BURHAN

Continuité : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/continuite/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Continuité	Application	8

Exercice 1

Définie en 2, mais continue en 2 ?

ÉNONCÉ

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(2) = 4$ et, pour tout réel $x \neq 2$:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}.$$

La fonction f est-elle continue en 2 ? Justifier.

INDICE

Que $f(2)$ existe ne suffit pas : compare $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ à $f(2)$.

En 2, le numérateur et le dénominateur s'annulent : factorise le numérateur par $(x - 2)$, par exemple en cherchant c tel que $2x^2 - 3x - 2 = (x - 2)(2x + c)$ (compare les termes constants).

Exercice 2

Raccorder un polynôme et une racine carrée

Soit a un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = 2x^2 - x + a$ si $x \leq 1$;
- $f(x) = \sqrt{2x+7}$ si $x > 1$.

1.

Calculer $f(1)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, en fonction de a lorsque c'est nécessaire.

INDICE

À gauche de 1 (et en 1), on utilise la première expression ; à droite de 1, la seconde. Il y a deux limites à calculer, une de chaque côté.

2.

Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue en 1 ?

INDICE

f est continue en 1 si et seulement si elle est continue à gauche **et** à droite en 1 : chacune des deux limites latérales doit être égale à $f(1)$.

3.

Dans cette question, a a la valeur trouvée à la question 2. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Découpe $\mathbb{R}$ en trois parties : $]-\infty, 1[$, le point 1 et $]1, +\infty[$. Sur chaque intervalle ouvert, reconnais une fonction usuelle ou une opération sur des fonctions continues.

Exercice 3

Vérifier les conditions avant de conclure

Dans chaque question, justifier que la fonction proposée est continue sur l'intervalle indiqué.

1.

$g(x) = \sqrt{6 + x - x^2}$ sur l'intervalle $[-2, 3]$.

INDICE

La racine carrée d'une fonction continue est continue là où cette fonction est **positive**. Étudie le signe du trinôme $6 + x - x^2$ (cherche ses racines).

2.

$h(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 4}$ sur l'intervalle $]-2, 2[$.

INDICE

Un quotient de fonctions continues est continu là où le **dénominateur ne s'annule pas**. Cherche les valeurs qui annulent $x^2 - 4$ et regarde si elles sont dans l'intervalle.

3.

$k(x) = \sin\left(\sqrt{x + 1}\right)$ sur l'intervalle $[-1, +\infty[$.

INDICE

Écris k comme une composée : $k(x) = \sin\big(v(x)\big)$ avec $v(x) = \sqrt{x + 1}$. Vérifie que v est continue sur $[-1, +\infty[$, puis que $\sin$ est continue sur un intervalle qui contient toutes les valeurs prises par v.

Exercice 4

Images d'intervalles par une fonction décroissante

Soit f la fonction définie sur $I =]-2, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{6}{x+2}$.

La fonction f est continue sur I (fonction rationnelle définie sur I). Elle est strictement décroissante sur I : quand x augmente, $x+2$ augmente en restant strictement positif, donc $\dfrac{6}{x+2}$ diminue.

1.

Déterminer $f\big([1, 4]\big)$.

INDICE

Pour une fonction continue et strictement **décroissante** sur un segment, l'image est un segment dont les bornes sont les images des extrémités. Attention à l'ordre : laquelle est la plus petite ?

2.

Déterminer $f\big([0, 4[\big)$.

INDICE

La borne 4 n'appartient pas à l'intervalle de départ. Quelle valeur f approche-t-elle quand x tend vers 4 par la gauche ? Cette valeur est-elle atteinte par un réel de $[0, 4[$?

3.

Déterminer $f\big([0, +\infty[\big)$.

INDICE

Calcule la limite de f en $+\infty$. Une borne obtenue par une limite en une extrémité ouverte n'est pas atteinte.

Exercice 5

Une solution de x + cos x = 2

ÉNONCÉ

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \cos x$.

Montrer que l'équation $x + \cos x = 2$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0, \pi]$.

On ne demande pas de montrer que cette solution est unique.

INDICE

Utilise le théorème des valeurs intermédiaires sur le segment $[0, \pi]$, en vérifiant d'abord que f est continue sur ce segment. Calcule ensuite $f(0)$ et $f(\pi)$, et compare-les à 2 (et non à 0). On pourra utiliser $\pi > 3$.

Exercice 6

Deux étapes de dichotomie

Soit g une fonction continue et strictement croissante sur $[1, 2]$. On donne ses valeurs en quelques points (arrondies au centième) :

x	1	$1{,}25$	$1{,}5$	$1{,}625$	$1{,}75$	2
$g(x)$	-2	$-1{,}55$	$-0{,}63$	$0{,}04$	$0{,}86$	3

1.

Justifier que g s'annule en un unique réel α de l'intervalle $]1, 2[$.

INDICE

g est continue et strictement monotone sur $[1, 2]$: regarde les signes de $g(1)$ et de $g(2)$.

2.

Première étape de dichotomie : à l'aide du milieu de $[1, 2]$, déterminer un intervalle d'amplitude $0{,}5$ qui contient α.

INDICE

Calcule le milieu m de $[1, 2]$ et lis le signe de $g(m)$ dans le tableau. Garde la moitié aux extrémités de laquelle g **change de signe**.

3.

Poursuivre la dichotomie d'une étape. Donner l'encadrement de α obtenu et son amplitude.

INDICE

Le nouveau milieu est celui de l'intervalle trouvé à la question 2, et non celui de $[1, 2]$. Toutes les valeurs du tableau ne servent pas.

Exercice 7

Une bijection et deux valeurs de sa réciproque

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x$.

1.

Justifier que f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, puis calculer ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

INDICE

f est la somme des fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto 2x$: quel est le sens de variation de chacune ? Pour les limites, regarde la limite de chacun des deux termes.

2.

Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J, que l'on précisera. Que peut-on en conclure pour la fonction f ?

INDICE

Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle : quel théorème s'applique ? L'image de $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ se lit avec les deux limites de la question 1.

3.

a) Calculer $f(1)$ et $f(-2)$. En déduire $f^{-1}(3)$ et $f^{-1}(-12)$.

b) Sans calculer ces deux nombres, comparer $f^{-1}(5)$ et $f^{-1}(8)$.

INDICE

a) $f^{-1}(3)$ est le réel dont l'image par f vaut 3 : cherche-le parmi les images que tu viens de calculer.
b) Quel est le sens de variation de f^{-1} ?

Exercice 8

Calculer avec les racines n-ièmes

1.

Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}},$$
$$C = \sqrt{\sqrt[3]{64}}.$$

INDICE

Regroupe sous une seule racine : avec le même indice, le quotient passe sous la racine ; pour deux racines emboîtées, les indices se multiplient. Reconnais ensuite une puissance exacte.

2.

Un élève écrit : $\sqrt[3]{8+27} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} = 5$. Cette égalité est-elle correcte ? Justifier.

INDICE

Si $\sqrt[3]{35}$ était égal à 5, que vaudrait 5^3 ?

3.

a) Calculer $8^{\frac{2}{3}}$ et $16^{-\frac{3}{4}}$.

b) Pour $x > 0$, écrire $\dfrac{x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}}$ sous la forme x^r, où r est un nombre rationnel.

INDICE

a) Par définition, $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$, et $x^{-r} = \dfrac{1}{x^r}$. b) Pour multiplier deux puissances d'un même nombre, on **additionne** les exposants ; pour diviser, on les soustrait.