BURHAN

Calcul intégral : fiche de révision

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/calcul-integral/resume

Chapitre	Semestre
Calcul intégral	Semestre 2

L'essentiel du chapitre

> **À retenir : Six réflexes**
>
> - **La continuité d'abord** : tu n'écris $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ que si f est continue sur le segment d'extrémités a et b, en entier.
> - **Une seule primitive suffit** : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, et le résultat ne change pas avec la primitive F choisie.
> - **Une primitive donnée se dérive** : pour prouver que H est une primitive de h, calcule H' et retrouve h.
> - **Parties** : dérive le facteur qui se simplifie, le polynôme face à e^{kx}, et $\ln x$ face à un polynôme.
> - **Une intégrale n'est pas une aire** : elle peut être négative ; une aire s'obtient avec « dessus moins dessous ».
> - **L'unité en dernier** : l'intégrale donne des unités d'aire ; multiplie par $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$ pour obtenir des cm².

Repères pour choisir la bonne idée.

Si tu vois…	pense à…
un polynôme, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$	primitives usuelles, terme à terme
e^{ax+b} avec $a \neq 0$	$\frac{1}{a}e^{ax+b}$, sans oublier le facteur $\frac{1}{a}$
un quotient $\frac{u'}{u}$	$\ln \lvert u \rvert$, si u ne s'annule pas sur le segment
un produit $u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
« montrer que H est une primitive de h »	dériver H, puis $H(b) - H(a)$
polynôme fois e^{kx}, ou fois $\ln x$	intégration par parties
« aire du domaine »	position relative, puis la bonne différence
« en cm² »	multiplier par l'aire d'une unité, en cm²

L'intégrale par une primitive

Pour obtenir $\int_0^1 \left(4x^3 - 2x + 1\right)\mathrm{d}x$, cherche une fonction dont la dérivée est $x \mapsto 4x^3 - 2x + 1$. La fonction F définie par $F(x) = x^4 - x^2 + x$ convient.

L'intégrale vaut alors $F(1) - F(0) = 1 - 0 = 1$.

Toute l'idée du chapitre tient dans ce calcul ; les énoncés qui suivent la rendent précise.

Définition : Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I, et F une primitive de f sur I. Le réel $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive F choisie : on l'appelle **intégrale de f de a à b**, et on note :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Propriété : Conventions et variable muette

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b deux éléments de I. Alors :

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

et

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

La variable d'intégration est muette : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème : L'intégrale comme fonction de sa borne supérieure

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un élément de I. La fonction φ définie sur I par

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est la primitive de f sur I qui s'annule en a : $\varphi(a) = 0$ et $\varphi'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

En particulier, si g est dérivable sur I et si g' est continue sur I, alors $\int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}x = g(b) - g(a)$ pour tous a, b de I.

Rappel : puissance, n entier naturel

$$x^n \longmapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Inverse, sur]0, +∞[

$$\frac{1}{x} \longmapsto \ln x$$

Inverse du carré, sur]0, +∞[ou sur]−∞, 0[

$$\frac{1}{x^2} \longmapsto -\frac{1}{x}$$

Inverse de la racine carrée, sur]0, +∞[

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \longmapsto 2\sqrt{x}$$

Exponentielle d'une fonction affine, a non nul

$$e^{ax+b} \longmapsto \frac{1}{a}e^{ax+b}$$

Forme u'uⁿ, n entier naturel

$$u'u^n \longmapsto \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

Forme u'/u, u sans zéro sur l'intervalle

$$\frac{u'}{u} \longmapsto \ln|u|$$

Forme u'eᵘ

$$u'e^u \longmapsto e^u$$

Remarque : D'où viennent ces primitives ?

Chacune vient d'un chapitre déjà vu, ou de ce chapitre.

Les fonctions puissances, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ et la forme $u'u^n$ relèvent du chapitre « Fonctions primitives » ; $\frac{1}{x}$ et la forme $\frac{u'}{u}$ du chapitre « Logarithmes ».

