BURHAN

Calcul intégral : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/calcul-integral/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul intégral	Niveau examen	5

Exercice 1 — 2 pts

Fin de problème : exponentielle, asymptote oblique et aire en cm²

Données admises. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 - x + \left(2x^2 + 3\right) e^{-2x}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm. On admet, d'après l'étude qui précède, que la droite (D) d'équation $y = 2 - x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice original BURHAN au format des fins de problème observées, avec un barème indicatif ; ce n'est pas un sujet d'examen.

1. — 0,25 pts

Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de (D).

INDICE

Écris $f(x) - (2 - x)$: son signe se lit sur deux facteurs.

CORRIGÉ

Différence. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & f(x) - (2 - x) \\ & = \left(2x^2 + 3\right) e^{-2x} \end{aligned}$$

Signe. Pour tout réel x, $2x^2 + 3 > 0$ et $e^{-2x} > 0$: la différence est strictement positive.

Conclusion. $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de (D) sur $\mathbb{R}$.

Barème indicatif. 0,25 : signe justifié et conclusion.

2. 0,5 pts

a. Vérifier que $H : x \mapsto -\dfrac{2x+1}{4}e^{-2x}$ est une primitive de $h : x \mapsto xe^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire $\int_0^1 xe^{-2x}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Dérive H comme un produit et compare à h. Rappel : $\left(e^{-2x}\right)' = -2e^{-2x}$, car $(e^u)' = u'e^u$ avec $u(x) = -2x$.

CORRIGÉ

a. **Dérivée de H.** H est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables. Avec $\left(e^{-2x}\right)' = -2e^{-2x}$ et la dérivée d'un produit, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &H'(x) \\ &= -\frac{2}{4}e^{-2x} \\ &\quad - \frac{2x+1}{4} \times \left(-2e^{-2x}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{2x+1}{2}\right) e^{-2x} \\ &= xe^{-2x} = h(x) \end{aligned}$$

Conclusion de a. $H' = h$ sur $\mathbb{R}$: par définition, H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

b. **Calcul.** $H(1) = -\dfrac{3}{4}e^{-2}$ et $H(0) = -\dfrac{1}{4}$, donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^{-2x}\,\mathrm{d}x &= H(1) - H(0) \\ &= -\frac{3}{4}e^{-2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2} \end{aligned}$$

Conclusion de b. $\int_0^1 xe^{-2x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4e^2}$.

Barème indicatif. 0,25 pour la vérification $H' = h$; 0,25 pour la valeur.

3. 0,75 pts

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_0^1 \left(2x^2+3\right) e^{-2x}\,\mathrm{d}x = 2 - \dfrac{4}{e^2}$.

INDICE

Pose $u(x) = 2x^2+3$ et $v'(x) = e^{-2x}$, donc $v(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-2x}$. Le signe moins de la formule et celui de v se compensent : moins par moins donne plus. La nouvelle intégrale est un multiple de celle de la question 2.

CORRIGÉ

Choix de u et v'. On pose $u(x) = 2x^2+3$ et $v'(x) = e^{-2x}$, d'où $u'(x) = 4x$ et $v(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-2x}$; u et v sont dérivables, et u' et v' continues sur $[0,1]$.

Formule. Notons $Q = \int_0^1 \left(2x^2+3\right) e^{-2x}\,\mathrm{d}x$. D'après la formule d'intégration par parties :

$$Q = \left[-\frac{2x^2+3}{2}e^{-2x}\right]_0^1 - \int_0^1 4x \times \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\mathrm{d}x$$

Crochet.

$$\left[-\frac{2x^2+3}{2}e^{-2x}\right]_0^1 = -\frac{5}{2}e^{-2} + \frac{3}{2}$$

Intégrale restante. Le signe moins de la formule et celui de v se compensent : on ajoute $2\int_0^1 xe^{-2x}\,\mathrm{d}x$, qui vaut $\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}e^{-2}$ d'après la question 2.

Résultat.

$$\begin{aligned} Q &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \\ &\quad - \frac{5}{2}e^{-2} - \frac{3}{2}e^{-2} \\ &= 2 - \frac{4}{e^2} \end{aligned}$$

Conclusion. $\int_0^1 \left(2x^2+3\right) e^{-2x}\,\mathrm{d}x = 2 - \dfrac{4}{e^2}$.

