BURHAN

Continuité

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

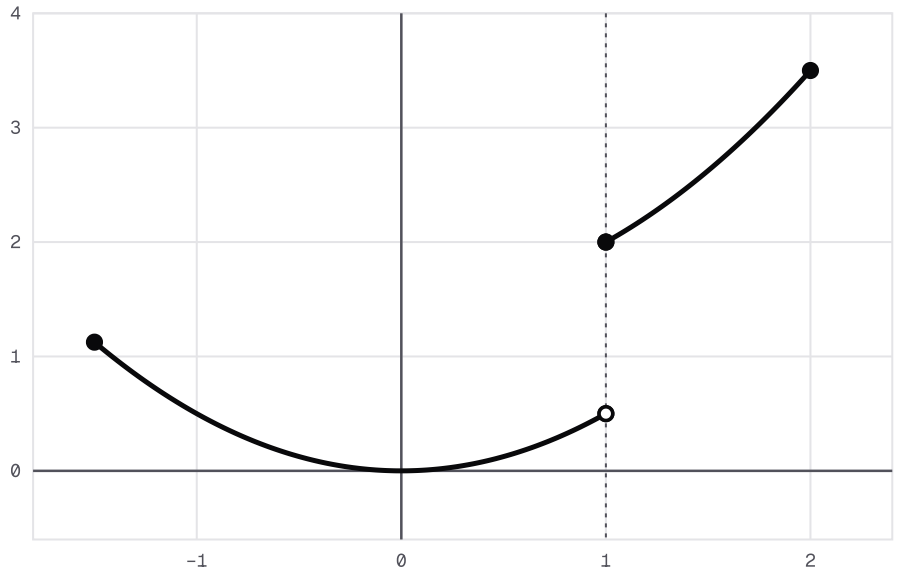
Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/continuite/cours

Chapitre	Semestre
Continuité	Semestre 1

Une courbe qui se casse

Sans lever le crayon ?

Une courbe **continue**, c'est une courbe qu'on trace **sans lever le crayon**. Regarde celle-ci, et suis-la du doigt de gauche à droite.



Courbe d'une fonction f, pour x allant de −1,5 à 2.

Borne exclue en x = 1 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 0,5.

Point creux en x = 1, à l'ordonnée estimée ≈ 0,5 : limite à gauche estimée numériquement.

Devine : Que vaut f(1) ?

Au-dessus de $x = 1$, le dessin montre un point creux, à la hauteur $0{,}5$, et un point plein, à la hauteur 2. Que vaut $f(1)$?

A. $f(1) = 0{,}5$: c'est la hauteur où la courbe arrive par la gauche.

Faux.

La courbe s'approche bien de $0{,}5$ par la gauche, mais sans l'atteindre : le point creux n'appartient pas à la courbe.

B. $f(1) = 2$: c'est le point plein qui appartient à la courbe.
Juste.
Un point plein appartient à la courbe, un point creux non. En $x = 1$, la courbe est donc à la hauteur 2, alors qu'elle arrivait vers $0{,}5$: il faut lever le crayon.

C. $f(1)$ vaut $0{,}5$ et 2 : la courbe passe par les deux points.
Faux.
Une fonction associe **une seule** valeur à chaque x. Un seul des deux points appartient à la courbe : le point plein.

D. $f(1)$ n'existe pas : la courbe est coupée en $x = 1$.
Faux.
La courbe est coupée, mais elle a bien un point au-dessus de $x = 1$: le point plein. Donc $f(1)$ existe.

Correction
$f(1) = 2$. Le point plein appartient à la courbe ; le point creux, non.

Par la gauche, la courbe s'approche de la hauteur $0{,}5$; en $x = 1$, elle est à la hauteur 2. Pour la tracer, il faut **lever le crayon** : f est **définie** en 1, mais elle n'est **pas continue** en 1.

Dire le saut avec des limites

Retiens ce code du dessin : un **point plein** appartient à la courbe, un **point creux** non. Ici, la courbe saute en $x = 1$.

L'objectif de ce chapitre : **dire avec des limites** si une courbe saute ou non.

Avant d'aller plus loin : comment ce chapitre est organisé

Comment lire ce cours. Crayon en main. Chaque notion avance par **étapes** courtes : « Continuer » ouvre la suivante, « Tout afficher » ouvre tout, pour réviser. Rien n'est verrouillé.

Les **activités** se font sans rien taper. Tu choisis une réponse et tu lis le retour, ou tu cherches sur ta feuille avant d'ouvrir les indices. Se tromper ici ne coûte rien.

Les parties **Bonus** peuvent être sautées. Compte trois soirées : jusqu'à l'image d'un intervalle, puis jusqu'à la solution unique, puis la fin. Au bac, deux questions de ce chapitre reviennent presque mot pour mot : la fiche examen, à la fin, les rassemble.

Continuité en un point

Observe

Tu connais le Wi-Fi qui coupe juste au moment du penalty ? L'image saute.

Une fonction continue en a, c'est l'inverse : quand x arrive en a, rien ne saute.

Objectif : le vérifier avec un calcul de limite, en trois lignes.

Devine : Vers quoi tend f(x) ?

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$. On s'approche de 2, des deux côtés :

x	$1{,}9$	$1{,}99$	$1{,}999$	$2{,}001$	$2{,}01$
$f(x)$	$4{,}61$	$4{,}9601$	$4{,}996001$	$5{,}004001$	$5{,}0401$

Vers quel nombre $f(x)$ semble-t-il se rapprocher ?

A. Vers $4{,}996001$: c'est la valeur la plus proche, juste avant 2.
Faux.
C'est une étape du trajet, pas son arrivée. Avec $x = 1{,}9999$, on obtient $4{,}99960001$: les valeurs continuent d'avancer.

B. Vers aucun nombre : à gauche, elles augmentent sans arrêt.
Faux.
Augmenter ne veut pas dire grandir sans fin. À gauche de 2, toutes les valeurs du tableau restent sous 5.

C. Vers 5, des deux côtés de 2.
Juste.
À gauche, les valeurs montent vers 5 ; à droite, elles descendent vers 5.

D. On ne peut rien dire : dans le tableau, x ne vaut jamais 2.
Faux.
Justement, une limite décrit ce qui se passe quand x s'approche de 2, sans l'atteindre. Le tableau suffit pour deviner.

Correction
Vers 5. Quand x s'approche de 2, par la gauche comme par la droite, $f(x)$ s'approche de 5. On écrit :

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5.$$

Reste une question : que vaut $f(2)$ lui-même ?

Définition

Et en 2 exactement ? $f(2) = 2^2 + 1 = 5$.

Les valeurs se rapprochent de 5, et 5, c'est justement $f(2)$. Pas de surprise à l'arrivée : la fonction est **continue en** 2.

Remarque : Petit rappel : la limite d'un polynôme

En 1ère, tu as appris que la limite d'un polynôme en a se calcule en **remplaçant x par a**. Ce chapitre lui donne un nom : les polynômes sont **continus**.

$$\lim_{x \to 2} \left(x^2 + 1\right) = 2^2 + 1 = 5$$

Définition : Continuité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$.

On dit que f est **continue en** a lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

En clair. f est continue en a quand **la limite** et **la valeur** sont le même nombre :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Vérifier en trois lignes

Méthode : Continuité en a

1. **Valeur** : calcule $f(a)$.
2. **Limite** : calcule $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.
3. **Comparaison** : si les deux nombres sont égaux, f est continue en a ; sinon, elle ne l'est pas.

Pour un polynôme, le résultat est connu d'avance. La méthode devient vraiment utile pour les fonctions **par morceaux**, à la section suivante.

Exemple : x² + 1 en 2 (guidé)

1. **Valeur** : $f(2) = 2^2 + 1 = 5$.
2. **Limite** : f est un polynôme, donc $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$.
3. **Comparaison** : $5 = 5$, donc f est continue en 2.

Trois lignes. C'est tout.

Quand la courbe casse

Exemple : Contre-exemple : la courbe qui se casse

Reprends le dessin de l'introduction, en $x = 1$.

1. **Valeur** : le point plein est à la hauteur 2, donc $f(1) = 2$.
2. **Juste avant 1** : la courbe arrive à la hauteur $0{,}5$.
3. **Juste après 1** : la courbe part de la hauteur 2.

Les deux côtés n'arrivent pas au même endroit. La limite en 1 n'existe pas, donc f **n'est pas continue** en 1. C'est le saut.

Attention : Définie ne veut pas dire continue

✗ Faux	✓ Juste
« $f(1)$ existe, donc f est continue en 1. »	Il faut aussi que la limite **existe** et **soit égale** à $f(1)$.

La courbe cassée est bien **définie** en 1 (elle vaut 2), mais elle n'est **pas continue** en 1.

À toi

À toi : Continuité en 0

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x + 7$. Est-elle continue en 0 ?

Écris les trois lignes de la méthode sur ta feuille, puis vérifie avec la solution.

Indice 1
Les trois lignes : la valeur $f(0)$, puis la limite en 0, puis la comparaison.
Indice 2
f est un polynôme : sa limite en 0 se calcule en remplaçant x par 0, comme dans le petit rappel.
Indice 3
$0^3 = 0$ et $4 \times 0 = 0$.

Réponse
Oui.

1. **Valeur** : $f(0) = 0^3 - 4 \times 0 + 7 = 7$.
2. **Limite** : f est un polynôme, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 7$.
3. **Comparaison** : les deux nombres sont égaux, donc f est continue en 0.

Le mot du prof. Tu viens d'apprendre la définition la plus importante du chapitre. Tout le reste en découle.

Deux formules, un point de rendez-vous

Deux formules, un pont

Deux équipes construisent un pont, chacune depuis sa rive. Au milieu, les deux morceaux doivent se rejoindre exactement. Sinon, la voiture saute.

Une fonction **définie par morceaux** a une formule **avant** a et une autre **après**. Elle est continue en a si les deux formules « arrivent » au même endroit, et si ce point appartient à la courbe.

Objectif : vérifier que le pont se rejoint. C'est une question d'examen (rare, mais très formatrice).

Devine : Le pont se rejoint-il ?

Voici la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

x	$0{,}9$	$0{,}99$	1	$1{,}01$	$1{,}1$
$g(x)$	$1{,}81$	$1{,}9801$	2	$2{,}03$	$2{,}3$

Quand x se rapproche de 1, par la gauche puis par la droite, de quel nombre $g(x)$ se rapproche-t-il ?

A. De deux nombres différents, car les deux formules sont différentes.

Faux.
Deux formules différentes peuvent arriver au même endroit. Regarde le tableau : des deux côtés, les valeurs se resserrent autour du même nombre.

B. De $1{,}9801$ à gauche et de $2{,}03$ à droite.

Faux.
Ce sont des valeurs du tableau, pas le nombre visé. Avec x encore plus près de 1, $g(x)$ est encore plus près de 2.

C. De 2 des deux côtés, et ce nombre est aussi $g(1)$.

Juste.
À gauche, $x^2 + 1$ se rapproche de 2 ; à droite, $3x - 1$ aussi. Et la première ligne donne $g(1) = 2$.

D. De 2 à gauche ; à droite, on ne sait pas, car $3x - 1$ ne sert pas en 1.

Faux.
$3x - 1$ sert pour les $x > 1$: ce sont justement les x qui arrivent par la droite. Sa limite se calcule en remplaçant x par 1.

Correction
Vers 2, des deux côtés, et $g(1) = 2$. Les deux morceaux arrivent au même point, et ce point est sur la courbe : le pont se rejoint.

À gauche, à droite

En clair. $x \to a^-$ se lit « x tend vers a **par la gauche** » : x reste plus petit que a. De même, $x \to a^+$ se lit « **par la droite** ».

f est continue en a quand **trois nombres sont égaux** :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Dans l'énoncé exact qui suit, α désigne un petit nombre positif.

Définition : Continuité à droite, à gauche

Soit f une fonction et soit a un réel.

- Si f est définie sur un intervalle $[a, a+\alpha[$ avec $\alpha > 0$, on dit que f est **continue à droite en** a lorsque $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
- Si f est définie sur un intervalle $]a-\alpha, a]$ avec $\alpha > 0$, on dit que f est **continue à gauche en** a lorsque $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Propriété : Continuité et continuité latérale

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$.

f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a.

Exemple et contre-exemple

Méthode : Fonction par morceaux en a

1. **Valeur** : prends la formule valable **en** a (celle avec $\leq$ ou $\geq$) et calcule $f(a)$.
2. **Limite à gauche** : avec la formule des $x < a$.
3. **Limite à droite** : avec la formule des $x > a$.
4. **Conclusion** : trois nombres égaux, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ et f est continue en a.

Exemple : Le pont se rejoint (guidé)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

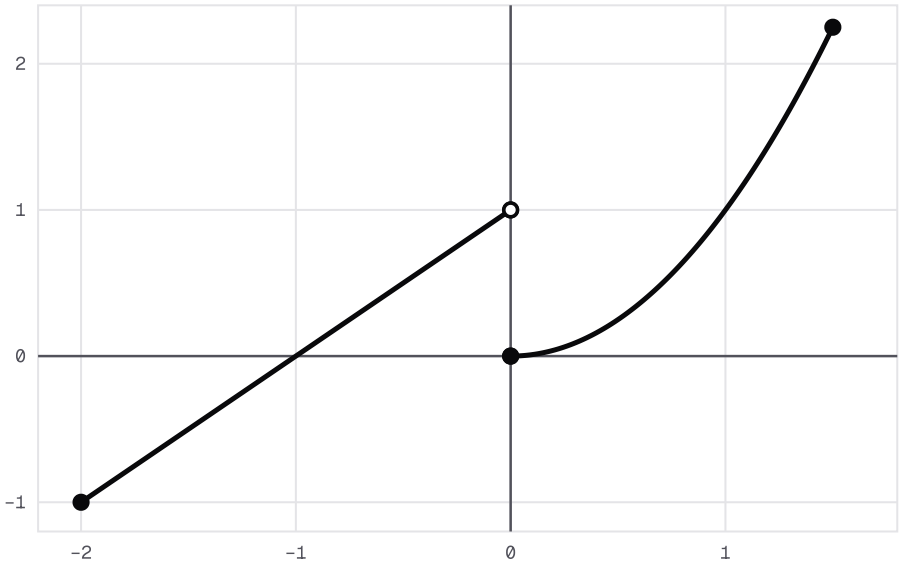
1. **Valeur** : en 1, c'est la première ligne. $g(1) = 1^2 + 1 = 2$.
2. **Limite à gauche** : $\lim\limits_{x \to 1^-} \left(x^2 + 1\right) = 2$.
3. **Limite à droite** : $\lim\limits_{x \to 1^+} (3x - 1) = 2$.
4. **Conclusion** : les trois nombres valent 2, donc g est continue en 1.

Exemple : Le pont ne se rejoint pas (guidé)

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$k(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. **Valeur** : $k(0) = 0^2 = 0$.
2. **Limite à gauche** : $\lim\limits_{x \to 0^-} (x + 1) = 1$.
3. **Limite à droite** : $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0$.
4. **Conclusion** : $1 \neq 0$. Les deux morceaux ne se rejoignent pas : k **n'est pas continue** en 0.



k ● Point du graphe ○ Point exclu du graphe

La fonction k : par la gauche, la courbe arrive à la hauteur 1 (point creux) ; en 0, la valeur est 0 (point plein). Le saut se voit.

Borne exclue en x = 0 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 1.

Point creux en x = 0, à l'ordonnée estimée ≈ 1 : limite à gauche estimée numériquement.

À toi

À toi : À compléter

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

1. **Valeur** : 2 vérifie $x \geq 2$, donc $h(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$.

2. **Limite à gauche** : à toi.

3. **Limite à droite** : à toi.

Écris les étapes 2 et 3, puis la conclusion, sur ta feuille. Vérifie ensuite avec la solution.

Indice 1
Pour $x \to 2^-$, on a $x < 2$: quelle ligne de l'accolade utilises-tu ? Et pour $x \to 2^+$?
Indice 2
Remplace x par 2 : $2^2 - 1$ à gauche, $2 \times 2 - 1$ à droite. Compare avec $h(2)$.

Réponse
2. **Limite à gauche** : pour $x < 2$, $h(x) = x^2 - 1$, donc $\lim\limits_{x \to 2^-} h(x) = 2^2 - 1 = 3$.

3. **Limite à droite** : $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x - 1) = 3$.

4. **Conclusion** : les trois nombres valent 3, donc h est continue en 2.

Vérifie ta copie : chaque limite calculée avec sa formule ; les trois nombres comparés ; la conclusion écrite.

Trouve l'erreur : La mauvaise formule

Soit m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$m(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Un camarade a rédigé :

> $m(1) = 1^2 + 2 = 3$. $\lim\limits_{x \to 1^-} m(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(x^2 + 2\right) = 3$, car 1 vérifie $x \geq 1$. $\lim\limits_{x \to 1^+} m(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(x^2 + 2\right) = 3$. Donc m est continue en 1.

Où est l'erreur ?