La forme $u'e^u$, et avec elle e^{ax+b}, découle de la dérivée de e^u (chapitre « Exponentielles ») et de la définition d'une primitive : le cours de ce chapitre la justifie.

Retiens : une primitive de $u'e^u$ est e^u. Dans le doute, dérive ta primitive.

Méthode : calculer une intégrale

1. Contrôle que la fonction reste continue d'un bout à l'autre du segment.
2. Repère la forme : somme de fonctions usuelles, e^{ax+b}, $u'u^n$, $\frac{u'}{u}$ ou $u'e^u$.
3. Écris le crochet, puis « valeur en haut moins valeur en bas », la seconde entre parenthèses.
4. Donne la valeur exacte ; une valeur approchée vient seulement si on te la demande.

Exemple : quatre formes, quatre primitives

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{3x}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{e^{3x}}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{e^3-1}{3}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \left[2\sqrt{x}\right]_1^4 \\ &= 4-2=2.\end{aligned}$$

Pour la troisième, $x^2+3>0$ pour tout réel x : pas besoin de valeur absolue.

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{2x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\ln\left(x^2+3\right)\right]_0^1 \\ &= \ln 4 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Pour la quatrième, $u : x \mapsto x^2 + x$, de dérivée $u' : x \mapsto 2x + 1$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 (2x+1)\left(x^2+x\right)^2 \mathrm{d}x &= \left[\frac{\left(x^2+x\right)^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Quand l'énoncé donne la primitive

Méthode : dériver, conclure, intégrer

1. Dérive H sur l'intervalle donné, avec les règles de dérivation habituelles.
2. Simplifie jusqu'à retrouver $h(x)$, puis conclus : $H'(x) = h(x)$ pour tout x de l'intervalle, donc H est une primitive de h.
3. Pour l'intégrale demandée ensuite, sers-toi de cette H : $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = H(b) - H(a)$.

Ne tente pas de primitiver h toi-même : la dérivation suffit, et c'est elle qu'on attend.

Exemple : une primitive à contrôler

Soit h et H les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = \ln x + 1$ et $H(x) = x \ln x$. Par la dérivée d'un produit, pour tout $x > 0$:

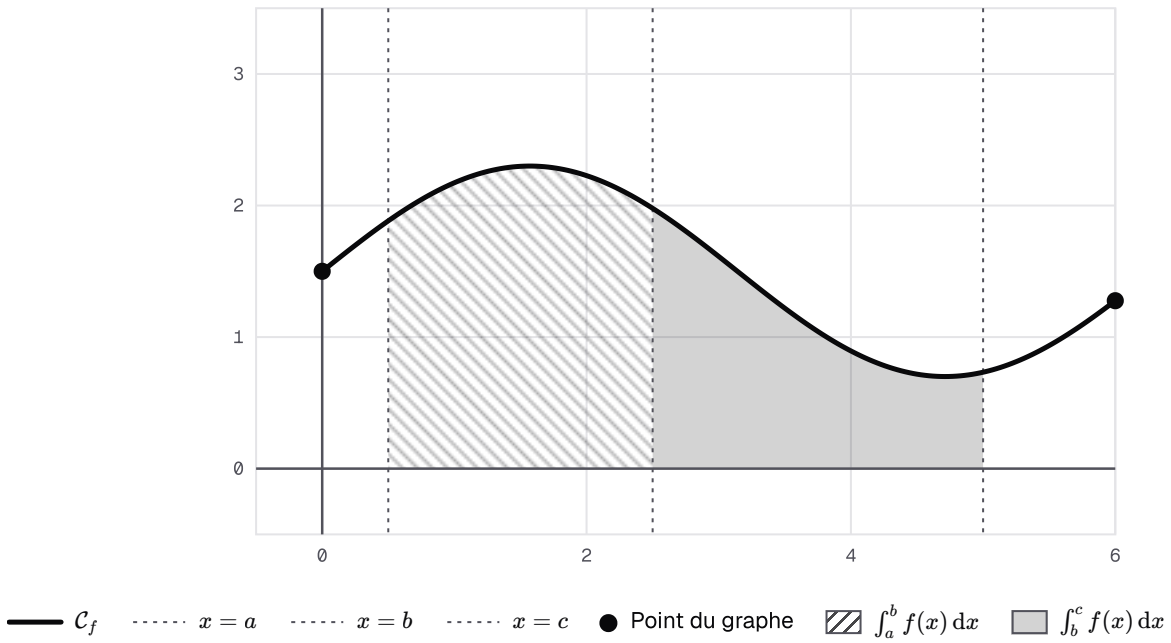
$$\begin{aligned}H'(x) &= 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} \\ &= \ln x + 1 = h(x).\end{aligned}$$