Barème indicatif. 0,5 pour la technique (choix de u et v', formule appliquée) ; 0,25 pour le résultat. Dans 6 des barèmes lus, la technique est notée à part du résultat.

4. 0,5 pts

Calculer, en cm², l'aire du domaine plan délimité par $\mathcal{C}$, (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

INDICE

L'axe des ordonnées, c'est la droite d'équation $x = 0$. Intègre la fonction du dessus moins celle du dessous ; ici, une unité d'aire vaut $1 \times 1 = 1$ cm².

CORRIGÉ

Position. D'après la question 1, $\mathcal{C}$ est au-dessus de (D) sur $[0, 1]$: l'aire, en unités d'aire, est l'intégrale de $f(x) - (2 - x)$ sur $[0, 1]$.

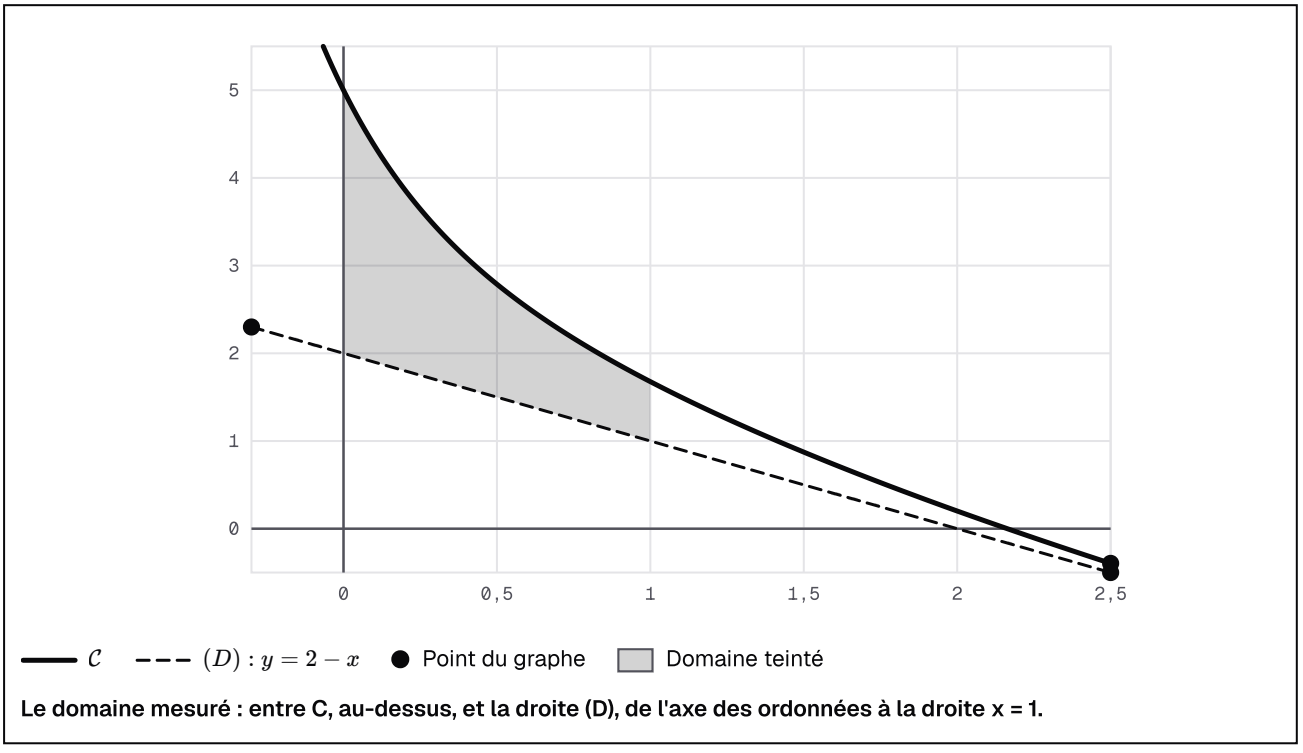
Unité. Le repère est orthonormé d'unité 1 cm : une unité d'aire vaut $1 \times 1 = 1$ cm².

Calcul. D'après la question 3, en cm² :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^1 \left(f(x) - (2 - x)\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(2x^2 + 3\right) e^{-2x} \, \mathrm{d}x \\ &= 2 - \frac{4}{e^2} \end{aligned}$$

Conclusion. $\mathcal{A} = \left(2 - \dfrac{4}{e^2}\right)$ cm², soit environ $1{,}46$ cm².

