BURHAN

Continuité : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/continuite/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Continuité	Application	8

Exercice 1

Définie en 2, mais continue en 2 ?

ÉNONCÉ

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(2) = 4$ et, pour tout réel $x \neq 2$:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}.$$

La fonction f est-elle continue en 2 ? Justifier.

INDICE

Que $f(2)$ existe ne suffit pas : compare $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ à $f(2)$.

En 2, le numérateur et le dénominateur s'annulent : factorise le numérateur par $(x - 2)$, par exemple en cherchant c tel que $2x^2 - 3x - 2 = (x - 2)(2x + c)$ (compare les termes constants).

CORRIGÉ

Par définition, f est continue en 2 si et seulement si $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$. On calcule donc l'image et la limite, puis on les compare.

Image de 2. Par définition de f, $f(2) = 4$.

Factorisation du numérateur. En 2, le numérateur vaut $2 \times 4 - 6 - 2 = 0$, comme le dénominateur : la forme $\dfrac{0}{0}$ est indéterminée. Puisque 2 est racine du numérateur, celui-ci se factorise par $(x - 2)$.

On cherche c tel que $2x^2 - 3x - 2 = (x - 2)(2x + c)$. Le terme constant du produit est $-2c$; il doit valoir -2, donc $c = 1$. On vérifie en développant :

$$\begin{aligned}(x - 2)(2x + 1) &= 2x^2 + x - 4x - 2 \\ &= 2x^2 - 3x - 2.\end{aligned}$$

Autre méthode : le discriminant vaut $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$ et les racines sont 2 et $-\dfrac{1}{2}$.

Limite en 2. Pour tout réel $x \neq 2$, on a $x - 2 \neq 0$, donc on peut simplifier :

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{(x - 2)(2x + 1)}{x - 2} \\ &= 2x + 1.\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto 2x + 1$ est continue en 2, d'où :

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 2 \times 2 + 1 = 5.$$

Conclusion. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$ et $f(2) = 4$. Comme $5 \neq 4$, la fonction f n'est pas continue en 2, bien qu'elle soit définie en 2.

À retenir. Une fonction peut être définie en un point sans y être continue. Ici, il aurait fallu poser $f(2) = 5$.

Exercice 2

Raccorder un polynôme et une racine carrée

Soit a un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = 2x^2 - x + a$ si $x \leq 1$;
- $f(x) = \sqrt{2x+7}$ si $x > 1$.

1.

Calculer $f(1)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, en fonction de a lorsque c'est nécessaire.

INDICE

À gauche de 1 (et en 1), on utilise la première expression ; à droite de 1, la seconde. Il y a deux limites à calculer, une de chaque côté.

CORRIGÉ

Image de 1. Comme $1 \leq 1$, la première expression s'applique :

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \times 1^2 - 1 + a \\ &= 1 + a. \end{aligned}$$

Limite à gauche. Pour $x < 1$, $f(x) = 2x^2 - x + a$. La fonction polynôme $x \mapsto 2x^2 - x + a$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc en 1 : sa limite en 1 est sa valeur en 1.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 + a.$$

Limite à droite. Pour $x > 1$, $f(x) = \sqrt{2x+7}$. La fonction $x \mapsto 2x + 7$ est continue et positive sur $\left[-\frac{7}{2}, +\infty\right[$, intervalle qui contient 1. Donc $x \mapsto \sqrt{2x+7}$ est continue en 1 et :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \sqrt{2 \times 1 + 7} \\ &= \sqrt{9} = 3. \end{aligned}$$

Conclusion. $f(1) = 1 + a$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1 + a$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3$.

2.

Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue en 1 ?

INDICE

f est continue en 1 si et seulement si elle est continue à gauche **et** à droite en 1 : chacune des deux limites latérales doit être égale à $f(1)$.

CORRIGÉ

La fonction change d'expression en 1 : on étudie séparément la continuité à gauche et à droite. f est continue en 1 si et seulement si elle l'est des deux côtés.