Donc H est une primitive de h sur $]0, +\infty[$, et :

$$\begin{aligned}\int_1^e (\ln x + 1)\,\mathrm{d}x &= H(e) - H(1) \\ &= e \ln e - 1 \times \ln 1 \\ &= e.\end{aligned}$$

Propriétés de l'intégrale

Une intégrale se découpe, se combine et se compare. Pour une fonction positive, imagine l'aire sous la courbe : chaque propriété devient évidente. Dans ce chapitre, ces propriétés sont admises.



Chasles en image : pour une fonction positive, les deux domaines juxtaposés en b forment le domaine de a à c.

Propriété : Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous réels a, b et c de I :

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Propriété : Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux éléments de I, et α un réel. Alors :

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

et

$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Propriété : Positivité

Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$, et f une fonction continue sur $[a, b]$. Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Propriété : Intégrale et ordre

Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$, et f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Méthode : un signe ou une comparaison sans calcul

1. Commence par les bornes : celle du bas doit être inférieure ou égale à celle du haut.
2. Pour le signe : étudie le signe de la fonction sur le segment ; s'il est constant, l'intégrale a ce signe.
3. Pour comparer deux intégrales sur un même segment : compare les deux fonctions point par point, puis intègre l'inégalité.

Exemple : Chasles et linéarité en action

On sait que $\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 3$ et $\int_2^5 g(x)\,\mathrm{d}x = -1$, pour une fonction g continue sur $[0, 5]$.

Par Chasles :

$$\int_0^5 g(x)\,\mathrm{d}x = 3 + (-1) = 2.$$

En échangeant les bornes :

$$\int_5^0 g(x)\,\mathrm{d}x = -2.$$

Par linéarité :

$$\int_0^5 (4g(x) - 1)\,\mathrm{d}x$$
$$= 4 \times 2 - 5 = 3.$$

Autre exemple : pour tout x de $[0, 1]$, $x^3 \leq x^2$. Comme $0 \leq 1$, l'intégrale et l'ordre donnent :

$$\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x.$$

Le calcul le confirme : $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{3}$.

Intégration par parties

Théorème : Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, de dérivées u' et v' continues sur I, et a, b deux éléments de I. Alors :

$$\begin{aligned}\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x &= \big[u(x)\,v(x)\big]_a^b \\ &\quad - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Quel facteur dériver ?

Produit à intégrer	u : on le dérive	v' : on le primitive
polynôme fois e^{kx}	le polynôme	e^{kx}
polynôme fois $\ln x$	$\ln x$	le polynôme
$\ln x$ seul	$\ln x$	1
$(\ln x)^2$ seul	$(\ln x)^2$	1

Le bon choix fait baisser le degré du polynôme. Face au logarithme, on le dérive : cela abaisse sa puissance, de $(\ln x)^2$ à $\ln x$, et $\ln x$ seul devient $\dfrac{1}{x}$.