Barème indicatif. 0,25 pour la formule (bonne différence et unité) ; 0,25 pour la valeur. Une aire entre la courbe et une asymptote oblique est apparue dans 3 des 15 sujets consultés.



Le domaine mesuré : entre C, au-dessus, et la droite (D), de l'axe des ordonnées à la droite x = 1.

Exercice 2 2 pts

Fin de problème : intégrale négative, droite horizontale et aire en cm²

Données admises. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + e^{x-1} + (x-2)e^{-x}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm. On note (Δ) la droite horizontale d'équation $y = 2$.

Partie « calcul intégral » rédigée par BURHAN sur le modèle des fins de problème consultées ; barème indicatif.

1. 0,5 pts

Calculer $I = \int_0^1 \left(e^{x-1} - 1\right) \mathrm{d}x$, puis expliquer pourquoi le résultat est négatif.

INDICE

Une primitive de $x \mapsto e^{x-1}$ est $x \mapsto e^{x-1}$, car la dérivée de $x - 1$ vaut 1. Pour le signe, compare e^{x-1} et 1 quand $x \leq 1$.

CORRIGÉ

Primitive. La dérivée de $x \mapsto x - 1$ vaut 1, donc la dérivée de $x \mapsto e^{x-1}$ est elle-même : c'est une primitive de $x \mapsto e^{x-1}$. Une primitive de $x \mapsto e^{x-1} - 1$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto e^{x-1} - x$.

Calcul.

$$\begin{aligned} I &= \left[e^{x-1} - x\right]_0^1 \\ &= \left(e^0 - 1\right) - e^{-1} \\ &= -\frac{1}{e} \end{aligned}$$

Signe. Pour $x \in [0, 1]$, $x - 1 \leq 0$ et l'exponentielle est croissante, donc $e^{x-1} \leq e^0 = 1$. La fonction intégrée est continue, négative ou nulle sur $[0, 1]$, et $0 \leq 1$: son intégrale est négative. Une intégrale n'est pas une aire.

Conclusion. $I = -\dfrac{1}{e}$; ce nombre est négatif car $e^{x-1} - 1 \leq 0$ sur $[0, 1]$.

Barème indicatif. 0,25 pour la primitive ; 0,25 pour la valeur. Une intégrale négative calculée avant l'aire est apparue dans 2 des 15 sujets consultés.

2. 0,75 pts

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J = \int_0^1 (x-2)e^{-x}\,\mathrm{d}x = -1$.

INDICE

Pose $u(x) = x - 2$ et $v'(x) = e^{-x}$. Rappel : $\left(e^{-x}\right)' = -e^{-x}$, donc $v(x) = -e^{-x}$; le signe moins de la formule et celui de v donnent un plus.

CORRIGÉ

Choix de u et v'. On pose $u(x) = x - 2$ et $v'(x) = e^{-x}$, d'où $u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-x}$; u et v sont dérivables, et u' et v' continues sur $[0, 1]$.

Formule. Le signe moins de la formule et celui de v donnent un plus :

$$\begin{aligned} J &= \left[-(x-2)e^{-x}\right]_0^1 \\ &\quad + \int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Crochet. En 1, $-(1-2)e^{-1} = e^{-1}$; en 0, $-(0-2)e^{0} = 2$. Le crochet vaut $e^{-1} - 2$.

Intégrale restante.

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \left[-e^{-x}\right]_0^1 \\ &= 1 - e^{-1} \end{aligned}$$

Résultat.

$$\begin{aligned} J &= e^{-1} - 2 + 1 - e^{-1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Conclusion. $J = -1$.

Barème indicatif. 0,5 pour la technique ; 0,25 pour le résultat.

3. 0,25 pts

Montrer que $\mathcal{C}$ est au-dessous de (Δ) sur $[0, 1]$.

INDICE

Écris $f(x) - 2$ comme la somme de $e^{x-1} - 1$ et de $(x-2)e^{-x}$, puis donne le signe de chaque terme.

CORRIGÉ

Décomposition. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) - 2 &= \left(e^{x-1} - 1\right) \\ &\quad + (x-2)e^{-x} \end{aligned}$$

Signe de chaque terme. Soit $x \in [0, 1]$. D'après la question 1, $e^{x-1} - 1 \leq 0$. De plus $x - 2 < 0$ et $e^{-x} > 0$, donc $(x-2)e^{-x} < 0$. La somme est strictement négative : $f(x) - 2 < 0$.