À gauche. D'après la question 1, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1 + a = f(1)$: f est continue à gauche en 1, quelle que soit la valeur de a.

À droite. f est continue à droite en 1 si et seulement si $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$, c'est-à-dire $3 = 1 + a$, soit $a = 2$.

Conclusion. f est continue en 1 si et seulement si $a = 2$; on a alors $f(1) = 3$.

Attention. La limite à gauche seule ferait croire que f est continue en 1 pour tout a. C'est faux : pour $a = 0$, la limite à droite vaut 3 alors que $f(1) = 1$.

3.

Dans cette question, a a la valeur trouvée à la question 2. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Découpe $\mathbb{R}$ en trois parties : $]-\infty, 1[$, le point 1 et $]1, +\infty[$. Sur chaque intervalle ouvert, reconnais une fonction usuelle ou une opération sur des fonctions continues.

CORRIGÉ

On prend $a = 2$.

Sur $]-\infty, 1[$**.** Pour tout $x < 1$, $f(x) = 2x^2 - x + 2$. Une fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$, donc f est continue sur $]-\infty, 1[$.

Sur $]1, +\infty[$**.** Pour tout $x > 1$, $f(x) = \sqrt{2x + 7}$, avec $2x + 7 > 9 > 0$. La fonction $x \mapsto 2x + 7$ est continue et positive sur cet intervalle, et la racine carrée d'une telle fonction est continue : f est continue sur $]1, +\infty[$.

En 1**.** D'après la question 2, f est continue en 1 lorsque $a = 2$.

Conclusion. Pour $a = 2$, f est continue en tout point de $\mathbb{R}$: f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Vérifier les conditions avant de conclure

Dans chaque question, justifier que la fonction proposée est continue sur l'intervalle indiqué.

1.

$g(x) = \sqrt{6 + x - x^2}$ sur l'intervalle $[-2, 3]$.

INDICE

La racine carrée d'une fonction continue est continue là où cette fonction est **positive**. Étudie le signe du trinôme $6 + x - x^2$ (cherche ses racines).

CORRIGÉ

Posons $u(x) = 6 + x - x^2$ pour tout réel x, de sorte que $g = \sqrt{u}$. Si u est continue et positive sur un intervalle I, alors $\sqrt{u}$ est continue sur I : on vérifie ces deux conditions sur $[-2, 3]$.

Continuité de u. u est une fonction polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[-2, 3]$.

Signe de u. Le trinôme $-x^2 + x + 6$ a pour discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 25$. Ses racines sont :

$$x_1 = \frac{-1 - 5}{-2} = 3,$$
$$x_2 = \frac{-1 + 5}{-2} = -2.$$

Le coefficient de x^2 est $-1 < 0$: le trinôme est positif entre ses racines. Donc $u(x) \geq 0$ pour tout $x \in [-2, 3]$.

Conclusion. u est continue et positive sur $[-2, 3]$, donc g est continue sur $[-2, 3]$.

Remarque. Sur un intervalle plus grand, par exemple $[-3, 3]$, ce raisonnement échoue : $u(-3) = -6 < 0$, et g n'est même pas définie en -3.

2.

$h(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 4}$ sur l'intervalle $]-2, 2[$.

INDICE

Un quotient de fonctions continues est continu là où le **dénominateur ne s'annule pas**. Cherche les valeurs qui annulent $x^2 - 4$ et regarde si elles sont dans l'intervalle.

CORRIGÉ

h est le quotient de deux fonctions continues ; il reste à vérifier que le dénominateur ne s'annule pas sur $]-2, 2[$.

Numérateur et dénominateur. $x \mapsto 3x$ et $x \mapsto x^2 - 4$ sont des fonctions polynômes, donc continues sur $\mathbb{R}$.