Méthode : la mise en place avant le calcul

1. Écris les quatre fonctions avant tout calcul : $u(x)$, $u'(x)$, $v'(x)$ et $v(x)$.
2. Précise qu'elles sont dérivables, avec des dérivées continues sur le segment.
3. Remplace dans la formule : le crochet, le signe moins, la nouvelle intégrale.
4. Termine par le crochet, puis par la nouvelle intégrale : elle doit se calculer d'un coup.

Cette mise en place est souvent notée à part du résultat : ne la saute jamais.

Exemple : polynôme fois exponentielle

Soit $I = \int_0^1 (2x+1)e^x\,\mathrm{d}x$. On pose $u(x) = 2x+1$ et $v'(x) = e^x$, d'où $u'(x) = 2$ et $v(x) = e^x$: ces fonctions sont continues sur $[0,1]$.

$$\begin{aligned}I &= \big[(2x+1)e^x\big]_0^1 - \int_0^1 2e^x\,\mathrm{d}x \\ &= (3e-1) - 2(e-1) \\ &= e+1.\end{aligned}$$

Exemple : polynôme fois logarithme

Soit $J = \int_1^e x \ln x \, \mathrm{d}x$. On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$, d'où $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$, continues sur $[1, e]$.

$$\begin{aligned} J &= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} \\ &= \frac{e^2+1}{4}. \end{aligned}$$

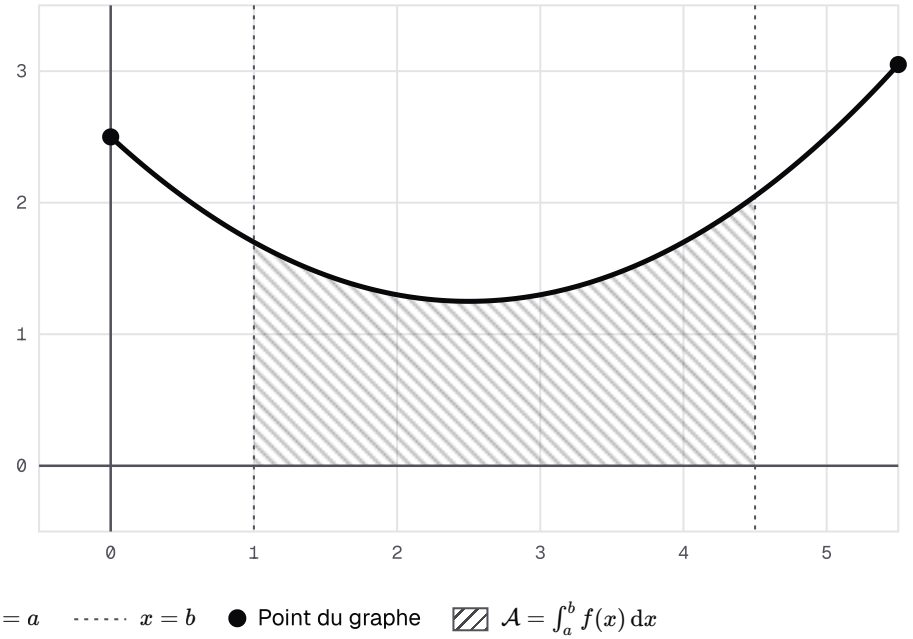
Calcul d'aires

Une aire est toujours **positive**. Avant toute formule, pose-toi une question : quelle courbe est au-dessus de l'autre, et sur quel intervalle ?

Propriété : Aire sous la courbe d'une fonction positive

Le plan est rapporté à un repère orthogonal. Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et f une fonction continue et positive sur $[a, b]$, de courbe $\mathcal{C}_f$. L'aire, en unités d'aire, du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Pour f continue et positive sur [a, b], l'intégrale de a à b mesure le domaine hachuré, en unités d'aire.