Conclusion. Pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) < 2$: sur $[0, 1]$, $\mathcal{C}$ est au-dessous de (Δ).

Barème indicatif. 0,25.

4. 0,5 pts

Calculer, en cm², l'aire du domaine plan délimité par $\mathcal{C}$, (Δ), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

INDICE

L'axe des ordonnées, c'est la droite d'équation $x = 0$. Ici la droite est au-dessus : intègre $2 - f(x)$, exprime le résultat avec I et J, puis multiplie par 2×2 cm².

CORRIGÉ

Position. D'après la question 3, (Δ) est au-dessus de $\mathcal{C}$ sur $[0, 1]$: on intègre $2 - f(x)$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} 2 - f(x) &= -\left(e^{x-1} - 1\right) \\ &\quad -(x-2)e^{-x} \end{aligned}$$

Par linéarité, l'intégrale de $2 - f$ sur $[0, 1]$ vaut donc $-I - J = -(I + J)$.

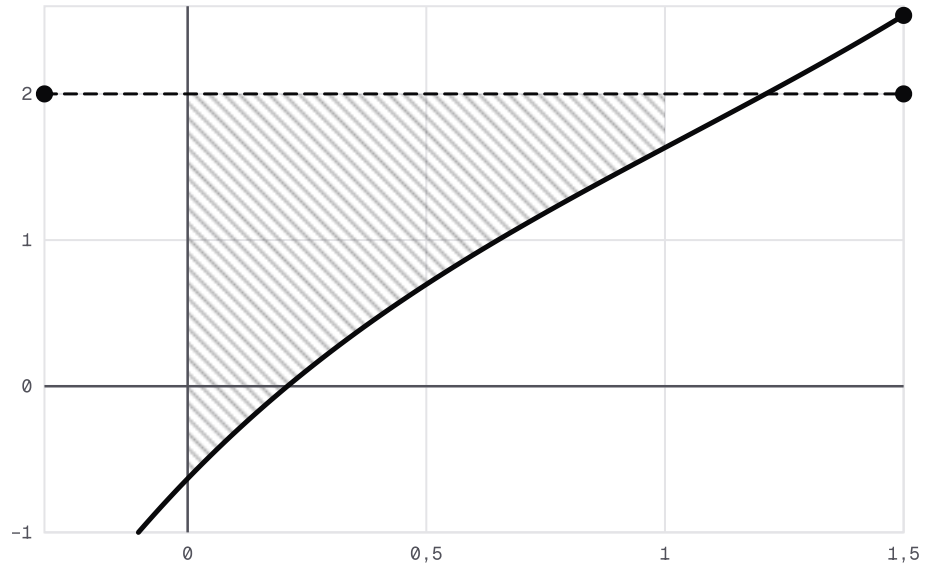
Unité. Une unité d'aire vaut $2 \times 2 = 4$ cm².

Calcul. En cm² :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 4\int_0^1 (2 - f(x))\,\mathrm{d}x \\ &= -4(I + J) \\ &= -4\left(-\frac{1}{e} - 1\right) \\ &= 4 + \frac{4}{e} \end{aligned}$$

Conclusion. $\mathcal{A} = \left(4 + \dfrac{4}{e}\right)$ cm², soit environ $5{,}47$ cm². L'aire est positive, alors que I et J sont négatives.

Barème indicatif. 0,25 pour la formule (bonne différence et facteur 4) ; 0,25 pour la valeur. Une aire entre la courbe et une droite horizontale est apparue dans 1 des 15 sujets consultés ; un repère d'unité 2 cm dans 2 des 15 sujets consultés.



Sur [0, 1], la droite (Δ) d'équation y = 2 est au-dessus de C ; le domaine compris entre elles est hachuré.

Exercice 3 2 pts

Fin de problème : aire entre deux courbes, en cm²

Données admises. Soient f et g les fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=(x+1)\ln x$ et $g(x)=2\ln x$, de courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm. Les deux fonctions ont été étudiées dans les parties précédentes.

Suite de questions écrite par BURHAN dans la forme observée aux examens consultés ; le barème est indicatif.