A. $m(1)$ devait se calculer avec $2x$.
Faux.
1 vérifie $x \geq 1$: c'est la deuxième ligne. $m(1) = 3$ est juste.

B. La limite à gauche utilise la mauvaise formule.
Juste.
Pour $x \to 1^-$, on a $x < 1$: il faut prendre $2x$. Que 1 vérifie $x \geq 1$ ne compte que pour la valeur $m(1)$.

C. La limite à droite utilise la mauvaise formule.
Faux.
Pour $x \to 1^+$, on a $x > 1$: la formule $x^2 + 2$ est la bonne.

D. Il manque la limite de m en 1, sans côté.
Faux.

Les limites à gauche et à droite suffisent : si elles sont égales à $m(1)$, m est continue en 1. C'est l'énoncé exact vu plus haut.

Correction

L'erreur : pour $x \to 1^-$, on a $x < 1$, donc on utilise $2x$:

$$\lim_{x \to 1^-} m(x) = \lim_{x \to 1^-} 2x = 2.$$

Or $m(1) = 3$, et la limite à droite vaut 3. Comme $2 \neq 3$, m **n'est pas continue** en 1. Elle est seulement continue à droite en 1.

À gauche, on prend toujours la formule des $x < a$, même si la valeur en a vient de l'autre ligne. Avec la même erreur, on calculerait $\lim\limits_{x \to 0^-} k(x)$ avec x^2, et on croirait k continue en 0.

À toi : Trouver le paramètre

Soit b un réel (un **paramètre**) et q la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$q(x) = \begin{cases} 2x + b & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Pour quelle valeur de b la fonction q est-elle continue en 1 ?

A. Pour toute valeur de b, car $q(1) = 4$ ne dépend pas de b.

Faux.

$q(1)$ ne dépend pas de b, mais la limite à gauche, si. Elle doit, elle aussi, valoir 4.

B. Pour aucune, car $2x + b$ et $x^2 + 3$ sont deux formules différentes.

Faux.

Les deux formules n'ont pas à être égales partout. Il suffit que leurs limites en 1 soient égales à $q(1)$.

C. Pour $b = 4$.

Faux.

C'est oublier le terme $2x$: en 1, la formule de gauche donne $2 + b$, pas b.

D. Pour $b = 2$.

Juste.

Avec $b = 2$, la limite à gauche vaut $2 + 2 = 4$, comme $q(1)$ et la limite à droite.

Indice 1

$q(1)$ se calcule avec la ligne valable en 1 : 1 vérifie $x \geq 1$, donc $q(1) = 1^2 + 3$. Pour $x \to 1^+$, on a $x > 1$: la limite à droite se calcule aussi avec $x^2 + 3$.

Indice 2

À gauche, la limite de $2x + b$ en 1 vaut $2 + b$. Écris l'équation « limite à gauche $= q(1)$ », puis résous-la.

Correction

$b = 2$.

- **Valeur** : $q(1) = 1^2 + 3 = 4$.
- **Limite à droite** : $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(x^2 + 3\right) = 4$.
- **Limite à gauche** : $\lim\limits_{x \to 1^-} (2x + b) = 2 + b$.

q est continue en 1 si et seulement si les trois nombres sont égaux : $2 + b = 4$, donc $b = 2$.

Au bac

Méthode : Coin examen : étudier la continuité en a

Rédaction attendue pour g en 1 :

> On a $g(1) = 2$. $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(x^2 + 1\right) = 2$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (3x - 1) = 2$. Donc $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = g(1)$, et g est continue en 1.

Chaque limite est écrite **avec sa formule** : c'est ce qui est noté ($0{,}5$ point dans le sujet relevé).

Bonus : boucher un trou

Remarque : Bonus : boucher un trou

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. Elle n'est **pas définie** en 1.

Pourtant, pour tout réel $x \neq 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= x + 1. \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.

On bouche le trou avec une nouvelle fonction F : $F(x) = f(x)$ pour $x \neq 1$, et $F(1) = 2$. F est continue en 1 : c'est le **prolongement de f par continuité** en 1.

Continuité sur un intervalle : une phrase suffit

Une courbe en deux morceaux

Ici, presque pas de calcul. Vérifier la continuité point par point serait interminable. On a mieux : une liste de fonctions **déjà certifiées continues**, et des règles pour les combiner.

Objectif : justifier la continuité en **une phrase**.

Trouve l'erreur : « Lever le crayon » ne suffit pas

Un camarade affirme : « La courbe de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est en deux morceaux, on lève le crayon. Donc cette fonction n'est pas continue. » Que lui réponds-tu ?

A. Il a raison : on lève le crayon en 0, donc elle n'est pas continue.

Faux.

Le « trou » est en 0, où $\dfrac{1}{x}$ n'existe pas. On ne parle de continuité que là où la fonction est définie.

B. Il a tort : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Faux.

0 n'a pas d'image : la fonction n'est pas définie sur $\mathbb{R}$, donc elle ne peut pas y être continue.

C. Il a raison : en 0, les limites sont infinies, donc il y a rupture.

Faux.

Les limites en 0 sont bien infinies, mais 0 n'a pas d'image : la continuité en 0 ne se pose pas.

D. Il a tort : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Juste.

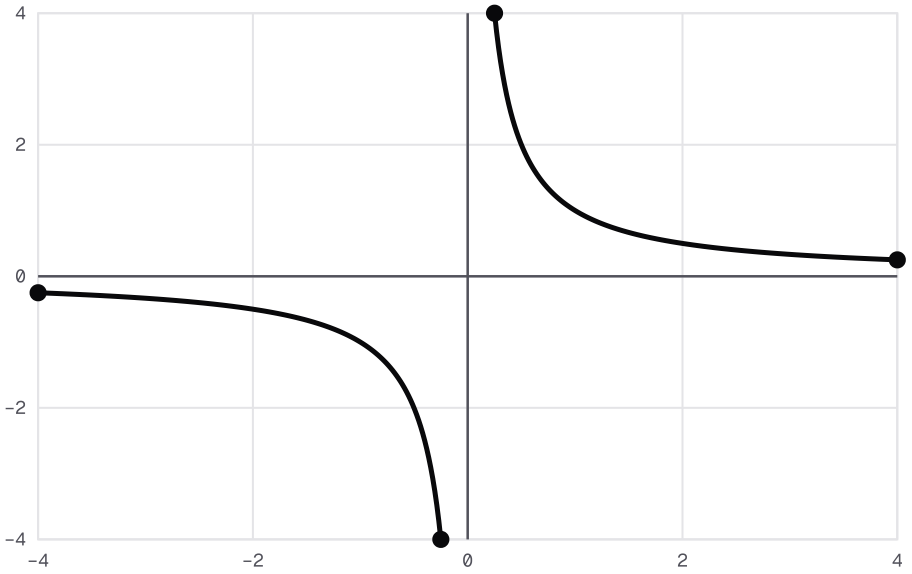
C'est une fonction rationnelle, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: elle est continue sur chaque intervalle inclus dans cet ensemble.

Correction

Il a tort. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est rationnelle, définie pour $x \neq 0$. Elle est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Le « trou » est en 0, là où la fonction **n'existe pas**. On parle de continuité seulement là où la fonction est définie : « lever le crayon » ne suffit pas pour conclure.

Continue sur un intervalle



La courbe de x ↦ 1/x : deux branches, car 0 n'a pas d'image. Sur chaque intervalle où elle est définie, la fonction est continue.

Le calcul fait en 2 marche partout. Pour tout réel a :

$$\lim_{x \to a} \left(x^2 + 1\right) = a^2 + 1.$$

La limite en a est toujours la valeur en a. On dit que la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est **continue sur** $\mathbb{R}$.

Définition : Continuité sur un intervalle

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

- f est **continue sur** $]a, b[$ lorsqu'elle est continue en tout point de $]a, b[$.
- f est **continue sur** $[a, b]$ lorsqu'elle est continue sur $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.

On définit de même la continuité sur $[a, b[$, sur $]a, b]$ et sur les intervalles non bornés.

En clair. Être **continue sur un intervalle**, c'est être continue en chaque point de cet intervalle. Aux bornes fermées, on regarde seulement le côté qui est dans l'intervalle.

Les fonctions usuelles

Propriété : Continuité des fonctions usuelles

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

- Toute fonction rationnelle est continue sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\tan$ est continue sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Exemple : Une phrase suffit

1. La fonction $f : x \mapsto x^3 - 5x + 2$ est un **polynôme**, donc continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $g : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x-3}$ est une **fonction rationnelle**, définie pour $x \neq 3$. Donc g est continue sur $]-\infty, 3[$ et sur $]3, +\infty[$.

Vérifie : Quelle phrase justifie ?

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{3x}{x+1}$. Quelle phrase justifie que f est continue sur $]-1, +\infty[$?

A. f est rationnelle, et $]-1, +\infty[$ est inclus dans son ensemble de définition.
Juste.
Une fonction rationnelle est continue sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition. C'est le cas ici.

B. f est rationnelle, donc continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]-1, +\infty[$.
Faux.
f n'est pas définie en -1, donc pas continue sur $\mathbb{R}$. La propriété parle des intervalles inclus dans l'ensemble de définition.

C. $f(0) = 0$ existe, et 0 est dans l'intervalle $]-1, +\infty[$.
Faux.
Une valeur en un point ne dit rien de la continuité, ni en ce point, ni ailleurs. Être défini n'est pas être continu.

D. Sa courbe se trace sans lever le crayon sur $]-1, +\infty[$.
Faux.
C'est l'idée, pas une justification : on ne trace jamais toute la courbe. Au bac, on cite la propriété des fonctions usuelles.

Correction
f est une fonction **rationnelle**, définie pour $x + 1 \neq 0$, soit $x \neq -1$. Or $]-1, +\infty[$ est un intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Donc f est continue sur $]-1, +\infty[$.

> Une phrase suffit : « f est rationnelle, donc continue sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition, en particulier sur $]-1, +\infty[$ ».

Combiner des fonctions continues

Propriété : Opérations sur les fonctions continues

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, λ un réel et $n \in \mathbb{N}^*$.

- Les fonctions $f+g$, λf, $f \times g$ et f^n sont continues sur I.
- Si g ne s'annule pas sur I, les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur I.
- Si f est positive sur I, la fonction $\sqrt{f}$ est continue sur I.

Exemple : Une somme (guidé)

La fonction $h : x \mapsto x^2 + \sqrt{x}$ est la **somme** de $x \mapsto x^2$ et de $x \mapsto \sqrt{x}$, toutes deux continues sur $[0, +\infty[$. Donc h est continue sur $[0, +\infty[$.

À toi : Justifier en une phrase

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 3x^2 - \dfrac{1}{x}$. Justifie que f est continue sur $]0, +\infty[$.

Écris ta phrase sur ta feuille, puis vérifie avec la solution.

Indice 1

Découpe f en deux fonctions que tu connais. À quelle famille appartient $3x^2$? Et $\dfrac{1}{x}$?

Indice 2

$\dfrac{1}{x}$ est définie pour $x \neq 0$: elle est continue sur $]0, +\infty[$. Quelle opération relie les deux morceaux ?

Réponse

La fonction $x \mapsto 3x^2$ est un polynôme, et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est rationnelle, continue sur $]0, +\infty[$. Leur différence f est donc continue sur $]0, +\infty[$.

Une différence est une somme : pour tout $x > 0$, $f(x) = 3x^2 + (-1) \times \dfrac{1}{x}$.

Vérifie ta copie : les deux fonctions nommées ; l'intervalle $]0, +\infty[$; l'opération citée.

Deux machines à la suite : la composée

Deux machines à la suite

Au café, tu échanges un billet contre des pièces, puis tu glisses les pièces dans le distributeur. Deux machines à la suite. Tout marche si chaque machine fonctionne, et si le distributeur **accepte** les pièces qu'on lui donne : il refuse les pièces étrangères.

Une **composée**, c'est pareil : la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ calcule d'abord $u(x) = x^2+1$, puis la racine carrée de $u(x)$.

Objectif : justifier sa continuité.

Vérifie : Qui est à l'intérieur ?

Soit k la fonction définie sur $[-2, +\infty[$ par $k(x) = \sqrt{3x+6}$. Pour calculer $k(1)$, dans quel ordre travaillent les deux machines ?

A. D'abord la racine de x, puis on multiplie par 3 et on ajoute 6.

Faux.
Cet ordre calcule $3\sqrt{x}+6$, une autre fonction : en 1, elle vaut 9, alors que $k(1) = 3$.

B. D'abord la racine de $3x$, puis on ajoute 6.

Faux.
Cet ordre calcule $\sqrt{3x}+6$: le 6 sortirait de la racine. Dans k, il est sous la racine.

C. On prend la racine de chaque terme : $\sqrt{3x}+\sqrt{6}$.

Faux.
La racine ne se partage pas sur une somme. En 1 : $\sqrt{9} = 3$, mais $\sqrt{3}+\sqrt{6}$ vaut environ $4{,}18$.

D. D'abord $3x+6$, puis la racine du résultat.

Juste.
En 1 : $3 \times 1 + 6 = 9$, puis $\sqrt{9} = 3$. Le calcul fait en premier est à l'**intérieur**.

Correction
L'**intérieur** est ici $u(x) = 3x+6$: c'est la première machine. L'**extérieur** est la racine : la deuxième machine, appliquée au résultat. Ainsi, $k(1) = \sqrt{9} = 3$.

La racine n'accepte que les nombres positifs ou nuls. Pour la continuité, il faudra donc vérifier que $u(x) \geq 0$: c'est le distributeur qui refuse les pièces étrangères.

La composée

Propriété : Continuité d'une composée

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et g une fonction continue sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$.

Alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I.

En un point : si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

En clair. Première fonction continue, deuxième fonction continue, et les valeurs de la première **restent dans le domaine** de la deuxième : alors l'enchaînement est continu.

Dans l'énoncé, f est la première machine, à l'intérieur, et g la deuxième, à l'extérieur. La condition $f(I) \subset J$ veut dire : g accepte toutes les valeurs de f.

Exemple : √(x² + 1) (guidé)

1. **Première machine** : $u(x) = x^2 + 1$ est un polynôme, continu sur $\mathbb{R}$.
2. **Domaine** : pour tout réel x, $x^2 + 1 \geq 1 > 0$. Les valeurs de u restent dans $[0, +\infty[$.
3. **Deuxième machine** : $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
4. **Conclusion** : $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

À toi

Trouve l'erreur : Vérifier le domaine

Un camarade écrit : « $x \mapsto 2x - 4$ est un polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$. La racine carrée est continue sur $[0, +\infty[$. Donc $x \mapsto \sqrt{2x - 4}$ est continue sur $\mathbb{R}$. » Où est l'erreur ?

A. Aucune erreur : deux fonctions continues donnent une composée continue.
Faux.
Il manque la troisième condition de l'énoncé : les valeurs de la première machine doivent rester dans le domaine de la deuxième.

B. La racine n'accepte pas toutes les valeurs de $2x - 4$.
Juste.
En $x = 0$, $2x - 4 = -4$: la racine de -4 n'existe pas. Le domaine n'a pas été vérifié.

C. $x \mapsto 2x - 4$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.
Faux.
Elle l'est : c'est un polynôme. Cette ligne de la copie est juste.

D. Il faut d'abord calculer la dérivée de $x \mapsto \sqrt{2x - 4}$.
Faux.
La continuité d'une composée ne demande aucune dérivée : deux fonctions continues et le domaine suffisent.

Correction
L'erreur : le domaine n'a pas été vérifié. En $x = 0$, $2x - 4 = -4$: la racine n'existe pas.

La fonction $x \mapsto \sqrt{2x - 4}$ n'est donc pas continue sur $\mathbb{R}$: elle n'y est même pas définie partout.

> Le distributeur refuse certaines pièces : vérifie toujours le domaine. Sur quel intervalle se limiter ? C'est l'exercice suivant.

> **À toi : √(2x − 4)**
>
> Soit h la fonction définie par $h(x) = \sqrt{2x-4}$. Sur quel intervalle est-elle continue ?
>
> Écris ta justification sur ta feuille, puis vérifie avec la solution.
>
> **Indice 1**
> La racine accepte seulement les nombres positifs ou nuls. Quelle inéquation l'intérieur $2x-4$ doit-il vérifier ?
> **Indice 2**
> Écris $2x-4 \geq 0$ et résous-la : ajoute 4, puis divise par 2.
> **Indice 3**
> Reprends les quatre lignes de l'exemple guidé : première machine, domaine, deuxième machine, conclusion.
>
> **Réponse**
> **Sur $[2, +\infty[$.**
>
> 1. **Première machine** : $x \mapsto 2x-4$ est un polynôme, continu sur $\mathbb{R}$, donc sur $[2, +\infty[$.
> 2. **Domaine** : $2x-4 \geq 0$ équivaut à $2x \geq 4$, soit $x \geq 2$. Pour $x \geq 2$, les valeurs de $2x-4$ restent dans $[0, +\infty[$.
> 3. **Deuxième machine** : $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$, 0 compris.
> 4. **Conclusion** : h est continue sur $[2, +\infty[$.
>
> En 2, borne fermée, cette continuité est seulement **à droite** : h n'est pas définie pour $x < 2$. On dit que h est **continue à droite en** 2.
>
> **Vérifie ta copie** : l'inéquation écrite avant de conclure ; le crochet fermé en 2, car la racine est continue sur $[0, +\infty[$, 0 compris (que $h(2) = 0$ existe ne suffirait pas) ; la borne $+\infty$ toujours ouverte.