Propriété : Aire pour une fonction de signe quelconque

Le plan est rapporté à un repère orthogonal. Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et f une fonction continue sur $[a, b]$, de courbe $\mathcal{C}_f$. L'aire, en unités d'aire, du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x.$$

Si f est négative sur $[a, b]$, alors $\mathcal{A} = -\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$. Si f change de signe sur $[a, b]$, on découpe l'intégrale, par la relation de Chasles, aux réels de $]a, b[$ où f change de signe.

Propriété : Aire entre deux courbes

Le plan est rapporté à un repère orthogonal. Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$, de courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. L'aire, en unités d'aire, du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x.$$

En particulier, si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\mathcal{A} = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, \mathrm{d}x$.

Définition : Unité d'aire

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'**unité d'aire** est l'aire du rectangle construit sur $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Si $\|\vec{i}\| = p$ cm et $\|\vec{j}\| = q$ cm, alors une unité d'aire vaut $p \times q$ cm².

Méthode : une aire en cm²

1. Étudie le signe de $f(x) - g(x)$ sur $[a, b]$, avec $g = 0$ quand le domaine touche l'axe des abscisses.
2. Si ce signe change, coupe $[a, b]$ aux valeurs où la différence s'annule (Chasles).
3. Sur chaque morceau, intègre « dessus moins dessous » : tu obtiens des unités d'aire.
4. Multiplie par l'aire d'une unité, $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$, en cm².

Exemple : entre une courbe et son asymptote, unité 2 cm

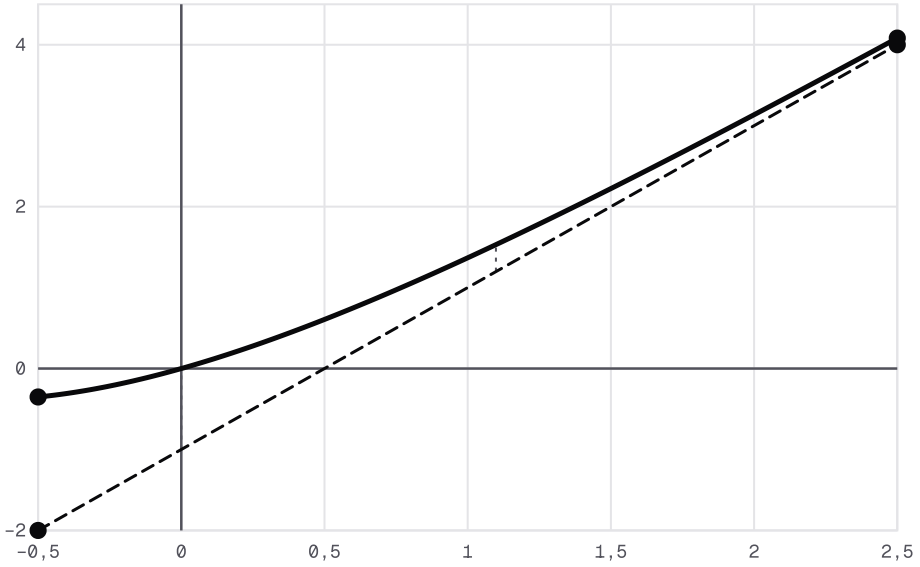
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$, dans un repère orthonormé d'unité 2 cm. La droite (Δ) d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.

Pour tout réel x, $f(x) - (2x - 1) = e^{-x} > 0$: la courbe est au-dessus de (Δ).

Entre les droites $x = 0$ et $x = \ln 3$, en unités d'aire :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^{\ln 3} e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-e^{-x}\right]_0^{\ln 3} \\ &= -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Une unité d'aire vaut $2 \times 2 = 4$ cm², donc l'aire vaut $\frac{8}{3}$ cm², environ $2{,}67$ cm².



$y = 2x - 1 + e^{-x}$ $y = 2x - 1$ $x = 0$ $x = \ln 3$ Point du graphe

La courbe de f(x) = 2x − 1 + e^(−x) reste au-dessus de son asymptote y = 2x − 1 ; entre x = 0 et x = ln 3, l'écart entre elles délimite un domaine de 2/3 d'unité d'aire.