Le dénominateur ne s'annule pas. $x^2 - 4$ ne s'annule qu'en -2 et en 2, deux valeurs exclues de $]-2, 2[$. Plus précisément, si $-2 < x < 2$, alors $x^2 < 4$, donc $x^2 - 4 < 0$.

Conclusion. Le dénominateur est continu et ne s'annule pas sur $]-2, 2[$, donc h est continue sur $]-2, 2[$.

Remarque. On ne pourrait pas conclure sur $[-2, 2]$: h n'est pas définie en -2 ni en 2.

3.

$k(x) = \sin\left(\sqrt{x + 1}\right)$ sur l'intervalle $[-1, +\infty[$.

INDICE

Écris k comme une composée : $k(x) = \sin\big(v(x)\big)$ avec $v(x) = \sqrt{x + 1}$. Vérifie que v est continue sur $[-1, +\infty[$, puis que $\sin$ est continue sur un intervalle qui contient toutes les valeurs prises par v.

CORRIGÉ

Posons $v : x \mapsto \sqrt{x + 1}$ et $I = [-1, +\infty[$, de sorte que $k = \sin \circ v$. Pour une composée, il faut : v continue sur I, $\sin$ continue sur un intervalle J, et $v(I) \subset J$.

Continuité de v. La fonction $x \mapsto x + 1$ est continue (polynôme) et positive sur I, car $x + 1 \geq 0$ pour $x \geq -1$. Donc v est continue sur I.

Continuité de $\sin$. La fonction $\sin$ est continue sur $J = \mathbb{R}$.

Inclusion. Les valeurs de v sont des réels positifs, donc $v(I) \subset \mathbb{R} = J$.

Conclusion. Par composition, k est continue sur $[-1, +\infty[$.

Exercice 4

Images d'intervalles par une fonction décroissante

Soit f la fonction définie sur $I =]-2, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{6}{x+2}$.

La fonction f est continue sur I (fonction rationnelle définie sur I). Elle est strictement décroissante sur I : quand x augmente, $x+2$ augmente en restant strictement positif, donc $\dfrac{6}{x+2}$ diminue.

1.

Déterminer $f\big([1,4]\big)$.

INDICE

Pour une fonction continue et strictement **décroissante** sur un segment, l'image est un segment dont les bornes sont les images des extrémités. Attention à l'ordre : laquelle est la plus petite ?

CORRIGÉ

f est continue et strictement décroissante sur le segment $[1,4]$, inclus dans I. L'image de $[1,4]$ est donc le segment $\big[f(4), f(1)\big]$: la décroissance inverse l'ordre des bornes.

Calculs.

$$f(1) = 1 + \frac{6}{3} = 3,$$
$$f(4) = 1 + \frac{6}{6} = 2.$$

Conclusion. $f\big([1,4]\big) = [2,3]$.

Attention. Écrire $[3,2]$ n'a pas de sens : la borne de gauche d'un intervalle est toujours la plus petite.

2.

Déterminer $f\big([0,4[\big)$.

INDICE

La borne 4 n'appartient pas à l'intervalle de départ. Quelle valeur f approche-t-elle quand x tend vers 4 par la gauche ? Cette valeur est-elle atteinte par un réel de $[0,4[$?

CORRIGÉ

f est continue et strictement décroissante sur $[0,4[$. L'image d'un intervalle $[a,b[$ par une telle fonction est $\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), f(a)\right]$.

Calculs. $f(0) = 1 + \dfrac{6}{2} = 4$. Comme f est continue en 4 :

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = f(4) = 2.$$

Les crochets. La valeur 4 est atteinte en $x = 0$: crochet fermé. La valeur 2 ne l'est pas, car pour $0 \le x < 4$, la stricte décroissance donne $f(x) > f(4) = 2$: crochet ouvert.

Conclusion. $f\big([0,4[\big) =]2,4]$.

3.

Déterminer $f\big([0,+\infty[\big)$.

INDICE

Calcule la limite de f en $+\infty$. Une borne obtenue par une limite en une extrémité ouverte n'est pas atteinte.