Le mot du prof. Tu sais dire si une fonction est continue, en un point ou sur un intervalle. Encore une section, puis pause.

Image d'un intervalle : lire le tableau

Observe

À Marrakech, en juillet, il peut faire 25 °C à 8 h et 42 °C à 15 h. La température monte sans sauter : elle passe donc par **toutes** les valeurs entre 25 et 42. L'ensemble des températures est un **intervalle**.

Objectif : trouver l'ensemble des valeurs d'une fonction, en lisant son **tableau de variations**. Ça te servira directement pour la fonction réciproque.

Devine : Les valeurs de x³

La fonction $x \mapsto x^3$ est continue et strictement croissante. Quand x parcourt $[-1, 2]$, quelles valeurs prend x^3 ?

A. Seulement -1 et 8, ses valeurs aux bornes.
Faux.
Ce sont les valeurs de départ et d'arrivée. Entre les deux, x^3 prend aussi toutes les autres : $0^3 = 0$, $1^3 = 1$, et ainsi de suite.

B. Toutes les valeurs de $[-1, 2]$, comme x.
Faux.
Tu as recopié l'intervalle des x. Or x^3 n'est pas x : en 2, x^3 vaut 8.

C. Toutes les valeurs de $[-1, 8]$.
Juste.
x^3 part de $(-1)^3 = -1$ et monte jusqu'à $2^3 = 8$, sans sauter ni revenir en arrière.

D. Toutes les valeurs de $[1, 8]$.
Faux.
$(-1)^3 = -1$, pas 1 : un cube garde le signe du nombre.

Correction
$[-1, 8]$**.** Quand x va de -1 à 2, x^3 va de $(-1)^3 = -1$ à $2^3 = 8$, sans sauter ni revenir en arrière. Il passe donc par toutes les valeurs entre les deux.

Cet ensemble de valeurs s'appelle l'**image** de $[-1, 2]$. Ici, c'est un intervalle, comme pour la température. Le tableau de l'énoncé exact, plus loin, fait la même chose dans tous les cas.

Image d'un intervalle

Théorème : Image d'un intervalle, d'un segment

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

- L'image $f(I)$ de l'intervalle I est un intervalle.
- Si $I = [a, b]$ est un segment, $f([a, b])$ est un segment $[m, M]$, où m et M sont respectivement le minimum et le maximum de f sur $[a, b]$.

En clair. L'**image** de I, notée $f(I)$, c'est l'ensemble de **toutes les valeurs** $f(x)$ quand x parcourt I. Si f est continue, cette image est un intervalle, sans trou.

Un **segment**, c'est un intervalle fermé et borné, comme $[a, b]$.

Vérifie : Et sans monotonie ?

La fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $[-1, 2]$, mais elle n'y est pas monotone. Quelle est l'image de $[-1, 2]$?

A. $[1, 4]$

Faux.

1 et 4 sont les valeurs aux bornes. Mais la courbe descend jusqu'à 0, en $x = 0$, avant de remonter : les bornes ne suffisent pas.

B. $[0, 4]$

Juste.

Le minimum est $0^2 = 0$, atteint en 0. Le maximum est $2^2 = 4$, atteint en 2.

C. $[-1, 4]$

Faux.

Un carré n'est jamais négatif : $(-1)^2 = 1$.

D. $]0, 4]$

Faux.

0 est atteint, en $x = 0$, qui est bien dans $[-1, 2]$: crochet fermé.

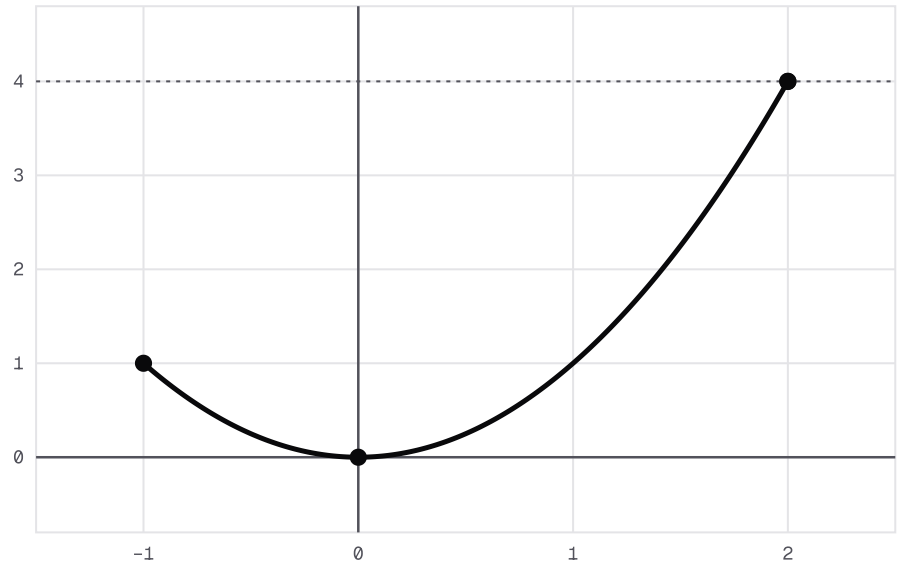
Indice 1

Sans monotonie, cherche directement le minimum et le maximum de x^2 sur $[-1, 2]$, comme dans l'énoncé.

Correction

$[0, 4]$**.** Pour tout $x \in [-1, 2]$, $x^2 \geq 0$, et $0^2 = 0$: le minimum est 0. De plus $|x| \leq 2$, donc $x^2 \leq 4 = 2^2$: le maximum est 4. L'image du segment est $[m, M] = [0, 4]$.

Ce n'est pas $[1, 4]$: la courbe descend jusqu'à 0 avant de remonter. Sans monotonie, pas de raccourci par les bornes.



La courbe de x ↦ x² sur [−1, 2] descend jusqu'à 0 en x = 0 avant de remonter jusqu'à 4 en x = 2 : l'image du segment est [0, 4].

Cas monotone

Remarque : Petit rappel : dérivée, variations et crochets

- Si $f'(x) \geq 0$ sur un intervalle, et f' nulle seulement en quelques points séparés, f est **strictement croissante**. Avec ≤ 0 : **strictement décroissante**. En clair : la courbe fait une pause à plat, en un point, mais ne redescend jamais.
- En $+\infty$ ou $-\infty$, un polynôme a la limite de son terme de plus haut degré. Par exemple, $4 - x^2$ et $-x^2$ tendent tous deux vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
- **Strictement monotone** : l'un ou l'autre, sur tout l'intervalle.
- $[1, 4]$: 1 et 4 sont dedans. $]1, 4[$: ils n'y sont pas. Du côté de l'infini, le crochet est **toujours ouvert**.

En clair. Le tableau de l'énoncé exact, juste après, a l'air effrayant. En vrai, il dit seulement trois choses :

- Chaque borne de I est remplacée par **la valeur de** f en cette borne. Si la borne est ouverte ou infinie, c'est **la limite de** f.
- Chaque crochet **suit sa borne** : fermé pour une valeur atteinte, ouvert pour une limite.
- On écrit toujours de la **plus petite** à la **plus grande** valeur. Si f **décroît**, borne et crochet passent ensemble de l'autre côté.

Propriété : Image d'un intervalle par une fonction continue strictement monotone

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I d'extrémités a et b ($a < b$, a et b éventuellement infinis pour un intervalle ouvert de ce côté).

Intervalle I	f strictement croissante	f strictement décroissante
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$[f(a), \lim_{x \to b^-} f(x)[$	$]\lim_{x \to b^-} f(x), f(a)]$
$]a, b]$	$]\lim_{x \to a^+} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim_{x \to a^+} f(x)[$
$]a, b[$	$]\lim_{x \to a^+} f(x), \lim_{x \to b^-} f(x)[$	$]\lim_{x \to b^-} f(x), \lim_{x \to a^+} f(x)[$

Les limites aux bornes ouvertes existent dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; une borne infinie de $f(I)$ est alors ouverte.

Trouve l'erreur : Les crochets

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Elle est continue et strictement décroissante, avec $f(1) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Quatre élèves écrivent l'image de $[1, +\infty[$ par f. Trois se trompent. Qui a raison ?

A. $f\big([1, +\infty[\big) = [1, 0]$

Faux.
Tu as recopié dans l'ordre des abscisses. Un intervalle s'écrit de la plus petite à la plus grande valeur : 0 va à gauche.

B. $f\big([1, +\infty[\big) = [0, 1[$

Faux.
Les nombres sont dans l'ordre, mais les crochets sont restés sur place. Chaque crochet suit sa borne : 1 est atteint, 0 ne l'est pas.

C. $f\big([1, +\infty[\big) = [0, 1]$

Faux.
0 est une limite. Pour tout $x \geq 1$, $\dfrac{1}{x} > 0$: la valeur 0 n'est jamais atteinte, crochet ouvert.

D. $f\big([1, +\infty[\big) =]0, 1]$

Juste.
$f(1) = 1$ est atteint : fermé. 0 est une limite jamais atteinte : ouvert. Et 0 passe à gauche, car f décroît.

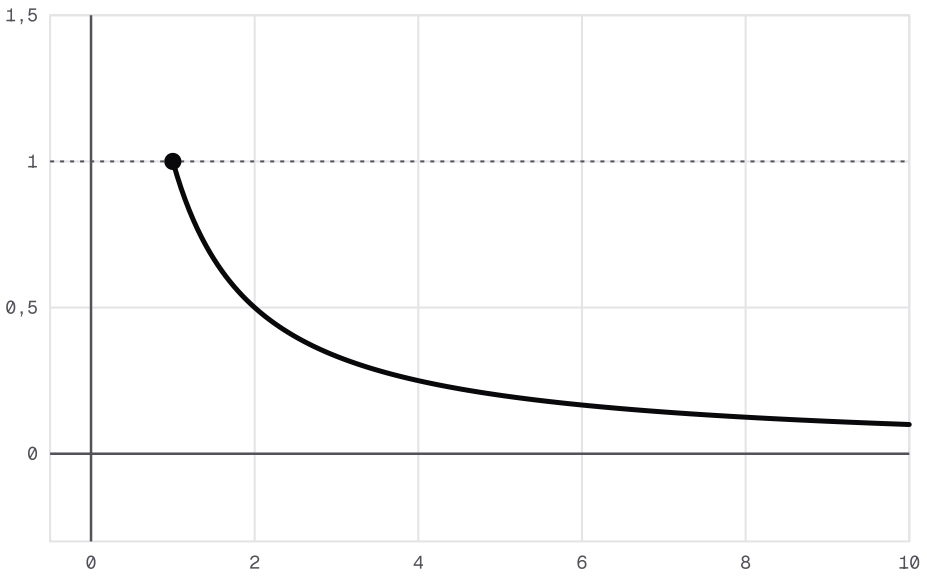
Correction

$$f\big([1, +\infty[\big) =]0, 1]$$

Les deux erreurs à éviter :

- $[1, 0]$: la plus petite valeur s'écrit à gauche.
- $[0, 1[$: 1 est atteint (fermé), 0 ne l'est pas (ouvert).

Le tableau et l'exemple guidé, à l'étape suivante, reprennent la méthode pas à pas.



La courbe de x ↦ 1/x sur [1, +∞[part du point plein (1, 1) puis s'approche de l'axe des abscisses sans jamais le toucher : l'image est]0, 1].

Exemples

Variations de f(x) = 1/x sur [1, +∞[: f décroît de 1 vers 0. Le 0 placé sous +∞ est une limite, jamais atteinte.

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	↘	0

Exemple : f(x) = 1/x sur [1, +∞[(guidé)

1. **Continuité et monotonie** : f est rationnelle, donc continue sur $[1, +\infty[$. Pour tout $x \geq 1$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$: f est strictement décroissante.
2. **Borne fermée** : $f(1) = 1$, atteint, crochet **fermé**.
3. **Borne infinie** : quand x devient très grand, $\dfrac{1}{x}$ devient minuscule. La limite est 0, jamais atteinte : crochet **ouvert**.

4. **Ordre** : f décroît, donc 0 passe à gauche, **avec son crochet**.

$$f\big([1,+\infty[\big) =]0,1]$$

À toi : 1/x sur]1, 3], à compléter

Même fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, cette fois sur $]1,3]$.

1. **Borne fermée** : $f(3) = \dfrac{1}{3}$, crochet fermé.
2. **Borne ouverte** : 1 n'est **pas** dans $]1,3]$. Même si $\dfrac{1}{1} = 1$, on prend la limite, qui vaut 1. Crochet ouvert ou fermé ?
3. **Ordre** : quelle valeur s'écrit à gauche ?

Écris $f\big(]1,3]\big)$ sur ta feuille, puis vérifie avec la solution.

Indice 1

Pour $x \in]1,3]$, x ne vaut jamais 1. Le nombre $\dfrac{1}{x}$ peut-il valoir 1 ?

Indice 2

f est décroissante : sa plus petite valeur est celle de la plus grande abscisse, 3.

Réponse

La valeur 1 n'est jamais atteinte sur $]1,3]$: crochet **ouvert**. La plus petite valeur, $\dfrac{1}{3}$, passe à gauche, avec son crochet fermé :

$$f\big(]1,3]\big) = \left[\frac{1}{3},1\right[$$

À toi

À toi : Une fonction qui monte

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 1$. Détermine $f([0,2])$ sur ta feuille, puis vérifie avec la solution.

Indice 1

Commence par le sens de variation : quel est le signe de $f'(x) = 3x^2$ sur $[0,2]$? Relis le petit rappel.

Indice 2

$f(0) = 0 + 1$ et $f(2) = 8 + 1$.

Réponse

f est un polynôme, donc continue sur $[0,2]$.

Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, et f' ne s'annule qu'en 0 : f est strictement croissante sur $[0,2]$.

Les deux bornes sont atteintes, $f(0) = 1$ et $f(2) = 9$: crochets fermés.

$$f([0, 2]) = [1, 9]$$

À toi : Une fonction qui descend vers l'infini

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4 - x^2$. Quelle est l'image $g([0, +\infty[)$?

A. $]-\infty, 4]$

Juste.
g décroît de $g(0) = 4$, atteint, vers $-\infty$: crochet ouvert du côté de l'infini.

B. $[4, -\infty[$

Faux.
Tu as suivi l'ordre des abscisses. g décroît : $-\infty$, le plus petit, passe à gauche.

C. $[-\infty, 4]$

Faux.
$-\infty$ n'est pas un nombre : il n'est jamais atteint. Du côté de l'infini, le crochet est toujours ouvert.

D. $]-\infty, 4[$

Faux.
$4 = g(0)$ est atteint, car $0 \in [0, +\infty[$: crochet fermé.

Indice 1
Commence par le sens de variation : quel est le signe de $g'(x) = -2x$ sur $[0, +\infty[$?
Indice 2
$g(0) = 4$. En $+\infty$, $4 - x^2$ a la limite de $-x^2$.

Correction
g est un polynôme, donc continue. Pour tout $x \geq 0$, $g'(x) = -2x \leq 0$, et g' ne s'annule qu'en 0 : g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

$g(0) = 4$, atteint : crochet fermé. La limite en $+\infty$ est $-\infty$: crochet ouvert. Comme g décroît, $-\infty$ passe à gauche :

$$g([0, +\infty[) =]-\infty, 4]$$

Le mot du prof. Première soirée terminée. Tu viens de faire le cœur de la question « réciproque » au bac : lire l'intervalle J sur un tableau. Pause méritée.

Le théorème du randonneur

Observe

Tu pars d'Imlil, vers $1\,700$ m d'altitude, et tu montes jusqu'au refuge du Toubkal, vers $3\,200$ m. Ton altitude change sans jamais sauter. Question : es-tu passé par $2\,500$ m ? Et combien de fois ?

Garde ta réponse en tête : une courbe va jouer le rôle du sentier.

Devine : La courbe coupe-t-elle l'axe ?

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x - 5$. Elle est continue sur $[1, 2]$, avec $f(1) = -1$ et $f(2) = 9$. Que peut-on dire de sa courbe entre 1 et 2, et pourquoi ?

A. On ne peut rien dire tant qu'on n'a pas résolu l'équation $x^3 + 3x - 5 = 0$.

Faux.
La courbe part sous l'axe et finit au-dessus, sans sauter : elle doit le traverser. Savoir qu'une solution existe ne demande pas de la calculer.

B. Elle coupe l'axe au moins une fois : elle va de -1 à 9 sans sauter.

Juste.
Pour aller de -1 à 9 sans lever le crayon, la courbe franchit forcément la valeur 0. Rien ne dit encore combien de fois.

C. Elle coupe l'axe en $x = 1{,}5$, au milieu de $[1, 2]$.

Faux.
Rien n'oblige la solution à être au milieu : $f(1{,}5) = 2{,}875$, qui n'est pas nul.