Exemple : intégrale nulle, aire non nulle

Soit q la fonction définie sur $[0, 3]$ par $q(x) = x^2 - 2x$. Comme $x^2 - 2x = x(x-2)$, q est négative sur $[0, 2]$ et positive sur $[2, 3]$. Pourtant :

$$\begin{aligned}&\int_0^3 q(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^3 \\ &= 9 - 9 = 0.\end{aligned}$$

Le domaine n'est pas vide pour autant. Par Chasles, en changeant le signe sur $[0, 2]$, l'aire vaut, en unités d'aire :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= -\int_0^2 q(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 q(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Signe de q(x) = x(x − 2) sur [0, 3] : négatif avant 2, positif après. C'est ce tableau qui dit où couper l'intégrale.

x	0		2		3
$q(x)$	**0**	**−**	**0**	**+**	



$y = x^2 - 2x$ ● Point plein $(0, 0)$ ● Point plein $(2, 0)$ ------ $x = 3$ ● Point du graphe

La parabole y = x² − 2x passe sous l'axe des abscisses sur [0, 2], puis au-dessus sur [2, 3] : les deux morceaux ont la même aire, 4/3, et l'intégrale de 0 à 3 vaut 0.

Remarque : Quand une borne est un paramètre

Si une borne est un réel α, l'aire devient une fonction $\mathcal{A}(\alpha)$. Sa limite se cherche comme celle de n'importe quelle fonction de α.

Avec la courbe et l'asymptote de l'exemple ci-dessus, pour tout réel $\alpha > 0$:

$$\mathcal{A}(\alpha) = \int_0^{\alpha} e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 - e^{-\alpha}.$$

Donc :

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = 1.$$

Rédige-le comme un calcul d'aire ordinaire, puis cherche la limite.

Valeur moyenne et volume, en bref

Remarque : Deux notions à intensité courte

La valeur moyenne et le volume de révolution sont absents des 15 sujets consultés. Retiens la formule et un exemple de chaque, sans plus.

Définition : Valeur moyenne

Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et f une fonction continue sur $[a, b]$. La **valeur moyenne** de f sur $[a, b]$ est le réel

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lorsque f est positive sur $[a, b]$, le rectangle de base $[a, b]$ et de hauteur μ a la même aire que le domaine situé sous la courbe de f.

Propriété : La valeur moyenne est atteinte

Soit a et b deux réels tels que $a < b$, f une fonction continue sur $[a, b]$, et μ sa valeur moyenne sur $[a, b]$. Il existe au moins un réel c de $[a, b]$ tel que

$$f(c) = \mu.$$

Exemple : une valeur moyenne

Soit f la fonction définie sur $[0, 2]$ par $f(x) = 3x^2 + 1$. Elle est continue sur $[0, 2]$, donc :

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{2-0}\int_0^2 \left(3x^2+1\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left[x^3 + x\right]_0^2 = \frac{10}{2} = 5.\end{aligned}$$

La solution de $3c^2 + 1 = 5$ dans $[0, 2]$ est $c = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, environ $1{,}15$: la valeur moyenne est atteinte.

Propriété : Volume d'un solide de révolution

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et f une fonction continue sur $[a, b]$. Le volume, en unités de volume, du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du domaine limité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, est

$$V = \int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2\mathrm{d}x.$$

Si $\|\vec{i}\| = p$ cm, l'unité de volume vaut p^3 cm³.

Exemple : un volume de révolution

Soit f la fonction définie sur $[1, e]$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, dans un repère orthonormé. Pour tout $x \in [1, e]$, $\left(f(x)\right)^2 = \dfrac{1}{x}$. Donc, en unités de volume :

$$V = \pi \int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \pi\,[\ln x]_1^e = \pi.$$

Si $\|\vec{i}\| = 1$ cm, alors $V = \pi$ cm³, environ $3{,}14$ cm³.