CORRIGÉ

f est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$: son image est $\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(0)\right]$.

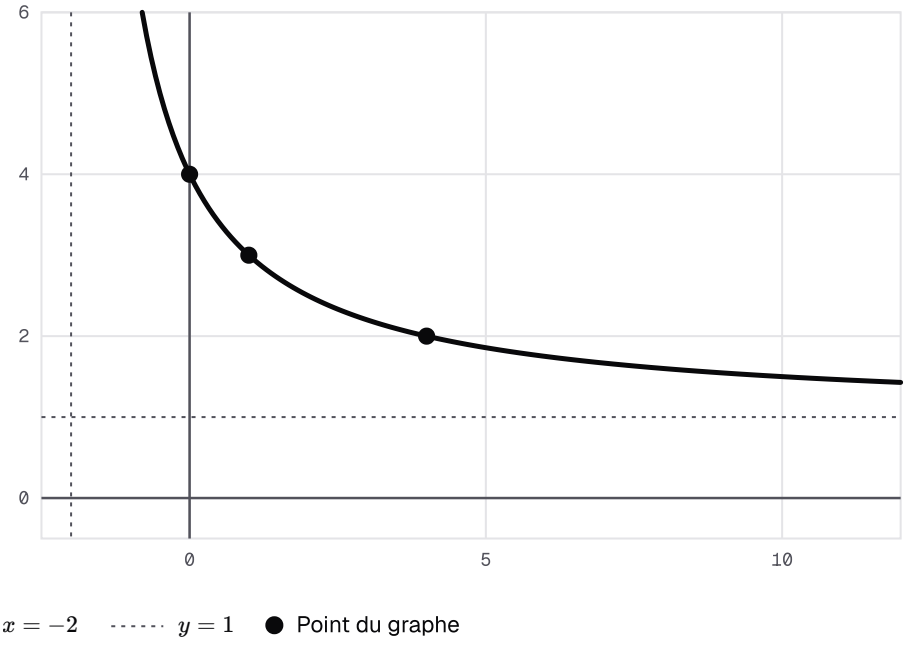
Limite en $+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{x+2}=0$ et :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1.$$

Les crochets. $f(0)=4$ est atteinte : crochet fermé. La valeur 1 n'est jamais atteinte : pour tout $x\in I$, $\dfrac{6}{x+2}>0$, donc $f(x)>1$. Crochet ouvert.

Conclusion. $f\big([0,+\infty[\big)=]1,4]$.

Comparaison avec la question 2. En passant de $[0,4[$ à $[0,+\infty[$, la borne 4 reste la même et la borne ouverte passe de 2 à 1.



La courbe de f(x) = 1 + 6/(x + 2), décroissante, avec ses points d'abscisses 0, 1 et 4 et la droite y = 1 qu'elle approche sans l'atteindre.

Exercice 5

Une solution de x + cos x = 2

ÉNONCÉ

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \cos x$.

Montrer que l'équation $x + \cos x = 2$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0, \pi]$.

On ne demande pas de montrer que cette solution est unique.

INDICE

Utilise le théorème des valeurs intermédiaires sur le segment $[0, \pi]$, en vérifiant d'abord que f est continue sur ce segment. Calcule ensuite $f(0)$ et $f(\pi)$, et compare-les à 2 (et non à 0). On pourra utiliser $\pi > 3$.

CORRIGÉ

On veut prouver qu'un réel c de $[0, \pi]$ vérifie $f(c) = 2$, sans le calculer : c'est le rôle du théorème des valeurs intermédiaires. Il demande une fonction continue sur un segment et un nombre compris entre les images des extrémités.

Continuité. $x \mapsto x$ est une fonction polynôme et $\cos$ est continue sur $\mathbb{R}$. Leur somme f est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur le segment $[0, \pi]$.