D. Elle coupe l'axe des abscisses exactement une fois, car $f(1) < 0$ et $f(2) > 0$.

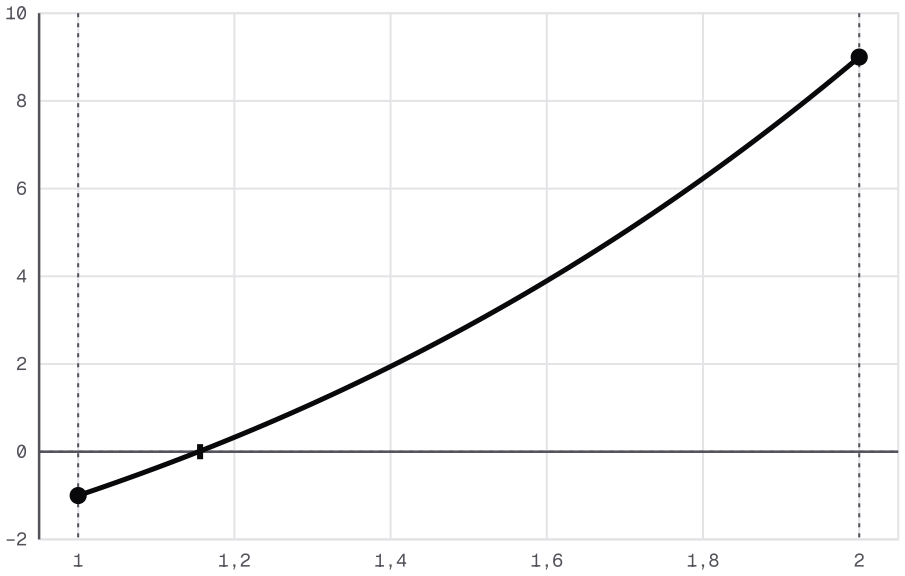
Faux.
Pour cette fonction, il n'y a en fait qu'un passage, mais la raison donnée ne le prouve pas : des signes contraires aux bornes garantissent un passage, pas un seul. Une courbe peut couper l'axe, revenir, puis le recouper : tu en verras une dans les pièges.

Correction
Au moins une fois. La courbe va de -1, sous l'axe, à 9, au-dessus, sans sauter : elle coupe l'axe des abscisses entre 1 et 2. C'est le randonneur : il passe par $2\,500$ m **au moins une fois**, peut-être plusieurs si le sentier monte et descend.

Ce bon sens a un nom savant : le **théorème des valeurs intermédiaires** (TVI).

Objectif : montrer qu'une équation a **au moins une** solution, sans la résoudre.

Le théorème



Courbe de f ------ Droite y = 0, et verticales x = a, x = b Intervalle contenant une solution, sur la droite y = k

La fonction $x^3 + 3x - 5$ est continue sur [1, 2], négative en 1 et positive en 2 : sa courbe coupe l'axe des abscisses entre 1 et 2.

a = 1, b = 2, k = 0.

f(a) ≈ −1 et f(b) ≈ 9.

Solutions de f(x) = k détectées, liste non exhaustive : x ∈ [1,1541714951 ; 1,1541714952].

Théorème : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

En clair. Si f est **continue** sur $[a, b]$, sa courbe ne saute pas. Elle prend donc toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$, **au moins une fois** chacune.

Montrer qu'une solution existe

Propriété : Cas f(a) · f(b) < 0

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$.

Alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a, b[$.

Démonstration

Comme $f(a) \times f(b) < 0$, les réels $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires et non nuls : 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$. Enfin $c \neq a$ et $c \neq b$ puisque $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$, donc $c \in]a, b[$.

Exemple : x³ + 3x − 5 = 0 sur]1, 2[(guidé)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x - 5$.

Continuité. f est un polynôme, donc continue sur $[1, 2]$.

Signes aux bornes.

$$f(1) = 1 + 3 - 5 = -1 < 0$$
$$f(2) = 8 + 6 - 5 = 9 > 0$$

Conclusion. $f(1) \times f(2) < 0$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet **au moins une** solution dans $]1, 2[$.

À toi : x³ + x − 1 = 0

Montre que $x^3 + x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans $]0, 1[$. Rédige sur ta feuille, puis vérifie avec la solution.

Indice 1
Pose $f(x) = x^3 + x - 1$ et suis les trois étapes de l'exemple : continuité, signes aux bornes, conclusion.
Indice 2
$f(0) = 0 + 0 - 1$ et $f(1) = 1 + 1 - 1$.

Réponse
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 1$. C'est un polynôme, donc f est continue sur $[0, 1]$.

De plus, $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$, donc $f(0) \times f(1) < 0$.

Conclusion. L'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans $]0, 1[$.

Vérifie ta copie : « polynôme » pour la continuité ; les deux valeurs ; le produit négatif ; « au moins une », pas « une seule » ; l'intervalle ouvert $]0, 1[$.

Piège : une seule solution ?

Trouve l'erreur : « au moins une », pas « une seule »

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 - x$. Un camarade a rédigé :

> h est continue sur $[-2, 2]$ car c'est un polynôme. $h(-2) = -6 < 0$ et $h(2) = 6 > 0$. Donc, d'après le TVI, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-2, 2[$.

Où est l'erreur ?

A. Dans la conclusion : le TVI ne permet pas d'écrire « unique ».
Juste.

Le TVI garantit l'existence d'une solution, pas leur nombre.

B. Dans le calcul : $h(-2)$ vaut -10, pas -6.

Faux.

$(-2)^3 = -8$ et $-(-2) = +2$: $h(-2) = -6$. Le calcul est juste.

C. Dans l'intervalle : la solution est dans $[-2, 2]$, pas dans $]-2, 2[$.

Faux.

$h(-2)$ et $h(2)$ ne sont pas nuls : une solution n'est ni -2 ni 2. Elle est bien dans $]-2, 2[$.

D. Nulle part : la copie est juste.

Faux.

Teste $h(0)$, $h(1)$ et $h(-1)$: l'équation a plusieurs solutions, la conclusion est donc fausse.

Correction

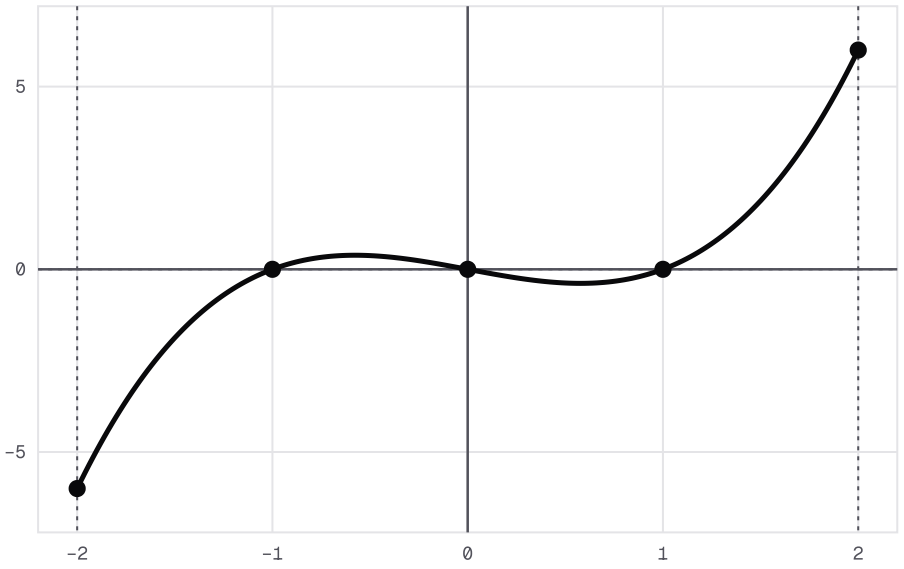
L'erreur : « unique ». Le théorème promet **au moins** une solution. En réalité, il y en a **trois** :

$$\begin{aligned} h(-1) &= -1 + 1 = 0 \\ h(0) &= 0 \\ h(1) &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Le sentier a monté, descendu, remonté. La conclusion juste : « l'équation $h(x) = 0$ admet **au moins une** solution dans $]-2, 2[$ ».

La courbe de h, au début de l'étape suivante, montre ces trois solutions.

Ce que le théorème ne dit pas



Courbe de f ------ Droite y = 0, et verticales x = a, x = b

La courbe de $x^3 - x$ sur $[-2, 2]$ coupe l'axe des abscisses trois fois : le théorème garantit une solution, pas une seule.

a = −2, b = 2, k = 0.

f(a) ≈ −6 et f(b) ≈ 6.

Solutions de f(x) = k détectées, liste non exhaustive : x ≈ −1 ; x ≈ 0 ; x ≈ 1.

Attention : Quand le théorème ne dit rien

- **Mêmes signes.** La fonction $g : x \mapsto x^2 - 1$ vérifie $g(-2) = g(2) = 3 > 0$. Pourtant, -1 et 1 sont des solutions. Signes identiques : le théorème ne dit ni oui, ni non.
- **Pas de continuité.** La fonction $k : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ vaut -1 en -1 et 1 en 1. Pourtant, $\dfrac{1}{x} = 0$ n'a aucune solution. k n'existe pas en 0, qui est dans $[-1, 1]$: le théorème ne s'applique pas. C'est un sentier coupé par un ravin.

La question qui rapporte : une unique solution α

Une fois ou plusieurs ?

Retour au Toubkal. Avec le TVI, ton sentier pouvait monter, redescendre, remonter : tu passais à $2\,500$ m **au moins une fois**, peut-être plusieurs. Cette fois, le sentier **monte tout le temps**, de $1\,700$ m à Imlil jusqu'au refuge à $3\,200$ m.

Objectif : montrer qu'une équation a **une seule** solution, et le rédiger comme au bac.

> **Devine : Combien de passages ?**
>
> Sur ce sentier qui monte tout le temps, combien de fois passes-tu à $2\,500$ m, et pourquoi ?
>
> **A.** On ne peut pas savoir : au moins une fois, peut-être plusieurs.

Faux.
« Au moins une fois », c'est la promesse du TVI pour **n'importe quel** sentier sans saut. Ici, tu en sais plus : il monte tout le temps.

B. Une seule fois : chaque pas le fait monter, il ne revient jamais à $2\,500$ m.

Juste.
Après $2\,500$ m, tu es toujours plus haut. Revenir à $2\,500$ m demanderait de redescendre, ou de marcher à plat à cette altitude : ce sentier ne fait ni l'un ni l'autre.

C. Une seule fois : le refuge est plus haut qu'Imlil.

Faux.
Un sentier peut finir plus haut et redescendre en route. Il repasserait alors à $2\,500$ m. Arriver plus haut ne suffit pas : il faut monter **tout le temps**.

D. Une seule fois : il ne redescend jamais, même s'il reste un moment à plat.

Faux.
Si le passage à plat est à $2\,500$ m, tu restes à $2\,500$ m sur des dizaines de mètres : une infinité de points à la même altitude. « Ne jamais redescendre » ne suffit pas : il faut monter **strictement**, sans palier.

E. Une seule fois : $2\,500$ m est entre $1\,700$ m et $3\,200$ m.

Faux.
Pour un sentier sans saut, ça garantit que tu passes à $2\,500$ m : c'est le TVI. Ça ne dit pas combien de fois.

Correction
Une seule fois. Tu y passes, car le sentier va de $1\,700$ m à $3\,200$ m sans saut : c'est le TVI. Et une seule fois, car il monte à chaque pas : il ne redescend jamais et ne reste jamais à plat.

Pour une fonction, c'est être **strictement croissante** sur un intervalle I : pour tous x_1 et x_2 de I, si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) < f(x_2)$. Deux abscisses différentes ont deux images différentes : la fonction ne prend jamais deux fois la même valeur.

Les trois ingrédients

Vérifie : Ce que donne le TVI seul

On sait seulement deux choses : f est continue sur $[1, 2]$, et $f(1) \times f(2) < 0$. Que peut-on affirmer pour l'équation $f(x) = 0$?

A. Elle a au moins une solution dans $]1, 2[$.

Juste.
C'est le TVI, dans le cas où $f(1)$ et $f(2)$ sont de signes contraires. Il garantit l'existence d'une solution, pas leur nombre.

B. Elle a une unique solution dans $]1, 2[$.

Faux.
Le TVI ne compte pas les solutions. Souviens-toi de $h(x) = x^3 - x$ sur $[-2, 2]$, vue avec le TVI : signes contraires aux bornes, et **trois** solutions.

C. Elle a une solution dans $]1, 2[$ seulement si f est croissante.

Faux.
L'existence ne demande aucune monotonie. Exemple : $x \mapsto 1{,}5 - x$ est continue et **décroissante** sur $[1, 2]$, vaut $0{,}5$ en 1 et $-0{,}5$ en 2, et s'annule en $1{,}5$.

D. Rien, tant qu'on n'a pas étudié le signe de f'.

Faux.
Le TVI n'utilise pas la dérivée. Le signe de f' servira à autre chose : prouver la stricte monotonie, donc l'unicité.

Correction
Avec la continuité et les signes contraires, le TVI donne **au moins une** solution dans $]1, 2[$. Pour affirmer qu'il n'y en a **qu'une**, il manque un ingrédient : c'est l'objet de l'énoncé exact, juste en dessous.

Propriété : Unicité par stricte monotonie

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$.

Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique** solution dans $]a, b[$.

Démonstration
L'existence d'une solution dans $]a, b[$ résulte du cas $f(a) \times f(b) < 0$. Si $c_1 \neq c_2$ étaient deux solutions, par exemple $c_1 < c_2$, la stricte monotonie donnerait $f(c_1) \neq f(c_2)$, ce qui contredit $f(c_1) = f(c_2) = 0$.

En clair. Pour une **unique** solution, il faut **trois ingrédients** :

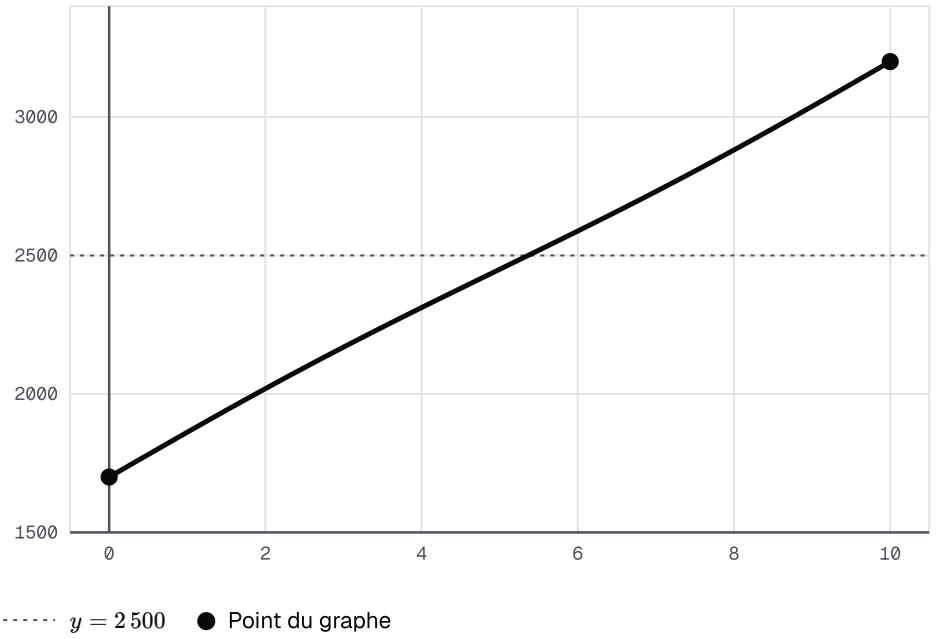
1. f **continue** sur $[a, b]$;
2. f **strictement monotone** sur $[a, b]$;
3. $f(a)$ et $f(b)$ de **signes contraires**.

Les ingrédients 1 et 3 donnent **au moins une** solution : c'est le TVI. Le 2 garantit qu'il n'y en a **qu'une**. Une fonction strictement monotone ne prend jamais deux fois la même valeur, donc jamais deux fois la valeur 0.

Chaque ingrédient compte :

- sans continuité, une fonction peut **sauter** par-dessus 0 ;
- sans signes contraires, $x \mapsto x + 1$ ne s'annule pas sur $[1, 2]$;

- sans stricte monotonie, $h : x \mapsto x^3 - x$ monte, descend, remonte sur $[-2, 2]$, et s'annule trois fois.



Un sentier qui monte tout le temps, de 1 700 m à Imlil jusqu'à 3 200 m au refuge, croise une seule fois le niveau des 2 500 m.

Vérifie : Deux solutions ?

f est strictement croissante sur $[1, 2]$. Un camarade affirme : « $f(1{,}3) = 0$ et $f(1{,}7) = 0$ ». Est-ce possible, et pourquoi ?

A. Oui, à condition que f soit continue sur $[1, 2]$.

Faux.

Avec des signes contraires, la continuité donne des solutions ; elle n'en limite pas le nombre. Ici, la stricte croissance suffit à trancher, continue ou pas.

B. Non : une fonction strictement croissante ne s'annule jamais.

Faux.