Sept pièges classiques

Attention : Oublier les parenthèses autour de F(a)

$$\int_{-1}^{1} 3x^2\,\mathrm{d}x = \left[x^3\right]_{-1}^{1}$$
$$= 1 - (-1) = 2.$$

Sans parenthèses, on écrit $1 - 1 = 0$: impossible pour une fonction positive, non nulle, intégrée de -1 à 1.

Attention : Oublier le facteur 1/a devant e^(ax+b)

Une primitive de $x \mapsto e^{5x}$ est $x \mapsto \dfrac{e^{5x}}{5}$, et non $x \mapsto e^{5x}$, dont la dérivée est $x \mapsto 5e^{5x}$.

Une primitive de $x \mapsto e^{-x}$ est $x \mapsto -e^{-x}$: ici, le facteur vaut $\dfrac{1}{-1} = -1$. Au moindre doute, dérive ta primitive.

Attention : Intégrer à travers une valeur interdite

Le symbole $\int_{-1}^{2} \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ n'a pas de sens dans ce chapitre : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas définie en 0, qui appartient à $[-1, 2]$. Avant le crochet, contrôle la continuité sur tout le segment.

Attention : Intégrer « dessous moins dessus »

Une aire négative trahit une erreur : courbes inversées, ou changement de signe oublié. Reprends la position relative avant de calculer, jamais après.

Attention : Mal convertir en cm²

Avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm, une unité d'aire vaut 4 cm² : $\dfrac{3}{4}$ d'unité d'aire font 3 cm², pas $\dfrac{3}{2}$ cm².

Si l'énoncé ne donne aucune unité de longueur, l'aire reste en unités d'aire.

Attention : Se tromper de facteur ou de signe dans les parties

Face à un polynôme fois $\ln x$, c'est $\ln x$ que l'on dérive : sa dérivée $\dfrac{1}{x}$ simplifie le polynôme.

Et garde le signe moins devant la seconde intégrale : l'oublier fausse tout le résultat.

Attention : Volume : oublier le carré ou π

Le volume vaut $\pi \int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x$.

Avec $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1, e]$, intégrer f au lieu de f^2 donnerait $\int_1^e \dfrac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = 2\sqrt{e} - 2$, environ $1{,}30$, au lieu de π.

Au bac

Constats sur les **15 sujets nationaux** 2BAC SE consultés (2016 à 2025), dont 12 barèmes lus avec leur découpage. Ces fréquences décrivent ces sujets-là, pas le prochain examen.

Le calcul intégral figure dans 15 des 15 sujets consultés. On le trouve dans 12 des 15 sujets consultés, en fin d'étude de fonction ; ailleurs dans un exercice mixte (2) ou un exercice dédié (1). Il pèse de 0,5 à 2,25 points. L'enchaînement le plus courant : primitive donnée à vérifier, intégrale déduite, intégration par parties, aire.

Questions relevées :

- aire d'un domaine plan : dans 12 des 15 sujets consultés ; le domaine est fermé par une droite dans 6 sujets, par l'axe des abscisses dans 5, par une seconde courbe dans 1 ;
- « vérifier que H est une primitive de h », puis l'intégrale déduite : dans 10 des 15 sujets consultés ;
- intégration par parties : dans 9 des 15 sujets consultés, avec un logarithme dans 6 de ces sujets et une exponentielle dans 3 ;
- intégrale par une primitive directe : dans 7 des 15 sujets consultés, dont e^{ax+b} dans 3 de ces sujets.

Et aussi :

- aire demandée en cm² : dans 7 des 15 sujets consultés, avec une unité de 2 cm dans 2 de ces sujets ;
- aire dépendant d'un paramètre α : dans 3 des 15 sujets consultés ;
- limite d'une telle aire : dans 2 des 15 sujets consultés ;
- intégrale négative calculée avant l'aire : dans 2 des 15 sujets consultés.