Images des extrémités.

$$f(0) = 0 + \cos 0 = 1,$$
$$f(\pi) = \pi + \cos \pi = \pi - 1.$$

Comparaison avec 2. On a $1 < 2$ et, comme $\pi > 3$, $\pi - 1 > 2$. Donc :

$$f(0) < 2 < f(\pi).$$

Conclusion. f est continue sur $[0, \pi]$ et 2 est compris entre $f(0)$ et $f(\pi)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel $c \in [0, \pi]$ tel que $f(c) = 2$: l'équation $x + \cos x = 2$ admet au moins une solution dans $[0, \pi]$. Comme $f(0) \neq 2$ et $f(\pi) \neq 2$, cette solution est même dans $]0, \pi[$.

Attention. On compare $f(0)$ et $f(\pi)$ au nombre 2, pas à 0 : ici, $f(0)$ et $f(\pi)$ sont tous deux positifs, et pourtant l'équation a une solution. On peut aussi poser $g(x) = f(x) - 2$ pour tout réel x : alors $g(0) = -1 < 0$ et $g(\pi) = \pi - 3 > 0$.

Exercice 6

Deux étapes de dichotomie

Soit g une fonction continue et strictement croissante sur $[1, 2]$. On donne ses valeurs en quelques points (arrondies au centième) :

x	1	$1{,}25$	$1{,}5$	$1{,}625$	$1{,}75$	2
$g(x)$	-2	$-1{,}55$	$-0{,}63$	$0{,}04$	$0{,}86$	3

1.

Justifier que g s'annule en un unique réel α de l'intervalle $]1, 2[$.

INDICE

g est continue et strictement monotone sur $[1, 2]$: regarde les signes de $g(1)$ et de $g(2)$.

CORRIGÉ

Hypothèses. g est continue et strictement croissante sur $[1, 2]$, avec $g(1) = -2 < 0$ et $g(2) = 3 > 0$: le réel 0 est compris entre $g(1)$ et $g(2)$.

Existence et unicité. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à g, qui est continue et strictement monotone sur ce segment, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1, 2]$.

Conclusion. Comme $g(1) \neq 0$ et $g(2) \neq 0$, on a $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq 2$: g s'annule en un unique réel α de $]1, 2[$.

2.

Première étape de dichotomie : à l'aide du milieu de $[1, 2]$, déterminer un intervalle d'amplitude $0{,}5$ qui contient α.

INDICE

Calcule le milieu m de $[1, 2]$ et lis le signe de $g(m)$ dans le tableau. Garde la moitié aux extrémités de laquelle g **change de signe**.

CORRIGÉ

Le milieu. $m = \dfrac{1+2}{2} = 1{,}5$ et, d'après le tableau, $g(1{,}5) \approx -0{,}63$. Ce signe est sûr malgré l'arrondi : une valeur affichée $-0{,}63$ au centième près est comprise entre $-0{,}635$ et $-0{,}625$, donc strictement négative.

Le choix de la moitié. Sur $[1 ; 1{,}5]$, g est négative aux deux extrémités : pas de changement de signe. Sur $[1{,}5 ; 2]$, $g(1{,}5) < 0$ et $g(2) > 0$: g change de signe. On garde donc $[1{,}5 ; 2]$.

On peut aussi utiliser la croissance : $g(1{,}5) < 0 = g(\alpha)$ et g est strictement croissante, donc $1{,}5 < \alpha$.

Conclusion. $1{,}5 < \alpha < 2$: l'intervalle $]1{,}5 ; 2[$, d'amplitude $0{,}5$, contient α.

3.

Poursuivre la dichotomie d'une étape. Donner l'encadrement de α obtenu et son amplitude.

INDICE

Le nouveau milieu est celui de l'intervalle trouvé à la question 2, et non celui de $[1,2]$. Toutes les valeurs du tableau ne servent pas.