Elle peut s'annuler, mais **une seule fois** : $x \mapsto x - 1{,}5$ est strictement croissante et s'annule en $1{,}5$. Ce qui est impossible, c'est de s'annuler deux fois.

C. Oui, à condition que $f(1) \times f(2) < 0$.

Faux.

Les signes aux bornes servent à l'existence. Ils n'autorisent pas deux solutions quand f est strictement croissante.

D. Non : $1{,}3 < 1{,}7$ entraîne $f(1{,}3) < f(1{,}7)$.

Juste.

$f(1{,}3)$ et $f(1{,}7)$ ne peuvent pas valoir 0 tous les deux, puisque l'un est strictement plus petit que l'autre.

E. On ne peut pas savoir sans connaître f'.

Faux.

On sait déjà que f est strictement croissante : la dérivée servait seulement à le prouver. Avec $1{,}3 < 1{,}7$, on obtient $f(1{,}3) < f(1{,}7)$.

Correction

Impossible. Comme $1{,}3 < 1{,}7$ et que f est strictement croissante, $f(1{,}3) < f(1{,}7)$: les deux images sont différentes, elles ne valent pas 0 toutes les deux.

C'est exactement la démonstration de l'énoncé : deux solutions différentes $c_1 < c_2$ donneraient $f(c_1) < f(c_2)$, donc pas $0 = 0$.

Prouver la stricte monotonie

Vérifie : Le bon argument

Pour la fonction $f : x \mapsto x^3 + 3x - 5$ sur $[1, 2]$, quel raisonnement prouve que f est **strictement croissante** ?

A. $f(1) = -1$, $f(1{,}5) = 2{,}875$ et $f(2) = 9$ augmentent, donc f est strictement croissante.

Faux.

Quelques valeurs ne disent pas ce qui se passe entre elles. Pour $h : x \mapsto x^3 - x$, on a $h(-2) = -6 < h(0) = 0 < h(2) = 6$, et pourtant $h(0{,}5) = -0{,}375 < h(0)$: elle redescend.

B. $f(x) < f(2)$ pour tout $x \in [1, 2[$, donc f est strictement croissante.

Faux.

Une fonction peut être maximale à la fin sans monter tout le temps. La fonction $h : x \mapsto x^3 - x$ vérifie $h(x) < h(2) = 6$ pour tout $x \in [-2, 2[$, et elle descend entre $-0{,}5$ et $0{,}5$.

C. $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ pour tout $x \in [1, 2]$, donc f est strictement croissante.

Juste.

$3x^2 \geq 0$, donc $3x^2 + 3 \geq 3 > 0$ sur **tout** l'intervalle. Une dérivée strictement positive sur un intervalle donne une fonction strictement croissante sur cet intervalle.

D. $f'(1) = 6 > 0$ et $f'(2) = 15 > 0$ aux deux bornes, donc f est strictement croissante.

Faux.

Le signe de f' en quelques points ne suffit pas. Pour $h : x \mapsto x^3 - x$, $h'(x) = 3x^2 - 1$: $h'(-1) = 2 > 0$ et $h'(1) = 2 > 0$, mais $h'(0) = -1 < 0$.

Indice 1

Quel outil de 1re année du bac donne le sens de variation d'une fonction sur **tout** un intervalle ?

Indice 2

Dérive terme à terme : $(x^3)' = 3x^2$, $(3x)' = 3$ et $(-5)' = 0$. Quel est le signe de $3x^2 + 3$?

Correction

f est un polynôme, donc dérivable sur $[1, 2]$, et $f'(x) = 3x^2 + 3$. Comme $x^2 \geq 0$, on a $3x^2 + 3 \geq 3 > 0$ pour tout $x \in [1, 2]$. Donc f est strictement croissante sur $[1, 2]$.

Les trois autres raisonnements partent de faits exacts, mais ils ne suffisent pas : quelques valeurs de f ou de f' ne prouvent rien sur **tout** l'intervalle.

Rédiger comme au bac

Exemple : x³ + 3x − 5 = 0 (guidé)

Montrons que $x^3 + 3x - 5 = 0$ admet une unique solution α dans $]1, 2[$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x - 5$.

1. **Continuité** : polynôme, donc continue sur $[1, 2]$.
2. **Stricte monotonie** : f est dérivable sur $[1, 2]$ et, pour tout $x \in [1, 2]$, $f'(x) = 3x^2 + 3 \geq 3 > 0$. Donc f est strictement croissante sur $[1, 2]$.
3. **Signes aux bornes** : $f(1) = 1 + 3 - 5 = -1 < 0$ et $f(2) = 8 + 6 - 5 = 9 > 0$, donc $f(1) \times f(2) < 0$.
4. **Conclusion** : à toi de la choisir, juste en dessous.

Variations de f(x) = x³ + 3x − 5 sur [1, 2] : f' > 0, f croît de −1 à 9 et passe donc une seule fois par 0.

x	1		2
$f'(x)$		+	
$f(x)$	-1	↗	9

Vérifie : La phrase finale

Laquelle de ces conclusions rapporte **tous** les points ?

A. f est continue et strictement croissante sur $[1, 2]$, et $f(1) < f(2)$: l'équation a une unique solution α dans $]1, 2[$.

Faux.
$f(1) < f(2)$ ne dit pas que f change de signe. La fonction $x \mapsto x + 1$ est continue et strictement croissante sur $[1, 2]$, avec $2 < 3$, et ne s'annule pas.

B. f est continue sur $[1, 2]$ et $f(1) \times f(2) < 0$: d'après le TVI, l'équation a une solution α dans $]1, 2[$, unique car f est strictement croissante.

Juste.

Chaque ingrédient sert à quelque chose : le TVI donne l'existence, la stricte croissance donne l'unicité.

C. f est continue sur $[1,2]$ et $f(1)\times f(2)<0$: d'après le TVI, l'équation a une unique solution α dans $]1,2[$.

Faux.
Le TVI donne seulement l'existence. Le mot « unique » exige la stricte monotonie, et il faut l'écrire.

D. f est strictement croissante sur $[1,2]$ et $f(1)\times f(2)<0$: l'équation a une solution α dans $]1,2[$, unique car f est strictement croissante.

Faux.
Sans continuité, une fonction strictement croissante peut **sauter** par-dessus 0 : voir la fonction g de la correction.

E. f est continue et strictement croissante sur $[1,2]$, et $f(1)\times f(2)<0$: l'équation a une unique solution α dans $]-1,9[$.

Faux.
$]-1,9[$ est l'intervalle des **valeurs** $f(x)$. La solution α est une abscisse : on la cherche dans $]1,2[$.

Correction
Conclusion : f est continue sur $[1,2]$ et $f(1)\times f(2)<0$, donc, d'après le TVI, l'équation $f(x)=0$ admet une solution dans $]1,2[$. Cette solution est **unique** car f est strictement croissante sur $[1,2]$.

Chaque ingrédient a son contre-exemple :

- **sans stricte monotonie**, $h : x\mapsto x^3-x$ s'annule trois fois sur $[-2,2]$;
- **sans signes contraires**, $x\mapsto x+1$ ne s'annule pas sur $[1,2]$.

Sans continuité, la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression ci-dessous saute par-dessus 0 sur $[-1,1]$:

$$g(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x<0 \\ x+1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

g est strictement croissante, $g(-1)=-2$ et $g(1)=2$, mais elle ne vaut jamais 0.

Un ingrédient oublié, ce sont des points perdus, même si la conclusion est juste.

Méthode : Coin examen : unique solution α

Rédaction modèle, à adapter :

> La fonction f est continue sur $[a,b]$ (car polynôme, somme de fonctions continues…). f est dérivable sur $[a,b]$ et, pour tout $x \in [a,b]$, $f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $[a,b]$. De plus, $f(a) = \ldots < 0$ et $f(b) = \ldots > 0$, donc $f(a) \times f(b) < 0$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans $]a,b[$, et cette solution est **unique** car f est strictement monotone.

Si f décroît : « $f'(x) < 0$, donc strictement décroissante », puis « $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$ ». **Si f' s'annule** en quelques points : « $f'(x) \geq 0$ sur $[a,b]$, nulle en un nombre fini de points seulement, donc strictement croissante ».

Au bac : question tombée dans 4 des 12 sujets étudiés, pour $0{,}5$ à $0{,}75$ point, répartis entre les trois ingrédients et la conclusion.

À toi

Trouve l'erreur : Une copie presque parfaite

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = 2 - 3x - x^3$. Un camarade a rédigé :

> k est continue sur $[0,1]$ car c'est un polynôme. k est dérivable et, pour tout $x \in [0,1]$, $k'(x) = -3 - 3x^2 < 0$, donc k est strictement croissante sur $[0,1]$. De plus, $k(0) = 2$ et $k(1) = -2$, donc $k(0) \times k(1) = -4 < 0$. Donc, d'après le TVI, l'équation $k(x) = 0$ admet une solution dans $]0,1[$, unique car k est strictement croissante.

Où est l'erreur ?

A. La continuité de k n'est pas justifiée.

Faux.
Elle l'est : « car c'est un polynôme ». Cette ligne rapporte son point.

B. Avec $k'(x) < 0$, k est décroissante, pas croissante.

Juste.
Une dérivée strictement négative donne une fonction strictement **dé**croissante. Les valeurs le confirment : k passe de 2 à -2.

C. Avec $k(0) > 0$ et $k(1) < 0$, le TVI ne s'applique pas.

Faux.
Le TVI demande des signes **contraires**, dans n'importe quel ordre : $k(0) \times k(1) < 0$ suffit.

D. La conclusion attribue l'unicité au TVI.

Faux.
Relis : le TVI donne « une solution », et l'unicité vient de la stricte monotonie. C'est la bonne forme.

Correction
L'erreur : $k'(x) < 0$ donne une fonction strictement **décroissante**. La ligne juste :

> k est dérivable et, pour tout $x \in [0,1]$, $k'(x) = -3 - 3x^2 \leq -3 < 0$, car $3x^2 \geq 0$. Donc k est strictement décroissante sur $[0,1]$.

La conclusion devient « unique car k est strictement décroissante ». Un réflexe utile, pour une fonction monotone : des signes $+$ puis $-$ aux bornes vont avec une fonction qui descend.

À toi : x + √x − 3 = 0, à compléter

Montre que $x + \sqrt{x} - 3 = 0$ admet une unique solution dans $]1,4[$. Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = x + \sqrt{x} - 3$. Les deux premières étapes sont faites.

1. **Continuité** : somme de $x \mapsto x - 3$ et de $x \mapsto \sqrt{x}$, continues sur $[1,4]$.
2. **Stricte monotonie** : f est dérivable sur $[1,4]$ et, avec $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, on a $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ pour tout $x \in [1,4]$. Donc f est strictement croissante sur $[1,4]$.

Écris les étapes 3 (signes aux bornes) et 4 (conclusion) sur ta feuille, puis vérifie-les avec la solution.

Indice 1
Calcule $f(1)$ et $f(4)$. Rappel : $\sqrt{1} = 1$ et $\sqrt{4} = 2$.
Indice 2
$f(1) = 1 + 1 - 3$ et $f(4) = 4 + 2 - 3$. Quels sont leurs signes ?
Indice 3
Pour conclure, reprends la phrase du Coin examen : le TVI pour l'existence, la stricte croissance pour l'unicité.

Réponse

3. **Signes aux bornes** : $f(1) = 1 + 1 - 3 = -1 < 0$ et $f(4) = 4 + 2 - 3 = 3 > 0$, donc $f(1) \times f(4) < 0$.
4. **Conclusion** : f est continue sur $[1,4]$ et $f(1) \times f(4) < 0$, donc, d'après le TVI, l'équation admet une solution dans $]1,4[$. Elle est **unique** car f est strictement croissante sur $[1,4]$.

Vérifie ta copie : les deux valeurs calculées ; le produit négatif ; l'unicité attribuée à la stricte croissance, pas au TVI ; l'intervalle ouvert $]1,4[$.

À toi : Une fonction qui descend

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - x - x^3$. Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β dans $]1,2[$.

Rédige sur ta feuille, puis vérifie avec la solution.

Indice 1
Dérive terme à terme : $(3)' = 0$, $(-x)' = -1$ et $(-x^3)' = -3x^2$. Quel est le signe de $f'(x)$?

Indice 2
$f(1) = 3 - 1 - 1$ et $f(2) = 3 - 2 - 8$.
Indice 3
Ici $f' < 0$: écris « strictement **dé**croissante ». Le produit $f(1) \times f(2)$ reste négatif, et la conclusion garde la même forme.

Réponse

1. **Continuité** : f est un polynôme, donc continue sur $[1, 2]$.
2. **Stricte monotonie** : f est dérivable sur $[1, 2]$ et $f'(x) = -1 - 3x^2$. Comme $3x^2 \geq 0$, on a $f'(x) \leq -1 < 0$ pour tout $x \in [1, 2]$: f est strictement décroissante sur $[1, 2]$.
3. **Signes aux bornes** : $f(1) = 3 - 1 - 1 = 1 > 0$ et $f(2) = 3 - 2 - 8 = -7 < 0$, donc $f(1) \times f(2) < 0$.
4. **Conclusion** : f est continue sur $[1, 2]$ et $f(1) \times f(2) < 0$, donc, d'après le TVI, l'équation admet une solution β dans $]1, 2[$. Elle est **unique** car f est strictement décroissante sur $[1, 2]$.

Vérifie ta copie : les signes $+$ puis $-$ aux bornes vont avec « décroissante » ; « polynôme » pour la continuité ; « strictement décroissante », avec la justification $f'(x) \leq -1 < 0$; les deux valeurs ; l'unicité attribuée à la stricte monotonie.

Encadrer α, signe de f

Vérifie : Encadrer α

Une question peut suivre : vérifier que $1{,}1 < \alpha < 1{,}2$, avec la fonction f de l'exemple guidé.

À la main : $1{,}1 \times 1{,}1 = 1{,}21$, puis $1{,}21 \times 1{,}1 = 1{,}331$. De même, $1{,}2 \times 1{,}2 = 1{,}44$, puis $1{,}44 \times 1{,}2 = 1{,}728$.

$$\begin{aligned} f(1{,}1) &= 1{,}331 + 3{,}3 - 5 \\ &= -0{,}369 < 0 \\ f(1{,}2) &= 1{,}728 + 3{,}6 - 5 \\ &= 0{,}328 > 0 \end{aligned}$$

f est continue sur $[1{,}1 ; 1{,}2]$ et change de signe : l'équation a une solution dans $]1{,}1 ; 1{,}2[$. **Pourquoi cette solution est-elle α ?**

Cette question n'est pas tombée dans les 12 sujets étudiés : elle reste possible, et se rédige en trois lignes.

A. Le TVI donne directement la solution α.

Faux.
Le TVI donne **une** solution dans $]1{,}1 ; 1{,}2[$, sans dire laquelle. S'il y en avait plusieurs, rien ne dirait que c'est α.

B. Il faut encore calculer α à la calculatrice.

Faux.
On ne calcule pas α : on l'encadre. L'unicité suffit à conclure, sans aucune valeur de α.

C. $]1{,}1;1{,}2[$ est dans $]1,2[$, où α est la seule solution.
Juste.
La solution trouvée est dans $]1,2[$. Or l'équation n'y a qu'une solution, α. C'est donc α.

D. Il faut encore prouver la stricte croissance sur $[1{,}1;1{,}2]$.
Faux.
Inutile : on sait déjà que l'équation n'a qu'une solution dans $]1,2[$. Et cette preuve seule ne dirait pas que la solution trouvée est α.

Correction
La rédaction complète, en trois temps :

1. **Signes** : $f(1{,}1) = -0{,}369 < 0$ et $f(1{,}2) = 0{,}328 > 0$.
2. **Existence** : f est continue sur $[1{,}1;1{,}2]$ et $f(1{,}1) \times f(1{,}2) < 0$, donc l'équation a une solution dans $]1{,}1;1{,}2[$.
3. **C'est bien α** : $]1{,}1;1{,}2[$ est inclus dans $]1,2[$, où α est la **seule** solution. Donc $1{,}1 < \alpha < 1{,}2$.

L'unicité sert deux fois : pour la question « unique solution », puis pour reconnaître α.

Pour aller plus loin, une autre rédaction juste : $f(1{,}1) < 0 = f(\alpha) < f(1{,}2)$ et f est strictement croissante sur $[1,2]$, donc $1{,}1 < \alpha < 1{,}2$.

Exemple : En déduire le signe de f(x) (guidé)

Ici, $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ pour **tout** réel x : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et $f(\alpha) = 0$.

- Si $x < \alpha$, alors $f(x) < f(\alpha) = 0$.
- Si $x > \alpha$, alors $f(x) > f(\alpha) = 0$.

Signe de f(x) = x³ + 3x − 5 : négatif avant α, nul en α, positif après.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		−	0	+	

Vérifie : Et si f descend ?

Reprends la fonction $f : x \mapsto 3 - x - x^3$ de l'exercice « Une fonction qui descend ». Pour tout réel x, $f'(x) = -1 - 3x^2 < 0$: f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, et $f(\beta) = 0$.

Pour $x < \beta$, quel raisonnement donne le signe de $f(x)$?