Méthode : Rédiger comme les barèmes le demandent

1. **Primitive donnée** : écris « H est dérivable sur I et, pour tout x de I, $H'(x) = h(x)$ ». Un barème lu exige de citer cette définition.
2. **Intégration par parties** : la mise en place, avec u et v', est notée à part du résultat dans 6 barèmes lus.
3. **Aire** : la formule, avec la bonne différence et l'unité, est notée à part de la valeur dans 8 barèmes lus.

4. **Valeur exacte d'abord**, valeur approchée ensuite, seulement si elle est demandée.

Exemple : Rédaction-type : une aire en cm²

Avec la fonction f et la droite (Δ) de la section sur les aires :

« Pour tout x de $[0, \ln 3]$, $f(x) - (2x - 1) = e^{-x} > 0$, donc la courbe est au-dessus de (Δ) sur cet intervalle. L'unité de longueur étant 2 cm, l'aire cherchée vaut, en cm² :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= 4 \int_0^{\ln 3} (f(x) - (2x - 1))\,\mathrm{d}x \\ &= 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Soit environ $2{,}67$ cm². »

Remarque : Non relevé dans ces 15 sujets

Ce qui ne veut pas dire « jamais demandé ».

- Volume de révolution : dans 0 des 15 sujets consultés.
- Valeur moyenne : dans 0 des 15 sujets consultés.
- Encadrement d'une intégrale : dans 0 des 15 sujets consultés.
- Suites d'intégrales : dans 0 des 15 sujets consultés.
- Aire sur un intervalle où la différence change de signe, changement de variable : jamais relevés.

Bonus : encadrer une intégrale

Remarque : Une partie que tu peux sauter

Bonus, à sauter sans perdre le fil. L'inégalité de la moyenne est absente des 15 sujets consultés. Elle sert quand on ne connaît aucune primitive.

Propriété : Bonus : encadrement d'une intégrale (inégalité de la moyenne)

Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$, f une fonction continue sur $[a, b]$, et m, M deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors

$$\begin{aligned}m(b - a) &\leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq M(b - a).\end{aligned}$$

Variations de r sur [0, 1] : elle décroît de 1 à 1/2, ce qui fournit m = 1/2 et M = 1.

x	0		1
$r'(x)$	0	–	
$r(x)$	1	↘	$\frac{1}{2}$

Exemple : Bonus : encadrer sans primitive

Soit r la fonction définie sur $[0,1]$ par $r(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$. Sa dérivée est donnée par $r'(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$.

Sur $[0,1]$, $r'(x)$ est négative ou nulle, nulle seulement en 0 : r décroît de $r(0)=1$ à $r(1)=\dfrac{1}{2}$.

Donc $\dfrac{1}{2}\leq r(x)\leq 1$ pour tout $x\in[0,1]$. Comme $0\leq 1$, l'inégalité de la moyenne donne :

$$\frac{1}{2}\leq\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\leq 1.$$

Tu as encadré une intégrale sans en connaître de primitive.

Checklist avant le bac

À retenir : Je sais…

- écrire une intégrale avec le crochet, en mettant $F(a)$ entre parenthèses ;
- reconnaître e^{ax+b}, $u'u^n$, $\dfrac{u'}{u}$ et $u'e^u$, puis vérifier ma primitive en la dérivant ;
- prouver qu'une fonction H donnée est une primitive de h, puis m'en servir ;
- utiliser Chasles et la linéarité, et donner le signe d'une intégrale sans la calculer ;
- poser u, u', v, v' avant une intégration par parties ;
- intégrer $(\ln x)^2$ par parties, en dérivant le carré du logarithme et en primitivant 1 ;
- calculer une aire après la position relative, en unités d'aire puis en cm² ;
- exprimer une aire $\mathcal{A}(\alpha)$ dont une borne est un paramètre, puis chercher sa limite ;
- calculer une valeur moyenne et un volume de révolution.