrt[3]{125} = 5$, car $5^3 = 125$ et $5 \geq 0$.

b) Une puissance rationnelle x^r n'est définie que pour $x > 0$, et ses règles de calcul ne valent que dans ce cadre ; de plus, $\sqrt[3]{x^2}$ est au dénominateur et doit être non nul. Sans la condition $x > 0$, l'écriture $x^{\frac{3}{4}}$ n'aurait pas de sens et la simplification ne serait pas justifiée.

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $E(x) = \sqrt[3]{x}$, et $E(125) = 5$. La condition $x > 0$ donne un sens aux puissances rationnelles et à leurs règles de calcul.

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt[3]{2x-1} < 3$.

INDICE

Commence par le domaine : sous la racine, le nombre doit être positif. Écris ensuite 3 comme une racine cubique et utilise la stricte croissance de $t \mapsto \sqrt[3]{t}$.

CORRIGÉ

Domaine. Dans ce chapitre, $\sqrt[3]{2x-1}$ est défini si et seulement si $2x - 1 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq \dfrac{1}{2}$.

Résolution. Soit $x \geq \dfrac{1}{2}$. Comme $3 = \sqrt[3]{27}$:

$$\begin{aligned} &\sqrt[3]{2x-1} < 3 \\ \iff\ &\sqrt[3]{2x-1} < \sqrt[3]{27} \\ \iff\ &2x - 1 < 27 \\ \iff\ &x < 14. \end{aligned}$$

La deuxième équivalence vient de la règle du cours : pour tous réels positifs u et v, $\sqrt[n]{u} < \sqrt[n]{v}$ équivaut à $u < v$ (ici $n = 3$, $u = 2x - 1$ et $v = 27$).

Conclusion. En tenant compte du domaine, l'ensemble des solutions est $\left[\dfrac{1}{2}, 14\right[$.

Piège. Répondre $]-\infty, 14[$ en oubliant le domaine.

4.

Vrai ou faux ? Justifier.

a) Pour tout réel x, $\sqrt[3]{x^3} = x$.

b) $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{32}$.

c) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4}$.

INDICE

a) Relis la définition de la racine n-ième dans ce chapitre : pour quels réels est-elle définie ? Teste un réel négatif. b) Écris chaque facteur comme une puissance rationnelle de 2. c) Mets $\sqrt[3]{2}$ en facteur, puis fais entrer le coefficient sous la racine.

CORRIGÉ

a) Faux. Dans ce chapitre, $\sqrt[3]{t}$ n'est définie que pour $t \geq 0$: c'est la réciproque de $t \mapsto t^3$ sur $[0, +\infty[$. Pour $x = -2$, $x^3 = -8 < 0$ et $\sqrt[3]{-8}$ n'est pas défini : l'égalité n'a pas de sens. Elle est en revanche vraie pour tout $x \geq 0$, d'après la règle $\sqrt[n]{x^n} = x$ pour x positif.

b) Vrai. Les indices 2 et 3 sont différents : la règle $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$ ne s'applique pas directement. On passe aux puissances rationnelles de $2 > 0$:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} &= 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}} \\ &= 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5} \\ &= \sqrt[6]{32}. \end{aligned}$$

c) Faux. $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$. Or $2 = \sqrt[3]{8}$, donc :

$$\begin{aligned} 2\sqrt[3]{2} &= \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{2} \\ &= \sqrt[3]{16}. \end{aligned}$$

Pour des réels positifs u et v, $\sqrt[3]{u} = \sqrt[3]{v}$ équivaut à $u = v$; comme $16 \neq 4$, $\sqrt[3]{16} \neq \sqrt[3]{4}$. L'erreur consiste à additionner sous la racine : une somme de racines n'est pas la racine d'une somme.

Conclusion. a) est faux (l'égalité n'est vraie que pour $x \geq 0$), b) est vrai, c) est faux.

Exercice 7

Compter exactement les solutions

Soit P la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3$.

1.

Calculer $P'(x)$ et le factoriser. Dresser le tableau de variations de P sur $\mathbb{R}$, avec les valeurs de P aux points où P' s'annule et les limites en $-\infty$ et $+\infty$.

INDICE

Mets $12x$ en facteur dans $P'(x)$, puis factorise le trinôme restant.

CORRIGÉ

Dérivée. P est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} P'(x) &= 12x^3 - 12x^2 - 24x \\ &= 12x(x^2 - x - 2) \\ &= 12x(x+1)(x-2). \end{aligned}$$

Signe de $P'(x)$. P' s'annule en -1, 0 et 2. Par un tableau de signes des trois facteurs : $P'(x) < 0$ sur $]-\infty, -1[$ et sur $]0, 2[$, $P'(x) > 0$ sur $]-1, 0[$ et sur $]2, +\infty[$.