CORRIGÉ

Le milieu. Le milieu de $[1{,}5;2]$ est $m=\dfrac{1{,}5+2}{2}=1{,}75$ et, d'après le tableau, $g(1{,}75)\approx 0{,}86$. La valeur exacte est au moins $0{,}855$: elle est strictement positive.

Le choix de la moitié. $g(1{,}5)<0$ et $g(1{,}75)>0$: g change de signe sur $[1{,}5;1{,}75]$. Par croissance, $g(\alpha)=0<g(1{,}75)$ donne $\alpha<1{,}75$.

Conclusion. $1{,}5<\alpha<1{,}75$; cet encadrement a pour amplitude $1{,}75-1{,}5=0{,}25$.

À retenir. Chaque étape divise l'amplitude par 2 : 1, puis $0{,}5$, puis $0{,}25$. La valeur $g(1{,}25)$ ne sert pas, car $1{,}25$ est le milieu de la moitié éliminée à la question 2. À l'étape suivante, $g(1{,}625)\approx 0{,}04>0$ donnerait $1{,}5<\alpha<1{,}625$.

Exercice 7

Une bijection et deux valeurs de sa réciproque

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x$.

1.

Justifier que f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, puis calculer ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

INDICE

f est la somme des fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto 2x$: quel est le sens de variation de chacune ? Pour les limites, regarde la limite de chacun des deux termes.

CORRIGÉ

Continuité. f est une fonction polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$.

Stricte croissance. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $a^3 < b^3$; de plus, $2a < 2b$. En additionnant ces deux inégalités, $a^3 + 2a < b^3 + 2b$, c'est-à-dire $f(a) < f(b)$.

Limites. En $+\infty$, x^3 et $2x$ tendent vers $+\infty$; en $-\infty$, ils tendent vers $-\infty$. Par somme :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Conclusion. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de limite $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$.

2.

Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J, que l'on précisera. Que peut-on en conclure pour la fonction f ?

INDICE

Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle : quel théorème s'applique ? L'image de $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ se lit avec les deux limites de la question 1.

CORRIGÉ

Le théorème de la bijection s'applique à une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle : ces hypothèses sont vérifiées à la question 1, sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

L'intervalle J. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de limite $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$. Donc :

$$\begin{aligned} J = f(\mathbb{R}) &=]-\infty, +\infty[\\ &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Conclusion. f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $J = \mathbb{R}$: pour tout réel y, l'équation $x^3 + 2x = y$ admet une unique solution réelle. La fonction f admet donc une fonction réciproque f^{-1}, définie sur $\mathbb{R}$, et pour tous réels x et y :

$$y = f^{-1}(x) \iff f(y) = x.$$

3.

a) Calculer $f(1)$ et $f(-2)$. En déduire $f^{-1}(3)$ et $f^{-1}(-12)$.

b) Sans calculer ces deux nombres, comparer $f^{-1}(5)$ et $f^{-1}(8)$.

INDICE

a) $f^{-1}(3)$ est le réel dont l'image par f vaut 3 : cherche-le parmi les images que tu viens de calculer.

b) Quel est le sens de variation de f^{-1} ?

CORRIGÉ

a) On calcule :

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^3 + 2 \times 1 = 3, \\ f(-2) &= (-2)^3 + 2 \times (-2) \\ &= -8 - 4 = -12. \end{aligned}$$

D'après l'équivalence $y = f^{-1}(x) \iff f(y) = x$:

- $f(1) = 3$, donc $f^{-1}(3) = 1$;
- $f(-2) = -12$, donc $f^{-1}(-12) = -2$.

Attention. $f^{-1}(3)$ n'est pas $\dfrac{1}{f(3)}$: la notation f^{-1} désigne la fonction réciproque, pas l'inverse.

b) La réciproque d'une fonction strictement croissante est strictement croissante : f^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $5 < 8$, on obtient $f^{-1}(5) < f^{-1}(8)$.

Conclusion. $f^{-1}(3) = 1$, $f^{-1}(-12) = -2$ et $f^{-1}(5) < f^{-1}(8)$.