1. 0,5 pts

Montrer que, pour tout $x>0$, $f(x)-g(x)=(x-1)\ln x$, puis que $f(x)-g(x)\geq 0$. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

INDICE

Factorise par $\ln x$. Compare ensuite le signe de $x-1$ et celui de $\ln x$ de part et d'autre de 1.

CORRIGÉ

Factorisation. Pour tout $x>0$:

$$\begin{aligned} &f(x)-g(x)\\ &=(x+1)\ln x-2\ln x\\ &=(x-1)\ln x \end{aligned}$$

Signe.

- Sur $]0,1[$: $x-1<0$ et $\ln x<0$, donc le produit est strictement positif ;
- en $x=1$: $f(1)-g(1)=0$;
- sur $]1,+\infty[$: $x-1>0$ et $\ln x>0$, donc le produit est strictement positif.

Conclusion. Pour tout $x>0$, $f(x)-g(x)=(x-1)\ln x\geq 0$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$, et les deux courbes n'ont qu'un point commun, celui d'abscisse 1.

Barème indicatif. 0,25 pour la factorisation ; 0,25 pour le signe et la position.

2. 0,25 pts

Vérifier que, pour tout $x > 0$, $\dfrac{(x-1)^2}{2x} = \dfrac{x}{2} - 1 + \dfrac{1}{2x}$.

INDICE

Développe $(x-1)^2$, puis divise chaque terme par $2x$.

CORRIGÉ

Pour tout $x > 0$, on développe puis on divise chaque terme par $2x$:

$$\begin{aligned}\frac{(x-1)^2}{2x} &= \frac{x^2 - 2x + 1}{2x} \\ &= \frac{x^2}{2x} - \frac{2x}{2x} + \frac{1}{2x} \\ &= \frac{x}{2} - 1 + \frac{1}{2x}\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $\dfrac{(x-1)^2}{2x} = \dfrac{x}{2} - 1 + \dfrac{1}{2x}$.

Barème indicatif. 0,25.

3. 0,75 pts

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^3 (x-1)\ln x\,\mathrm{d}x = \dfrac{3}{2}\ln 3$.

INDICE

Pose $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=x-1$, et prends $v(x)=\dfrac{(x-1)^2}{2}$: elle s'annule en 1. L'intégrale restante est celle de la question 2.

CORRIGÉ

Choix de u et v'. On pose $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=x-1$, d'où $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=\dfrac{(x-1)^2}{2}$; u et v sont dérivables, et u' et v' continues sur $[1,3]$.

Formule. Notons $K=\int_1^3 (x-1)\ln x\,\mathrm{d}x$. Comme $u'(x)v(x)=\dfrac{(x-1)^2}{2x}$:

$$K=\left[\frac{(x-1)^2}{2}\ln x\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{(x-1)^2}{2x}\,\mathrm{d}x$$

Crochet. En 3, il vaut $\dfrac{4}{2}\ln 3 = 2\ln 3$; en 1, il est nul car $\ln 1 = 0$. Le crochet vaut $2\ln 3$.

Intégrale restante. D'après la question 2 :

$$\begin{aligned}
&\int_1^3 \left(\frac{x}{2}-1+\frac{1}{2x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{4}-x+\frac{1}{2}\ln x\right]_1^3 \\
&= \frac{9}{4}-3+\frac{1}{2}\ln 3 \\
&\quad -\left(\frac{1}{4}-1\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln 3
\end{aligned}$$

Résultat.

$$K = 2\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 3 = \frac{3}{2}\ln 3$$

Conclusion. $\int_1^3 (x-1)\ln x\,\mathrm{d}x = \dfrac{3}{2}\ln 3$.

Barème indicatif. 0,25 pour la technique (choix de u et v', formule) ; 0,25 pour le calcul de l'intégrale restante ; 0,25 pour le résultat.

4. 0,5 pts

Calculer, en cm², l'aire de la partie du plan comprise entre $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

INDICE

Sur $[1, 3]$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus : intègre $f - g$, puis multiplie par l'aire d'une unité, 2×2 cm².

CORRIGÉ

Position. D'après la question 1, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $[1, 3]$, avec $f(x) - g(x) = (x - 1)\ln x$.