Valeurs.

$$\begin{aligned} P(-1) &= 3 + 4 - 12 + 3 \\ &= -2, \\ P(0) &= 3, \\ P(2) &= 48 - 32 - 48 + 3 \\ &= -29. \end{aligned}$$

Limites. Le terme de plus haut degré est $3x^4$, donc $P(x)$ tend vers $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Conclusion. P est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$, strictement croissante sur $[-1, 0]$, strictement décroissante sur $[0, 2]$ et strictement croissante sur $[2, +\infty[$, avec les valeurs et les limites ci-dessus.

2.

Déterminer le nombre exact de solutions de l'équation $P(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.

INDICE

Sur chacun des quatre intervalles de la question 1, détermine l'image par P et regarde si elle contient 0. Le théorème des valeurs intermédiaires seul donne « au moins une » solution : qu'apporte la stricte monotonie ?

CORRIGÉ

Le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'au moins une solution, jamais leur nombre. Pour compter exactement, on découpe $\mathbb{R}$ en intervalles où P est continue et strictement monotone : sur chacun, P est une bijection sur son image, donc 0 y a au plus un antécédent.

P est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme). D'après la question 1 :

Intervalle	Monotonie	Image par P	Contient 0 ?
$]-\infty, -1]$	strictement décroissante	$[-2, +\infty[$	oui
$[-1, 0]$	strictement croissante	$[-2, 3]$	oui
$[0, 2]$	strictement décroissante	$[-29, 3]$	oui
$[2, +\infty[$	strictement croissante	$[-29, +\infty[$	oui

Sur chaque intervalle, l'équation $P(x) = 0$ admet donc une unique solution. Aucune n'est une borne commune -1, 0 ou 2, car $P(-1)$, $P(0)$ et $P(2)$ ne sont pas nuls : les quatre solutions sont deux à deux distinctes.

Conclusion. L'équation $P(x) = 0$ admet exactement quatre solutions dans $\mathbb{R}$, une dans chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 2[$ et $]2, +\infty[$.

Piège. Constater des changements de signe et conclure à quatre solutions sans la stricte monotonie : rien n'interdirait alors plusieurs solutions dans un même intervalle.

3.

Par la même méthode, déterminer le nombre exact de solutions de l'équation $P(x) = 3$ dans $\mathbb{R}$.

INDICE

Reprends le tableau des images. Avant d'additionner, vérifie si une même solution peut appartenir à deux intervalles consécutifs.

CORRIGÉ

On reprend les quatre intervalles, avec la valeur 3 au lieu de 0.

- Sur $]-\infty, -1]$: $3 \in [-2, +\infty[$ et $P(-1) \neq 3$, donc une unique solution, dans $]-\infty, -1[$.
- Sur $[-1, 0]$: $3 \in [-2, 3]$; P y est strictement croissante et $P(0) = 3$, donc la solution unique est 0.
- Sur $[0, 2]$: $3 \in [-29, 3]$; la solution unique est encore 0.
- Sur $[2, +\infty[$: $3 \in [-29, +\infty[$ et $P(2) \neq 3$, donc une unique solution, dans $]2, +\infty[$.

Les deuxième et troisième intervalles donnent le même réel 0 : on ne le compte qu'une fois.

Conclusion. L'équation $P(x) = 3$ admet exactement trois solutions : une dans $]-\infty, -1[$, le réel 0, et une dans $]2, +\infty[$.

4.

Vérifier le résultat de la question 3 en résolvant algébriquement l'équation $P(x) = 3$.

INDICE

$P(x) = 3$ se ramène à $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 = 0$: mets x^2 en facteur.

CORRIGÉ

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & P(x) = 3 \\ \iff\ & 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 = 0 \\ \iff\ & x^2(3x^2 - 4x - 12) = 0. \end{aligned}$$

- $x^2 = 0$ donne $x = 0$.
- Pour $3x^2 - 4x - 12 = 0$, le discriminant vaut $16 + 144 = 160 = \left(4\sqrt{10}\right)^2$, d'où deux solutions :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{4 - 4\sqrt{10}}{6} = \frac{2 - 2\sqrt{10}}{3}, \\ x_2 &= \frac{2 + 2\sqrt{10}}{3}. \end{aligned}$$

Position. Comme $\sqrt{10} > 3$:

$$\begin{aligned} x_1 &< \frac{2 - 6}{3} = -\frac{4}{3} < -1, \\ x_2 &> \frac{2 + 6}{3} = \frac{8}{3} > 2. \end{aligned}$$

Conclusion. L'équation $P(x) = 3$ a trois solutions distinctes, $x_1 < -1$, 0 et $x_2 > 2$: c'est exactement le résultat de la question 3. La racine double 0 ne donne qu'une solution de l'équation.