A. $f(x) > 0$, car f est strictement décroissante et $f(\beta) = 0$.

Juste.

$x < \beta$ et f strictement décroissante donnent $f(x) > f(\beta) = 0$: l'inégalité change de sens.

B. $f(x) < 0$, car f est strictement décroissante : elle descend vers 0.

Faux.

Elle descend **jusqu'à** 0 : avant β, elle est donc **au-dessus** de $f(\beta) = 0$. Ses valeurs sont positives.

C. $f(x) > 0$, car $f(1) = 1 > 0$ et $x < \beta$.

Faux.

La conclusion est juste, mais pas la raison : une seule valeur ne donne pas le signe de $f(x)$ pour **tous** les $x < \beta$. C'est la stricte décroissance qui le donne.

D. $f(x) < 0$, comme pour $x^3 + 3x - 5$ avant α.

Faux.

Le tableau du dessus vaut pour une fonction **croissante**. Celle-ci descend : avant β, elle est au-dessus de $f(\beta) = 0$.

Correction

f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $f(\beta) = 0$:

- si $x < \beta$, alors $f(x) > f(\beta) = 0$;
- si $x > \beta$, alors $f(x) < f(\beta) = 0$.

Pour une fonction strictement **dé**croissante, les signes s'inversent : $+$ avant la solution, $-$ après.

Le mot du prof. Si tu sais refaire l'exemple guidé sans regarder, tu as déjà sécurisé l'une des deux questions phares du chapitre. Tu as fait le plus dur. Deuxième soirée terminée. La suite : approcher α de plus en plus près, avec la dichotomie.

Approcher α : la dichotomie

Le principe

Jeu : ton ami pense à un nombre entre 1 et 100. Tu proposes 50. « Plus grand. » Tu proposes 75. « Plus petit. » À chaque réponse, tu coupes la zone en deux. En très peu d'essais, tu as trouvé.

La **dichotomie**, c'est exactement ce jeu, pour approcher une solution comme α.

Objectif : encadrer une solution de plus en plus finement.

Devine : Quelle moitié ?

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 1$. Sur $[0, 1]$, elle est continue et strictement croissante, car $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$. De plus, $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$.

L'équation $f(x) = 0$ a donc une unique solution, notée γ, dans $]0, 1[$. Tu proposes le milieu : $f(0{,}5) = -0{,}375$. Où est γ ?

A. Dans $]0; 0{,}5[$, car $f(0{,}5)$ est négatif.

Faux.
$f(0)$ et $f(0{,}5)$ sont **tous les deux** négatifs : pas de changement de signe sur cette moitié. Comme f croît, elle reste même négative sur $[0; 0{,}5]$.

B. Dans $]0{,}5; 1[$, car $f(0{,}5)$ et $f(1)$ sont de signes contraires.

Juste.
f change de signe entre $0{,}5$ et 1 : la solution est là. Tu viens de faire une étape de dichotomie.

C. $\gamma = 0{,}5$, car c'est le milieu de $]0, 1[$.

Faux.
Pour avoir $\gamma = 0{,}5$, il faudrait $f(0{,}5) = 0$. Or $f(0{,}5) = -0{,}375$: le milieu n'est pas la solution.

D. On ne peut pas savoir sans une valeur approchée de γ.

Faux.
Les signes suffisent : on cherche la moitié où f change de signe, sans connaître γ.

Correction
On calcule :

$$\begin{aligned} f(0{,}5) &= 0{,}125 + 0{,}5 - 1 \\ &= -0{,}375 < 0 \end{aligned}$$

Et $f(1) = 1 > 0$. f est continue sur $[0{,}5; 1]$ et change de signe : l'équation a une solution dans $]0{,}5; 1[$.

C'est γ, car γ est la seule solution dans $]0, 1[$: le même raisonnement que dans l'activité « Encadrer α ».

Donc $0{,}5 < \gamma < 1$. L'intervalle a été coupé en deux : sa longueur passe de 1 à $0{,}5$.

La méthode

Méthode : Une étape de dichotomie

On sait que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution γ dans $]a, b[$, avec $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires.

1. **Milieu** : $m = \dfrac{a+b}{2}$.
2. **Signe** : calcule $f(m)$. Si $f(m) = 0$, alors $\gamma = m$ et c'est terminé.
3. **Choix** : garde la moitié où f **change de signe**.
4. **Recommence** avec le nouvel intervalle.

Exemple

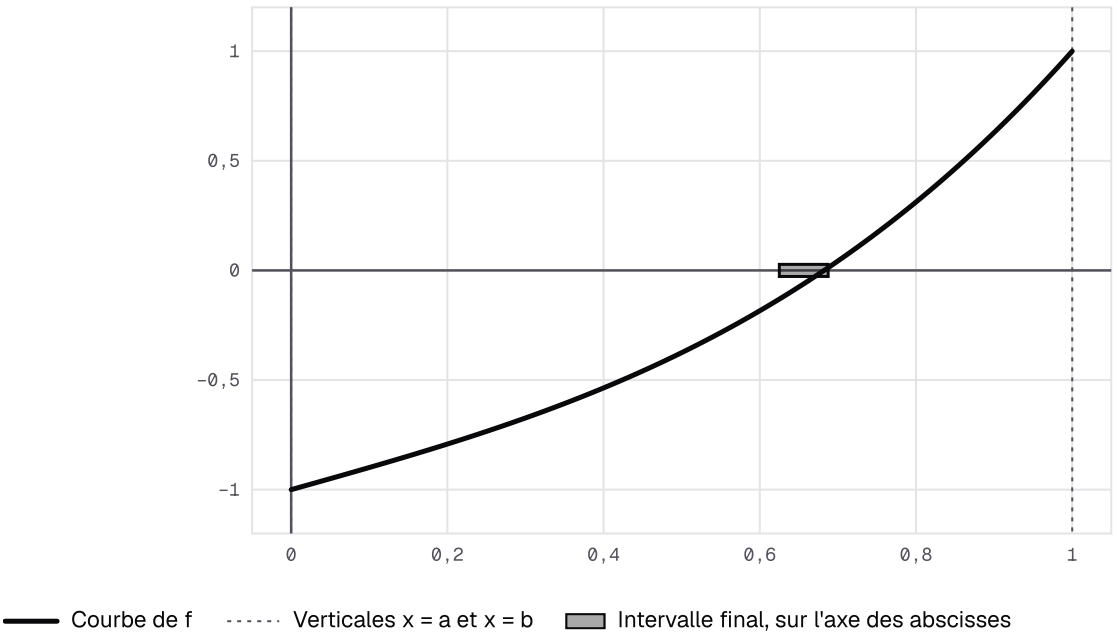
Exemple : x³ + x − 1 = 0 sur]0, 1[(guidé)

Même fonction $f : x \mapsto x^3 + x - 1$, avec $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$.

Étape	Intervalle	Milieu m	$f(m)$	Nouvel intervalle
1	$]0;1[$	$0{,}5$	$-0{,}375 < 0$	$]0{,}5;1[$
2	$]0{,}5;1[$	$0{,}75$	$\approx 0{,}172 > 0$	$]0{,}5;0{,}75[$
3	$]0{,}5;0{,}75[$	$0{,}625$	$\approx -0{,}131 < 0$	$]0{,}625;0{,}75[$
4	$]0{,}625;0{,}75[$	$0{,}6875$	$\approx 0{,}012 > 0$	$]0{,}625;0{,}6875[$

Après 4 étapes : $0{,}625 < \gamma < 0{,}6875$.

Chaque étape divise la longueur par 2 : ici, $\dfrac{1}{2^4} = 0{,}0625$.



Intervalles successifs, bornes arrondies vers l'extérieur

Étape	Intervalle	Milieu m	Signe de f(m)
1	[0,0000 ; 1,0000]	m ≈ 0,5000	négatif (–)
2	[0,5000 ; 1,0000]	m ≈ 0,7500	positif (+)
3	[0,5000 ; 0,7500]	m ≈ 0,6250	négatif (–)
4	[0,6250 ; 0,7500]	m ≈ 0,6875	positif (+)

Quatre étapes de dichotomie pour x³ + x − 1 = 0 sur [0, 1] : chaque intervalle est la moitié du précédent.

a = 0, b = 1.

Une racine de f appartient à l'intervalle [0,6250 ; 0,6875].

À toi

À toi : Combien d'étapes ?

En partant de $]0,1[$, combien d'étapes de dichotomie faut-il au moins pour obtenir un intervalle de longueur inférieure à $0{,}01$?

A. 50 étapes : on divise 100 par 2.

Faux.

Chaque étape divise la **longueur** de l'intervalle par 2 ; diviser 100 par 2 n'a pas de sens ici. Les longueurs s'enchaînent : $\frac{1}{2}$, puis $\frac{1}{4}$, puis $\frac{1}{8}$…

B. 6 étapes : $2^6 = 64$ est proche de 100.

Faux.

Après 6 étapes, la longueur vaut $\frac{1}{64} \approx 0{,}0156$: encore plus que $0{,}01$. Il faut 2^n **plus grand** que 100.

C. 100 étapes : on avance de $0{,}01$ à chaque essai.

Faux.

Ça, c'est essayer $0{,}01$, $0{,}02$, $0{,}03$… un par un. La dichotomie coupe l'intervalle en deux à chaque étape : elle va bien plus vite.

D. 7 étapes : $2^7 = 128$ dépasse 100.

Juste.

Après 7 étapes, la longueur vaut $\frac{1}{128} \approx 0{,}0078 < 0{,}01$. Après 6, ce n'était pas encore assez.

Indice 1

Après n étapes, quelle est la longueur de l'intervalle ? Dans l'exemple, après 4 étapes, elle vaut $\frac{1}{2^4}$.

Indice 2

Il faut $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{100}$, c'est-à-dire $2^n > 100$. Calcule 2^6, puis 2^7.

Correction

Réponse : 7. Après n étapes, la longueur vaut $\frac{1}{2^n}$. Il faut :

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{100},$$

c'est-à-dire $2^n > 100$. Or $2^6 = 64$ et $2^7 = 128$.

Comme le jeu du nombre entre 1 et 100 : 7 essais au plus.

Remarque : Et à l'examen ?

La dichotomie n'est apparue dans aucun des 12 sujets étudiés. On la garde, brièvement, pour comprendre comment on approche une solution.

Une question proche peut tomber : « Vérifier que $1{,}1 < \alpha < 1{,}2$ », avec le α de $x^3 + 3x - 5 = 0$. Tu sais déjà y répondre : c'est l'activité « Encadrer α » de la section précédente.

La machine à l'envers : bijection et fonction réciproque

Une marche arrière

Avec ton ami, vous avez un code secret : chaque lettre est remplacée par la suivante (A devient B). Pour lire ton message, il recule d'une lettre. Ce code a une **marche arrière**. Un mixeur, lui, n'en a pas : impossible de retrouver la banane dans le jus.

Certaines fonctions ont une marche arrière : on retrouve toujours l'entrée à partir de la sortie. C'est la **fonction réciproque**, notée f^{-1} : ce n'est pas $\frac{1}{f}$.

Exemple : la fonction $f : x \mapsto 2x + 1$ transforme 3 en 7. La machine à l'envers reçoit 7 et rend 3 : elle enlève 1, puis divise par 2.

Objectif : la question d'examen « f admet une réciproque sur un intervalle J à déterminer ».

Devine : Retrouver l'entrée

Une autre machine : la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2$. Elle affiche 4. Peux-tu retrouver **avec certitude** le nombre qu'on y a mis, et pourquoi ?

A. Oui : c'est 2, car $2^2 = 4$.

Faux.
2 convient, mais $(-2)^2 = 4$ aussi. Deux entrées donnent la même sortie : impossible de savoir laquelle.

B. Oui : c'est $\sqrt{4} = 2$, car la racine défait le carré.

Faux.
$\sqrt{4}$ donne seulement l'entrée **positive**. L'entrée -2 donne aussi 4 : sur $\mathbb{R}$ tout entier, la racine ne défait pas le carré.

C. Non : 2 et -2 donnent tous les deux 4.

Juste.
Comme le mixeur : la sortie ne dit pas d'où l'on vient. Sur $\mathbb{R}$, g descend puis remonte, et prend deux fois la valeur 4.

D. Oui : c'est 2, car g est continue sur $\mathbb{R}$.

Faux.
La continuité sur un intervalle garantit que les valeurs intermédiaires sont atteintes, pas qu'elles le sont une seule fois. Ici, 4 est atteint deux fois.

Correction

> **Non.** $g(2) = 4$ et $g(-2) = 4$: la sortie 4 vient de deux entrées. La machine g n'a pas de marche arrière sur $\mathbb{R}$.
>
> Limite maintenant les entrées à $[0, +\infty[$. Là, g est strictement croissante : elle ne prend jamais deux fois la même valeur. La sortie 4 vient d'une seule entrée, 2.
>
> C'est l'idée de l'énoncé exact juste en dessous : **continue et strictement monotone**, et la marche arrière existe.

Bijection

Théorème : Bijection

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et $J = f(I)$.

Alors f est une **bijection** de I sur J : pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans I.

En clair. Si f est continue et strictement monotone sur I, chaque valeur de $J = f(I)$ est atteinte **une fois et une seule**. Pas d'hésitation pour revenir en arrière : c'est une **bijection**. Pour chaque sortie, il y a une seule entrée possible.

La machine $g : x \mapsto x^2$, elle, n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$: la sortie 4 a deux entrées.

Exemple : La machine 2x + 1

La fonction $f : x \mapsto 2x + 1$ est continue et strictement croissante sur $I = \mathbb{R}$, car $f'(x) = 2 > 0$. Ici, $J = \mathbb{R}$.

Pour la sortie 7, l'équation $2x + 1 = 7$ a une seule solution : $x = 3$.

La fonction réciproque

Définition : Fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et $J = f(I)$.

La **fonction réciproque** de f, notée f^{-1}, est la fonction définie sur J qui associe à chaque $x \in J$ l'unique $y \in I$ tel que $f(y) = x$. Ainsi :

$$\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \iff \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

En particulier, $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ pour tout $x \in I$, et $f\big(f^{-1}(y)\big) = y$ pour tout $y \in J$.

En clair. Dans ce cadre, x désigne l'entrée de f^{-1}, donc une valeur de J ; y est le nombre de I qu'on retrouve. Les rôles habituels sont échangés : ici, x est une **sortie** de f, et y une **entrée**.

Retiens : $f^{-1}(7) = 3$ veut dire $f(3) = 7$. La machine à l'envers, c'est tout.

À toi : La formule de la machine à l'envers

Pour la fonction $f : x \mapsto 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$, on a $J = \mathbb{R}$. Exprime $f^{-1}(x)$ pour tout réel x. Écris ta réponse sur ta feuille, puis vérifie avec la solution.

Ce calcul n'a été relevé dans aucun des 12 sujets étudiés : il sert à comprendre la définition.

Indice 1
D'après la définition, $y = f^{-1}(x)$ veut dire $f(y) = x$. Écris cette équation avec $f(y) = 2y + 1$.
Indice 2
Dans $2y + 1 = x$, isole y : enlève 1, puis divise par 2.

Réponse
Soit x et y deux réels :

$$\begin{aligned} y = f^{-1}(x) &\iff f(y) = x \\ &\iff 2y + 1 = x \\ &\iff y = \frac{x - 1}{2} \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}.$$

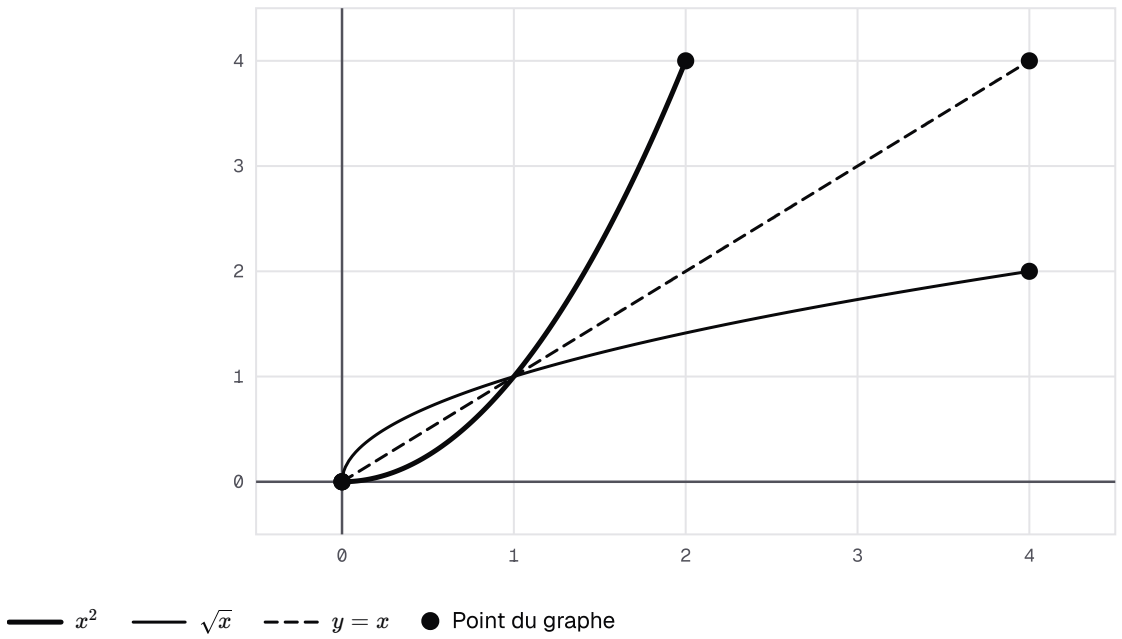
Vérifie : $f^{-1}(7) = \dfrac{7 - 1}{2} = 3$, et $f(3) = 7$. C'est la machine de l'accroche : elle enlève 1, puis divise par 2.