Exercice 8

Calculer avec les racines n-ièmes

1.

Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}},$$
$$C = \sqrt{\sqrt[3]{64}}.$$

INDICE

Regroupe sous une seule racine : avec le même indice, le quotient passe sous la racine ; pour deux racines emboîtées, les indices se multiplient. Reconnais ensuite une puissance exacte.

CORRIGÉ

On utilise les règles de calcul sur les racines n-ièmes de nombres positifs.

Calcul de A. Les deux racines ont le même indice 3 : le quotient passe sous la racine.

$$A = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3,$$

car $3^3 = 27$.

Calcul de C. Pour deux racines emboîtées, les indices se multiplient : $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64}$. Donc $C = 2$, car $2^6 = 64$. On peut aussi calculer de l'intérieur vers l'extérieur : $\sqrt[3]{64} = 4$, puis $\sqrt{4} = 2$.

Conclusion. $A = 3$ et $C = 2$.

2.

Un élève écrit : $\sqrt[3]{8+27} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} = 5$. Cette égalité est-elle correcte ? Justifier.

INDICE

Si $\sqrt[3]{35}$ était égal à 5, que vaudrait 5^3 ?

CORRIGÉ

La seconde égalité est juste : $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} = 2 + 3 = 5$. Il reste à savoir si $\sqrt[3]{8+27} = \sqrt[3]{35}$ vaut 5.

Pour des réels positifs, $\sqrt[3]{35} = 5$ équivaut à $5^3 = 35$. Or $5^3 = 125 \neq 35$, donc $\sqrt[3]{35} \neq 5$.

Conclusion. L'égalité écrite par l'élève est fausse : $\sqrt[3]{8+27} \neq \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27}$.

À retenir. La racine n-ième d'une somme n'est pas la somme des racines n-ièmes : les règles de calcul portent sur le produit et le quotient, jamais sur la somme.

Pour situer $\sqrt[3]{35}$. $3^3 = 27 < 35 < 64 = 4^3$ et la fonction racine cubique est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc $3 < \sqrt[3]{35} < 4$.

3.

a) Calculer $8^{\frac{2}{3}}$ et $16^{-\frac{3}{4}}$.

b) Pour $x > 0$, écrire $\dfrac{x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}}$ sous la forme x^r, où r est un nombre rationnel.

INDICE

a) Par définition, $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$, et $x^{-r} = \dfrac{1}{x^r}$. b) Pour multiplier deux puissances d'un même nombre, on **additionne** les exposants ; pour diviser, on les soustrait.

CORRIGÉ

a) Par définition des puissances rationnelles :

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

On peut aussi écrire $8^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$.

De même, $16^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = 8$, donc :

$$16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{8}.$$

b) Les puissances rationnelles ne sont définies que pour un réel strictement positif, d'où la condition $x > 0$. Pour un produit, on additionne les exposants :

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{3}} &= x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} \\ &= x^{\frac{5}{6}}. \end{aligned}$$

Pour un quotient, on les soustrait :

$$\begin{aligned} \frac{x^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{6}}} &= x^{\frac{5}{6}-\frac{1}{6}} \\ &= x^{\frac{4}{6}} = x^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Vérification sur un exemple. Pour $x = 64$: $64^{\frac{1}{2}} = 8$, $64^{\frac{1}{3}} = 4$, $64^{\frac{1}{6}} = 2$, et $\dfrac{8 \times 4}{2} = 16 = 64^{\frac{2}{3}}$.

Conclusion. $8^{\frac{2}{3}} = 4$ et $16^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{8}$. Pour tout $x > 0$, l'expression proposée vaut x^r avec $r = \dfrac{2}{3}$.

Attention. Multiplier les exposants au numérateur ($\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$) donnerait $\dfrac{x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{6}}} = 1$, ce qui est faux. On multiplie les exposants pour une puissance de puissance : $(x^r)^{r'} = x^{rr'}$.