BURHAN

Calcul intégral : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/calcul-integral/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul intégral	Niveau examen	5

Exercice 1 — 2 pts

Fin de problème : exponentielle, asymptote oblique et aire en cm²

Données admises. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 - x + \left(2x^2 + 3\right) e^{-2x}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm. On admet, d'après l'étude qui précède, que la droite (D) d'équation $y = 2 - x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice original BURHAN au format des fins de problème observées, avec un barème indicatif ; ce n'est pas un sujet d'examen.

1. — 0,25 pts

Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de (D).

INDICE

Écris $f(x) - (2 - x)$: son signe se lit sur deux facteurs.

2. — 0,5 pts

a. Vérifier que $H : x \mapsto -\dfrac{2x + 1}{4} e^{-2x}$ est une primitive de $h : x \mapsto x e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire $\int_0^1 x e^{-2x} \, \mathrm{d}x$.

INDICE

Dérive H comme un produit et compare à h. Rappel : $\left(e^{-2x}\right)' = -2e^{-2x}$, car $\left(e^{u}\right)' = u' e^{u}$ avec $u(x) = -2x$.

3. — 0,75 pts

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_0^1 \left(2x^2 + 3\right) e^{-2x} \, \mathrm{d}x = 2 - \dfrac{4}{e^2}$.

INDICE

Pose $u(x) = 2x^2 + 3$ et $v'(x) = e^{-2x}$, donc $v(x) = -\dfrac{1}{2} e^{-2x}$. Le signe moins de la formule et celui de v se compensent : moins par moins donne plus. La nouvelle intégrale est un multiple de celle de la question 2.

4. — 0,5 pts

Calculer, en cm², l'aire du domaine plan délimité par $\mathcal{C}$, (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

INDICE

L'axe des ordonnées, c'est la droite d'équation $x = 0$. Intègre la fonction du dessus moins celle du dessous ; ici, une unité d'aire vaut $1 \times 1 = 1$ cm².

Exercice 2 — 2 pts

Fin de problème : intégrale négative, droite horizontale et aire en cm²

Données admises. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + e^{x-1} + (x-2)e^{-x}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm. On note (Δ) la droite horizontale d'équation $y = 2$.

Partie « calcul intégral » rédigée par BURHAN sur le modèle des fins de problème consultées ; barème indicatif.

1. — 0,5 pts

Calculer $I = \int_0^1 \left(e^{x-1} - 1\right) \mathrm{d}x$, puis expliquer pourquoi le résultat est négatif.

INDICE

Une primitive de $x \mapsto e^{x-1}$ est $x \mapsto e^{x-1}$, car la dérivée de $x - 1$ vaut 1. Pour le signe, compare e^{x-1} et 1 quand $x \leq 1$.

2. — 0,75 pts

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J = \int_0^1 (x-2)e^{-x}\,\mathrm{d}x = -1$.

INDICE

Pose $u(x) = x - 2$ et $v'(x) = e^{-x}$. Rappel : $(e^{-x})' = -e^{-x}$, donc $v(x) = -e^{-x}$; le signe moins de la formule et celui de v donnent un plus.

3. — 0,25 pts

Montrer que $\mathcal{C}$ est au-dessous de (Δ) sur $[0, 1]$.

INDICE

Écris $f(x) - 2$ comme la somme de $e^{x-1} - 1$ et de $(x-2)e^{-x}$, puis donne le signe de chaque terme.

4. — 0,5 pts

Calculer, en cm², l'aire du domaine plan délimité par $\mathcal{C}$, (Δ), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

INDICE

L'axe des ordonnées, c'est la droite d'équation $x = 0$. Ici la droite est au-dessus : intègre $2 - f(x)$, exprime le résultat avec I et J, puis multiplie par 2×2 cm².

Exercice 3 — 2 pts

Fin de problème : aire entre deux courbes, en cm²

Données admises. Soient f et g les fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=(x+1)\ln x$ et $g(x)=2\ln x$, de courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm. Les deux fonctions ont été étudiées dans les parties précédentes.

Suite de questions écrite par BURHAN dans la forme observée aux examens consultés ; le barème est indicatif.