Trois propriétés

Propriété : Propriétés de la fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et $J = f(I)$.

1. f^{-1} est continue sur J.
2. f^{-1} est strictement monotone sur J, de même sens de variation que f.
3. Dans un repère orthonormé, les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Les courbes de x ↦ x² sur [0, 2] et de sa réciproque x ↦ √x sur [0, 4] sont symétriques par rapport à la droite y = x, comme dans un miroir.

En clair. Trois choses à retenir : f^{-1} est continue, elle a **le même sens de variation** que f, et sa courbe est le **reflet** de celle de f dans le miroir $y = x$.

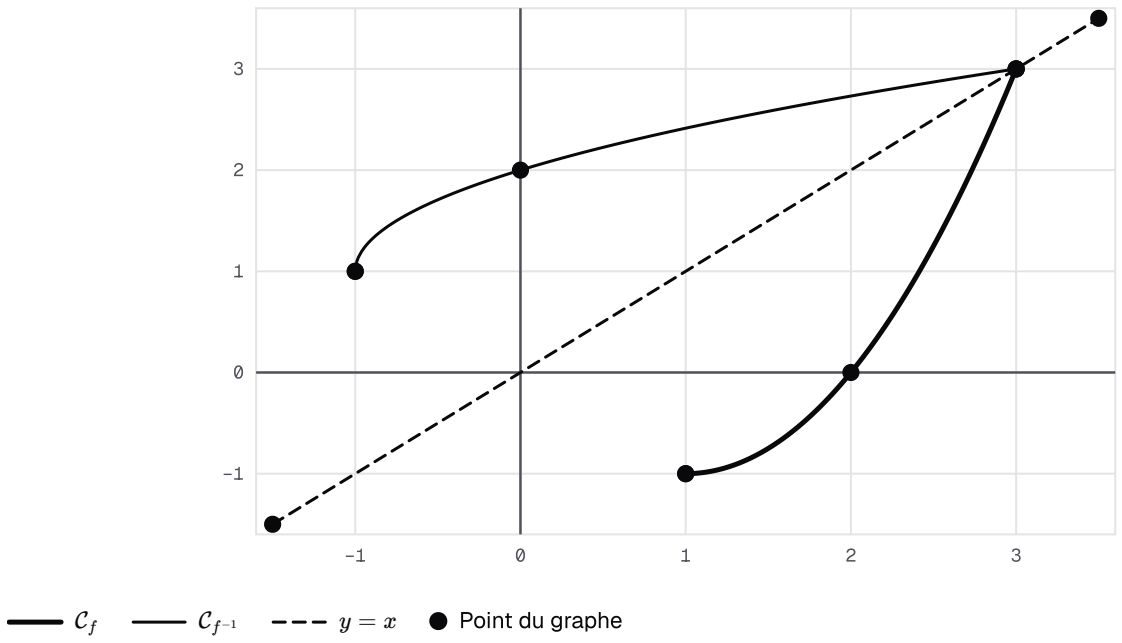
Tracer la courbe de la réciproque

Méthode : Tracer la courbe de f⁻¹

Dans un repère **orthonormé** : trace la droite $y = x$, prends des points (a, b) de la courbe de f, place leurs reflets (b, a), et relie.

Prenons $f : x \mapsto x^2 - 2x$ sur $[1, +\infty[$, qui admet une réciproque (tu le montreras dans la section suivante). Le point $(1, -1)$ devient $(-1, 1)$, $(2, 0)$ devient $(0, 2)$, et $(3, 3)$ ne bouge pas.

La tangente horizontale en $(1, -1)$ devient **verticale** en $(-1, 1)$.



La courbe de f(x) = x² − 2x sur [1, 3] et celle de sa réciproque, reflets l'une de l'autre dans le miroir y = x : (1, −1) ↔ (−1, 1), (2, 0) ↔ (0, 2), (3, 3) reste en place.

La machine à l'envers : méthode, exemple, au bac

La méthode en quatre étapes

Méthode : Réciproque sur J à déterminer

1. **Continuité** : justifie que f est continue sur I.
2. **Stricte monotonie** : signe de f', ou tableau de variations.
3. **Conclusion** : f admet une réciproque f^{-1} définie sur $J = f(I)$.
4. **Calcul de** J : lis J sur le tableau, comme dans la section « Image d'un intervalle ». Crochet fermé pour une valeur atteinte, ouvert pour une limite ou pour $\pm\infty$. On écrit de la plus petite à la plus grande valeur : si f décroît, l'ordre des bornes s'inverse.

Variations de f(x) = x² − 2x sur [1, +∞[: f croît de −1 vers +∞.

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$	-1	↗	$+\infty$

Exemple : x² − 2x sur [1, +∞[(guidé)

Soit f la fonction définie sur $I = [1, +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2x$.

1. **Continuité** : polynôme, donc continue sur I.
2. **Stricte monotonie** : f est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 2x - 2 \geq 0$, avec égalité seulement en $x = 1$: f est strictement croissante sur I.
3. **Conclusion** : f admet une réciproque définie sur $J = f(I)$.
4. **Calcul de** J : $f(1) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Écris J : à toi de le choisir, juste en dessous.

Vérifie : Le bon intervalle J

Pour la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2x$ sur $I = [1, +\infty[$, quel est l'intervalle $J = f(I)$, et pourquoi ?

A. $J =]-1, +\infty[$, car f part de -1 et monte.
Faux.
$-1 = f(1)$ est **atteint**, puisque 1 appartient à I : le crochet est fermé en -1.

B. $J = [-1, +\infty[$: -1 est atteint en 1, $+\infty$ est une limite.
Juste.
Crochet fermé là où la valeur est atteinte, ouvert du côté de l'infini.

C. $J = [1, +\infty[$, car f est définie sur cet intervalle.
Faux.
C'est I, l'ensemble des **entrées**. J rassemble les **valeurs** $f(x)$: on le lit sur la ligne de f du tableau.

D. $J = [-1, +\infty]$, car f prend toutes les valeurs de -1 à $+\infty$.
Faux.
$+\infty$ n'est pas un nombre : f ne le prend jamais. Une borne infinie est toujours ouverte.

Correction
f est continue et strictement croissante sur I. Donc J va de $f(1)$ à la limite en $+\infty$:

$$\begin{aligned} J &= \left[f(1), \lim_{x \to +\infty} f(x) \right[\\ &= [-1, +\infty[\end{aligned}$$

Le crochet est fermé en -1, valeur atteinte en $1 \in I$. Il est ouvert en $+\infty$, qui n'est qu'une limite.

Rédiger comme au bac

Méthode : Coin examen : réciproque sur J

Rédaction modèle, pour la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2x$ sur $I = [1, +\infty[$:

> f est continue sur I (polynôme). f est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 2x - 2 \geq 0$, avec égalité seulement en $x = 1$: f est strictement croissante sur I. Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle $J = f(I)$. On a $J = [f(1), \lim_{x \to +\infty} f(x)[= [-1, +\infty[$.

Si on te le demande : le sens de variation de f^{-1} est le même que celui de f, donc strictement croissante sur J.

Barème relevé : $0{,}5$ à $0{,}75$ point. L'expression de $f^{-1}(x)$ n'a été demandée dans aucun sujet étudié.

À toi

À toi : Un cas décroissant, à compléter

Soit f la fonction définie sur $I = [0, +\infty[$ par $f(x) = 2 - \sqrt{x}$. Les trois premières étapes sont faites.

1. **Continuité** : différence de deux fonctions continues sur I.
2. **Stricte monotonie** : $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur I, donc f est strictement décroissante sur I.
3. **Conclusion** : f admet une réciproque définie sur $J = f(I)$.

Écris l'étape 4 (calcul de J) sur ta feuille, et donne le sens de variation de f^{-1}. Puis vérifie avec la solution.

Indice 1
Comme dans l'exemple guidé : calcule l'image de la borne 0, puis la limite en $+\infty$.
Indice 2
$f(0) = 2 - 0 = 2$. Quand x tend vers $+\infty$, $\sqrt{x}$ tend vers $+\infty$, donc $2 - \sqrt{x}$ tend vers $-\infty$.
Indice 3
f décroît : ses valeurs vont de 2, atteint en 0, vers $-\infty$. Écris J avec la plus petite borne à gauche.

Réponse
4. **Calcul de J** : $f(0) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. Comme f décroît, $-\infty$ passe à gauche : $J =]-\infty, 2]$. Le crochet est fermé en 2, valeur atteinte en 0.

f^{-1} a le même sens de variation que f : elle est strictement décroissante sur J.

Vérifie ta copie : la valeur $f(0) = 2$; la limite $-\infty$; les bornes dans l'ordre, $-\infty$ à gauche ; le crochet fermé en 2 ; « strictement décroissante » pour f^{-1}.

À toi : Deux bornes ouvertes

Soit f la fonction définie sur $I =]-1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$. Montre que f admet une réciproque sur un intervalle J à déterminer.

Rédige sur ta feuille, puis vérifie avec la solution.

Indice 1

Petit rappel. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Calcule $f'(x)$, puis cherche son signe sur I.

Indice 2

En -1^+, le numérateur tend vers -3 et le dénominateur vers 0^+. Un quotient « $\frac{-3}{0^+}$ » tend vers $-\infty$.

Indice 3

À l'infini, une fraction rationnelle se comporte comme le quotient de ses termes de plus haut degré, ici $\frac{2x}{x}$. Les deux bornes de J sont-elles atteintes ?

Réponse

Continuité. f est rationnelle, définie sur I, donc continue sur I.

Stricte monotonie. f est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} & f'(x) \\ &= \frac{2(x+1) - (2x-1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{3}{(x+1)^2} > 0 \end{aligned}$$

Donc f est strictement croissante sur I.

Conclusion. f admet une réciproque f^{-1} définie sur $J = f(I)$.

Calcul de J. D'une part, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$. D'autre part, par la limite du quotient des termes de plus haut degré :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Deux limites, jamais atteintes : $J =]-\infty, 2[$.

Vérifie ta copie : la dérivée du quotient et son signe ; « strictement croissante » ; les deux limites ; deux crochets ouverts.

Le tableau et trois pièges

Variations de f(x) = (2x − 1)/(x + 1) sur]−1, +∞[: f croît de −∞ vers 2. Les deux extrémités sont des limites, jamais atteintes.

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2

Attention : Trois pièges

✗ Faux	✓ Juste
$f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$	f^{-1} **défait** f. Pour $2x+1$: $f^{-1}(7) = 3$, alors que $\dfrac{1}{f(7)} = \dfrac{1}{15}$.
« f croît, donc f^{-1} décroît. »	**Même sens** : sur $[0, +\infty[$, x^2 et $\sqrt{x}$ montent toutes les deux.
Prendre $J = I$.	$J = f(I)$: ce sont les **valeurs** de f.

Bonus : la formule de la réciproque

À toi : Bonus : l'expression de la réciproque

Pour la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2x$ sur $I = [1, +\infty[$, on a $J = [-1, +\infty[$. Exprime $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Bonus : ce calcul n'a été demandé dans aucun des 12 sujets étudiés. Il explique la courbe de la réciproque tracée dans la section précédente.

Indice 1
Écris l'équation de la définition : $y = f^{-1}(x)$ veut dire $y^2 - 2y = x$, avec $y \in I$, donc $y \geq 1$.
Indice 2
Fais apparaître un carré : $y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1$. L'équation devient $(y-1)^2 = x + 1$.
Indice 3
Deux nombres ont pour carré $x+1$: $\sqrt{x+1}$ et $-\sqrt{x+1}$. Comme $y \geq 1$, quel est le signe de $y - 1$?

Réponse
Soit $x \in J$: alors $x + 1 \geq 0$. Pour $y \in I$:

$$\begin{aligned} & f(y) = x \\ \iff\ & y^2 - 2y = x \\ \iff\ & (y-1)^2 = x + 1 \\ \iff\ & y - 1 = \sqrt{x+1} \end{aligned}$$

La dernière équivalence vient de $y - 1 \geq 0$: on garde la racine **positive**, et $y - 1 = -\sqrt{x+1}$ est écarté. Donc, pour tout $x \in [-1, +\infty[$:

$$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+1}$$

Vérifie : $f^{-1}(-1) = 1$ et $f(1) = -1$; $f^{-1}(0) = 2$ et $f(2) = 0$; $f^{-1}(3) = 1 + 2 = 3$. Ce sont les points de la courbe tracée.

Le mot du prof. Avec cette section et celle sur l'unique solution, tu couvres les deux questions phares du chapitre. Le reste, c'est du calcul.

Racine n-ième

Observe

Tu sais que $\sqrt{9} = 3$, car $3^2 = 9$. Même jeu, avec le cube : quel nombre positif, élevé au cube, donne 8 ? C'est 2, car $2 \times 2 \times 2 = 8$. On écrit $\sqrt[3]{8} = 2$: la **racine cubique** de 8.

Objectif : calculer et simplifier ces racines. Ici, c'est du calcul pur, sans piège de rédaction. Non relevé dans les 12 sujets étudiés.

À toi : La racine cubique de 27

Même jeu : quel nombre positif, élevé au cube, donne 27 ? Autrement dit, que vaut $\sqrt[3]{27}$, et pourquoi ?

A. 9, car $27 \div 3 = 9$.

Faux.
Le petit 3 ne divise pas : il dit « cube ». Or $9^3 = 729$, pas 27.

B. Environ $5{,}2$, car $\sqrt{27} \approx 5{,}2$.

Faux.
$\sqrt{27}$ est la racine **carrée** : $5{,}2^2 \approx 27$. Mais $5{,}2^3 \approx 140{,}6$. Ici, on cherche un cube.

C. 3, car $3^3 = 27$.

Juste.
$3 \times 3 \times 3 = 9 \times 3 = 27$. On a cherché un nombre, on n'a rien divisé.

D. 81, car $27 \times 3 = 81$.

Faux.
Le cube de 81 est énorme. Le nombre cherché, élevé au cube, doit **redonner** 27 : il est plus petit que 27.

Correction
$\sqrt[3]{27} = 3$, car $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$, et $3 \geq 0$.

Le petit nombre au-dessus de la racine dit **quelle puissance** il faut défaire : 2 pour le carré, 3 pour le cube, 4, 5… C'est la **racine n-ième**.

Définition

Définition : Racine n-ième

Soit n un entier naturel non nul. La fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

Sa fonction réciproque est appelée **fonction racine n-ième** et notée $x \mapsto \sqrt[n]{x}$. Pour tous réels positifs x et y :

$$\sqrt[n]{x} = y \iff y^n = x.$$

En particulier $\sqrt[1]{x} = x$ et $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$.

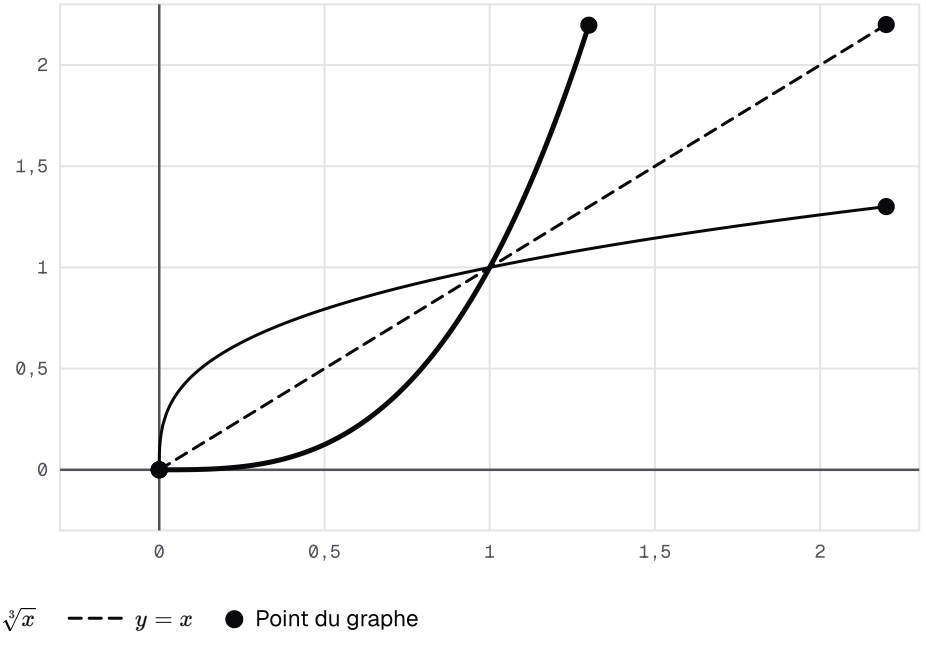
En clair. Pour $x \geq 0$, $\sqrt[n]{x}$ est **le nombre positif** qui, élevé à la puissance n, redonne x. Pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$:

$$\sqrt[n]{x} = y \iff y^n = x.$$

C'est la machine à l'envers de $x \mapsto x^n$.

Exemple : Plusieurs cas, guidés

1. $\sqrt[3]{8} = 2$, car $2^3 = 8$.
2. $\sqrt[4]{81} = 3$, car $3^4 = 81$.
3. $\sqrt[5]{32} = 2$, car $2^5 = 32$.
4. $\sqrt[3]{2}$ n'est pas « rond » : la calculatrice donne $\approx 1{,}26$.



x ↦ x³ et x ↦ ∛x sur [0, +∞[: deux fonctions croissantes, reflets l'une de l'autre dans le miroir y = x.

Règles de calcul

Propriété : Règles de calcul sur les racines n-ièmes

Soit n et p deux entiers naturels non nuls, et x, y deux réels positifs.

- $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$ et $\sqrt[n]{x^n} = x$.

- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \iff x = y$ et $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \iff x < y$.
- $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$ et, si $y > 0$, $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$.
- $\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[np]{x}$, $\left(\sqrt[n]{x}\right)^p = \sqrt[n]{x^p}$ et $\sqrt[np]{x^p} = \sqrt[n]{x}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

Exemple : Utiliser les règles (guidé)

1. **Produit** : $\sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{64} = 4$.
2. **Quotient** : $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$.
3. **Comparer** $\sqrt[3]{3}$ et $\sqrt[4]{5}$: on élève les deux à la puissance 12.

$$\left(\sqrt[3]{3}\right)^{12} = 3^4 = 81$$
$$\left(\sqrt[4]{5}\right)^{12} = 5^3 = 125$$

Les deux nombres sont positifs et $t \mapsto t^{12}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$: l'ordre est gardé. Comme $81 < 125$, $\sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}$.

À toi : calculer

Calcule $\sqrt[4]{16}$, puis $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4}$. Écris tes réponses, puis vérifie.

Indice 1
Pour $\sqrt[4]{16}$, cherche le nombre positif y tel que $y^4 = 16$. Pour le produit, une règle de l'énoncé regroupe deux racines de même indice.

Indice 2
$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \times 4}$. Quel nombre a pour cube 8 ?

Réponse
$\sqrt[4]{16} = 2$, car $2^4 = 16$.

Et $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} = 2$, car $2^3 = 8$.

Seul, $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$ n'est pas « rond ». Regrouper sous une seule racine donne un résultat exact.

Attention : L'erreur la plus populaire

✗ Faux	✓ Juste
$\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$	$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$. Aucune règle pour une **somme**.

✗ Faux	✓ Juste
Écrire $\sqrt[3]{-8}$	Dans ce cours, $\sqrt[n]{x}$ n'a de sens que pour $x \geq 0$.

La première est l'erreur la plus répandue de tout le lycée. Retiens : une racine ne se découpe pas sur une somme.

Puissances rationnelles

Observe

Dernière ligne droite. Tu sais calculer $8^2 = 64$ ou $8^{-1} = \dfrac{1}{8}$. Mais que veut dire $8^{\frac{1}{3}}$? On veut lui donner un sens, en gardant les règles des puissances que tu connais.

Non relevé dans les 12 sujets étudiés.

Devine : Que vaut 8 puissance un tiers ?

Tu connais la règle $(x^a)^b = x^{a \times b}$. Si on la garde, que doit valoir $8^{\frac{1}{3}}$?

A. 2, car son cube doit valoir $8^{\frac{1}{3} \times 3} = 8$.

Juste.

La règle impose $\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 8$. Le seul nombre positif dont le cube vaut 8, c'est 2.

B. $\dfrac{8}{3}$, car l'exposant $\dfrac{1}{3}$ divise par 3.

Faux.

Un exposant ne multiplie pas et ne divise pas. D'ailleurs, $\left(\dfrac{8}{3}\right)^3 = \dfrac{512}{27} \approx 19$, pas 8.

C. $\sqrt{8} \approx 2{,}83$, car un exposant fractionnaire donne une racine.

Faux.

Une racine, oui, mais pas la racine carrée : $\left(\sqrt{8}\right)^3 \approx 22{,}6$, pas 8. La racine carrée correspondra à l'exposant $\dfrac{1}{2}$.

D. $\dfrac{1}{512}$, car $8^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{8^3}$.

Faux.

$\dfrac{1}{8^3}$, c'est 8^{-3} : un exposant **négatif** donne un inverse. Ici, l'exposant $\dfrac{1}{3}$ est positif.

Indice 1

Élève $8^{\frac{1}{3}}$ au cube, avec la règle : quel exposant obtiens-tu ?

Correction

Avec la règle :

$$\begin{aligned}\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^3 &= 8^{\frac{1}{3} \times 3} \\ &= 8^1 = 8\end{aligned}$$

> Donc $8^{\frac{1}{3}}$ est le nombre positif dont le cube vaut 8 : $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$.
>
> Pas de magie : juste de la cohérence.

Définition

Définition : Puissance rationnelle d'un réel strictement positif

Soit x un réel strictement positif et r un rationnel non nul, écrit $r = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

On pose $x^r = \sqrt[q]{x^p}$. Ce réel ne dépend pas de l'écriture choisie pour r.

En particulier, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

En clair.

- Le **dénominateur** donne la **racine** : $x^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x}$.
- Le **numérateur** donne la **puissance** : $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$, et pour $p > 0$, $x^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{x})^p$.
- Toujours avec $x > 0$.

Exemple : Plusieurs cas, guidés

1. $27^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$.
2. $16^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = 8$.
3. $8^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$.

Règles de calcul

Propriété : Règles de calcul sur les puissances rationnelles

Soit x et y deux réels strictement positifs, et r, r' deux rationnels non nuls. Avec la convention $x^0 = 1$:

- $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$ et $\dfrac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$;
- $\left(x^r\right)^{r'} = x^{rr'}$;
- $(xy)^r = x^r\, y^r$ et $\left(\dfrac{x}{y}\right)^r = \dfrac{x^r}{y^r}$;
- $x^{-r} = \dfrac{1}{x^r}$.

Exemple : simplifier (guidé)

Astuce : écris chaque base comme une puissance d'un petit nombre ($27 = 3^3$, $9 = 3^2$, $8 = 2^3$, $4 = 2^2$), puis multiplie les exposants.

$$\begin{aligned} A &= 27^{\frac{2}{3}} \times 9^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(3^3\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(3^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 3^2 \times 3^{-1} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{8^{\frac{2}{3}} \times 27^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(3^3\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(2^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{2^2 \times 3}{2} \\ &= 6 \end{aligned}$$

À toi : calculer

Calcule $4^{\frac{3}{2}}$, et écris $2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}}$ comme une puissance de 2. Écris tes réponses, puis vérifie.

Indice 1

Pour $4^{\frac{3}{2}}$: le dénominateur 2 donne la racine carrée, le numérateur 3 donne la puissance.

Indice 2

Pour le produit, même base : $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$. Calcule $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ au même dénominateur 6.

Réponse

$4^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 2^3 = 8$.

Et, comme $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$:

$$\begin{aligned} 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}} &= 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} \\ &= 2^{\frac{5}{6}} \end{aligned}$$

Trouve l'erreur : Un exposant ne multiplie pas

Un camarade a écrit :

$$64^{\frac{2}{3}} = 64 \times \frac{2}{3} = \frac{128}{3}$$

Quelle correction est juste ?

A. $64^{\frac{2}{3}} = \dfrac{64^2}{3}$: seul le 2 est un exposant.

Faux.

Le 3 ne divise pas : il donne une **racine cubique**.

B. $64^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{64}\right)^2 = 4^2 = 16$.

Juste.
Le dénominateur 3 donne la racine cubique, le numérateur 2 donne le carré.

C. $64^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt{64}\right)^3 = 8^3 = 512$.

Faux.
Tu as inversé les rôles. Le dénominateur, 3, donne la racine ; le numérateur, 2, donne la puissance.

D. $64^{\frac{2}{3}}$ n'existe pas, car $\dfrac{2}{3}$ n'est pas un entier.

Faux.
L'énoncé définit x^r pour tout rationnel r non nul, dès que $x > 0$. Et $64 > 0$.

Correction
Un exposant ne multiplie pas. Comme $4^3 = 64$:

$$\begin{aligned} 64^{\frac{2}{3}} &= \left(\sqrt[3]{64}\right)^2 \\ &= 4^2 = 16 \end{aligned}$$

Et non $\dfrac{128}{3}$.

Autre piège : écrire $(-8)^{\frac{1}{3}}$. Ici, $x^{\frac{p}{q}}$ n'est défini que pour $x > 0$.

Le mot du prof. C'est fini pour les notions. Tu as vu tout le chapitre. Il reste une fiche de révision pour l'examen, et un résumé.

Fiche examen : les questions qui reviennent

Méthode : Coin examen : ce chapitre au bac

Sur 12 sujets nationaux étudiés (sessions normale et rattrapage de 2016, 2017, 2018, 2020, 2023 et 2024), deux questions reviennent :

- « Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique solution** α dans $]a, b[$. » (dans 4 sujets)
- « Montrer que f admet une **fonction réciproque** définie sur un intervalle J à déterminer. » (dans 4 sujets)

La continuité sert aussi dans 6 sujets, pour la limite d'une **suite**. Aucune démonstration de cours n'a été demandée dans ces 12 sujets.

La veille du bac, c'est cette page qu'il faut relire : pour chacune de ces questions, les conditions à citer.

Méthode : Coin examen : unique solution α

Question. Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]a, b[$.

Les trois ingrédients : f continue sur $[a, b]$; f strictement monotone sur $[a, b]$; $f(a) \times f(b) < 0$.

Encadrer α (question possible, non relevée ; par exemple $1{,}1 < \alpha < 1{,}2$) : signes contraires de $f(1{,}1)$ et $f(1{,}2)$, **puis** « α est l'unique solution dans $]a, b[$, qui contient $]1{,}1; 1{,}2[$ ».

Méthode : Coin examen : fonction réciproque sur J

Question. Montrer que f admet une réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.

Les deux conditions : f continue et strictement monotone sur I. Puis $J = f(I)$, lu sur le tableau de variations.

Parfois ensuite : la courbe de f^{-1}, reflet de celle de f dans $y = x$ (1 sujet sur 12) ; le sens de variation de f^{-1}, le même que f. Le nombre dérivé de f^{-1} (4 sujets sur 12) se traite au chapitre Dérivation.

Vérifie : Quelle rédaction est complète ?

Soit f la fonction définie sur $I = [0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 + 1$. Question : « Montrer que f admet une réciproque définie sur un intervalle J à déterminer. » Quelle rédaction rapporte **tous** les points ?

A. f est continue sur I (polynôme). f est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 2x \geq 0$, avec égalité seulement en $x = 0$: f est strictement croissante sur I. Donc f admet une réciproque définie sur $J = I = [0, +\infty[$.

Faux.
J est l'ensemble des **valeurs** de f : $J = f(I)$, pas I. Ici, $f(x) \geq 1$ pour tout $x \in I$, donc $0 \notin J$.

B. f est continue sur I (polynôme). f est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 2x \geq 0$, avec égalité seulement en $x = 0$: f est strictement croissante sur I. Donc f admet une réciproque définie sur $J = f(I)$. Comme $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, on a $J =]1, +\infty[$.

Faux.
La valeur 1 est **atteinte**, en $x = 0$: $f(0) = 1$. Le crochet est donc fermé en 1.

C. f est continue sur I (polynôme). f est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 2x \geq 0$, avec égalité seulement en $x = 0$: f est strictement croissante sur I. Donc f admet une réciproque définie sur $J = f(I)$. Comme $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, on a $J = [1, +\infty[$.

Juste.
Les deux conditions sont justifiées, puis $J = f(I)$ est calculé avec le bon crochet.

D. f est continue sur I (polynôme), avec $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Donc f admet une réciproque définie sur $J = f(I) = [1, +\infty[$.

Faux.
Il manque la stricte monotonie. Sans elle, une valeur peut être atteinte deux fois : la fonction carré, sur $[-1, 1]$, prend la valeur 1 en -1 et en 1.

Correction

La rédaction complète :

> f est continue sur I (polynôme). f est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 2x \geq 0$, avec égalité seulement en $x = 0$: f est strictement croissante sur I. Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle $J = f(I)$. On a $J = [f(0), \lim_{x \to +\infty} f(x)[= [1, +\infty[$.

Trois réflexes : les **deux** conditions, $J = f(I)$ et pas I, un crochet fermé pour une valeur atteinte.

Deux autres situations utilisent ce chapitre, moins souvent.

Méthode : Coin examen : unique solution sur tout I

Question possible, non relevée dans les 12 sujets étudiés.

Pour $f(x) = 0$ sur un intervalle I qui n'est pas un segment, on écrit : « f est continue et strictement monotone sur I, donc c'est une bijection de I sur $J = f(I)$. Les valeurs ou limites aux bornes de I donnent J. Or $0 \in J$, donc l'équation admet une unique solution α dans I. »

Variante $f(x) = k$: on pose $g(x) = f(x) - k$ et on cherche les solutions de $g(x) = 0$.

Méthode : Coin examen : suites, plus tard dans l'année

Pour une suite définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$, on doit **citer** :

- f continue sur un intervalle fermé I ;
- $f(I) \subset I$ (intervalle **stable**) et $u_0 \in I$;
- la suite converge.

Alors sa limite ℓ est dans I et vérifie $f(\ell) = \ell$.

Exemple. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$, avec $I = [0, 2]$. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x + 2}$ est continue et croissante sur I, $f(I) = [\sqrt{2}, 2] \subset I$, et $u_0 = 1 \in I$.

Si l'on sait que (u_n) converge (chapitre Suites), sa limite vérifie $\sqrt{\ell + 2} = \ell$. En élevant au carré, $\ell^2 - \ell - 2 = 0$, soit $\ell = 2$ ou $\ell = -1$. Or $\ell \in I$, donc $\ell = 2$.

Synthèse

À retenir : Je retiens

1. **Continue en** a : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Par morceaux : la limite à gauche, $f(a)$ et la limite à droite sont égales.
2. Polynômes, fonctions rationnelles, $x \mapsto \sqrt{x}$, et leurs combinaisons : **continus sur chaque intervalle de leur ensemble de définition**. Une composée aussi, si les domaines s'emboîtent.

3. **Continue et strictement monotone** : l'image se lit sur le tableau de variations.
4. Sur $[a, b]$, **continue et signes contraires aux bornes** : au moins une solution. **Strictement monotone en plus** : une seule.
5. **Continue et strictement monotone** : une réciproque sur $J = f(I)$, de même sens de variation.

Racine n-ième

$$\sqrt[n]{x} = y \iff y^n = x \quad (x, y \geq 0)$$

Produit de racines

$$\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$$

Racine de racine

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[np]{x}$$

Puissance rationnelle

$$x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} \quad (x > 0)$$

Produit de puissances

$$x^r\, x^{r'} = x^{r+r'}$$

Puissance de puissance

$$(x^r)^{r'} = x^{rr'}$$

Remarque : Glossaire français : arabe

Français	Arabe
continuité	الاتصال
continue à droite, à gauche	متصلة على اليمين، على اليسار
prolongement par continuité	التمديد بالاتصال
intervalle, segment	مجال، قطعة
strictement monotone	رتيبة قطعا
strictement croissante, décroissante	تزايدية قطعا، تناقصية قطعا
théorème des valeurs intermédiaires	مبرهنة القيم الوسيطية
dichotomie	طريقة التفرع الثنائي
bijection	تقابل
fonction réciproque	الدالة العكسية
racine n-ième, racine cubique	الجذر من الرتبة n، الجذر المكعب
puissance rationnelle	القوة الجذرية
limite, dérivée	نهاية، المشتقة
tableau de variations	جدول التغيرات
image d'un intervalle	صورة مجال
solution unique, encadrer	حل وحيد، تأطير

Français	Arabe
composée de deux fonctions	مركب دالتين
polynôme, fonction rationnelle	حدودية، دالة جذرية
paramètre, intervalle stable	وسيط، مجال مستقر

Méthode : Avant l'examen, je sais…

- étudier la continuité en a d'une fonction par morceaux ;
- justifier en une phrase qu'une fonction est continue ;
- lire une image sur un tableau de variations, avec les bons crochets ;
- rédiger « unique solution α » avec les trois ingrédients ;
- rédiger « réciproque sur J » et calculer J ;
- calculer avec $\sqrt[n]{x}$ et $x^{\frac{p}{q}}$.

Le mot du prof. Si tu coches les six lignes, ce chapitre ne te fera plus peur au bac. Et si une ligne résiste, reviens à sa section : l'exemple guidé est fait pour être relu. Bon courage, on se retrouve au prochain chapitre.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Continuité » (2bac · sciences-experimentales · mathematiques)