1. — 0,5 pts

Montrer que, pour tout $x>0$, $f(x)-g(x)=(x-1)\ln x$, puis que $f(x)-g(x)\geq 0$. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

INDICE

Factorise par $\ln x$. Compare ensuite le signe de $x-1$ et celui de $\ln x$ de part et d'autre de 1.

2. — 0,25 pts

Vérifier que, pour tout $x>0$, $\dfrac{(x-1)^2}{2x}=\dfrac{x}{2}-1+\dfrac{1}{2x}$.

INDICE

Développe $(x-1)^2$, puis divise chaque terme par $2x$.

3. — 0,75 pts

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^3 (x-1)\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\ln 3$.

INDICE

Pose $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=x-1$, et prends $v(x)=\dfrac{(x-1)^2}{2}$: elle s'annule en 1. L'intégrale restante est celle de la question 2.

4. — 0,5 pts

Calculer, en cm², l'aire de la partie du plan comprise entre $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=3$. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

INDICE

Sur $[1,3]$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus : intègre $f-g$, puis multiplie par l'aire d'une unité, 2×2 cm².

Exercice 4 1,75 pts

Fin de problème : aire fonction d'un paramètre et limite

Données admises. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)e^{-x}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé. Pour tout réel $\alpha > \dfrac{1}{2}$, on note $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire, en unités d'aire, de la portion du plan située entre $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = \alpha$.

Questions originales BURHAN calquées sur la forme des fins de problème consultées ; barème indicatif.

1. 0,25 pts

Justifier que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq \dfrac{1}{2}$.

INDICE

$e^{-x} > 0$: le signe de $f(x)$ est celui de $2x-1$.

2. 0,5 pts

a. Vérifier que $H : x \mapsto -(2x+1)e^{-x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire que, pour tout $\alpha > \dfrac{1}{2}$, $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{e}} - (2\alpha+1)e^{-\alpha}$.

INDICE

Dérive H comme un produit, avec $\left(e^{-x}\right)' = -e^{-x}$: on vérifie une primitive en la dérivant, jamais en primitivant f. Puis calcule $H\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

3. 0,5 pts

Exprimer $\mathcal{A}(\alpha)$ en fonction de α, puis donner une valeur approchée de $\mathcal{A}(3)$ à 10^{-2} près.

INDICE

D'après la question 1, l'aire est l'intégrale de f elle-même.

4. 0,5 pts

Calculer $\displaystyle\lim_{\alpha \to +\infty} \mathcal{A}(\alpha)$.

INDICE

Écris $(2\alpha+1)e^{-\alpha} = 2 \times \dfrac{\alpha}{e^{\alpha}} + e^{-\alpha}$ et utilise une croissance comparée.

Exercice 5 2 pts

Exercice dédié : parties, valeur moyenne et volume

Exercice dédié de 2 points, original BURHAN, au barème indicatif. Les questions 2 et 3 portent sur la valeur moyenne et sur le volume de révolution : ces notions sont **absentes des 15 sujets consultés**. Le document O (page O9) cite les deux, le document R cite le volume ; aucun de ces documents n'est authentifié.

On considère les fonctions g et h définies par $g(x) = (2x+1)\ln x$ sur $]0, +\infty[$ et $h(x) = e^x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. 0,75 pts

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^e g(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{e^2+3}{2}$.

INDICE

Pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = 2x+1$: c'est le logarithme qu'on dérive. Prends $v(x) = x^2 + x$, qui se simplifie bien avec $\dfrac{1}{x}$.

2. 0,5 pts

Calculer la valeur moyenne μ de g sur $[1, e]$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

INDICE

La valeur moyenne sur $[a, b]$ est l'intégrale divisée par la longueur $b - a$, ici $e - 1$.

3. 0,75 pts

Dans un repère orthonormé, l'arc de la courbe de h d'abscisses comprises entre 0 et $\ln 3$ tourne autour de l'axe des abscisses. Développer $(h(x))^2$, puis calculer le volume V du solide obtenu, en unités de volume.

INDICE

$V = \pi \int_0^{\ln 3} (h(x))^2\,\mathrm{d}x$: c'est l'intégrale du carré, pas le carré de l'intégrale. Utilise $e^{2\ln 3} = 9$.