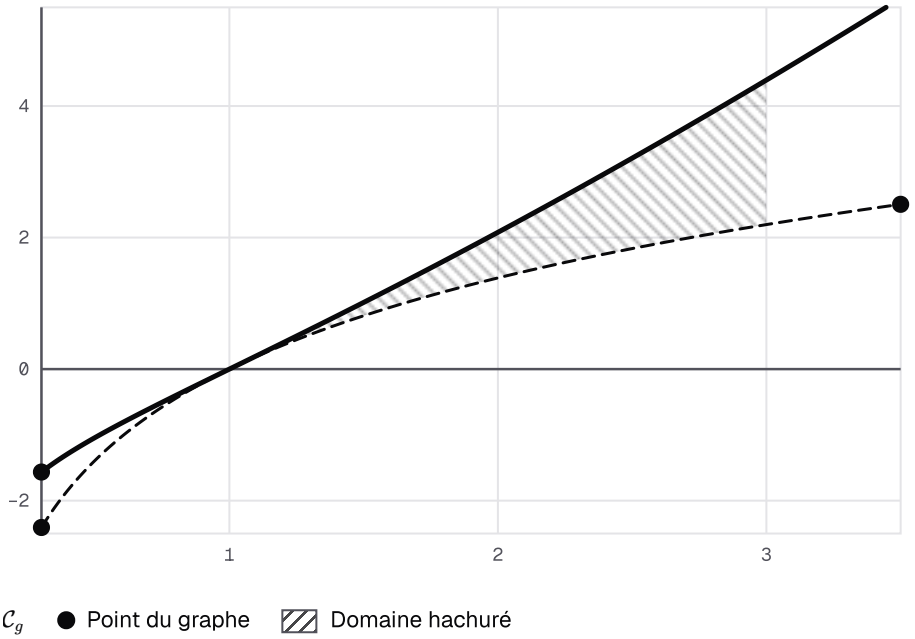
Unité. Une unité d'aire vaut $2 \times 2 = 4$ cm².

Calcul. D'après la question 3, en cm² :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= 4\int_1^3 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \\ &= 4 \times \frac{3}{2}\ln 3 \\ &= 6\ln 3\end{aligned}$$

Conclusion. L'aire vaut $\frac{3}{2}\ln 3$ unités d'aire, c'est-à-dire $6\ln 3$ cm², environ $6{,}59$ cm².

Barème indicatif. 0,25 pour la formule (bonne différence et facteur 4) ; 0,25 pour la valeur. Une aire entre deux courbes est apparue dans 1 des 15 sujets consultés ; un repère d'unité 2 cm dans 2 des 15 sujets consultés.



Les courbes de f et de g se touchent en x = 1 ; sur [1, 3], celle de f est au-dessus, et le domaine compris entre elles est hachuré.

Exercice 4 1,75 pts

Fin de problème : aire fonction d'un paramètre et limite

Données admises. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)e^{-x}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé. Pour tout réel $\alpha > \dfrac{1}{2}$, on note $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire, en unités d'aire, de la portion du plan située entre $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = \alpha$.

Questions originales BURHAN calquées sur la forme des fins de problème consultées ; barème indicatif.

1. 0,25 pts

Justifier que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq \dfrac{1}{2}$.

INDICE

$e^{-x} > 0$: le signe de $f(x)$ est celui de $2x-1$.

CORRIGÉ

Soit $x \geq \dfrac{1}{2}$. Alors $2x - 1 \geq 0$ et $e^{-x} > 0$, donc $f(x) = (2x-1)e^{-x} \geq 0$.

Conclusion. Pour tout $x \geq \dfrac{1}{2}$, $f(x) \geq 0$.

Barème indicatif. 0,25.

2. 0,5 pts

a. Vérifier que $H : x \mapsto -(2x+1)e^{-x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire que, pour tout $\alpha > \dfrac{1}{2}$, $\int_{\frac{1}{2}}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{\sqrt{e}} - (2\alpha+1)e^{-\alpha}$.

INDICE

Dérive H comme un produit, avec $\left(e^{-x}\right)' = -e^{-x}$: on vérifie une primitive en la dérivant, jamais en primitivant f. Puis calcule $H\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

CORRIGÉ

a. **Dérivée de H.** H est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables. Avec $\left(e^{-x}\right)' = -e^{-x}$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} H'(x) &= -2e^{-x} + (2x+1)e^{-x} \\ &= (-2+2x+1)e^{-x} \\ &= (2x-1)e^{-x} = f(x) \end{aligned}$$

Conclusion de a. $H' = f$ sur $\mathbb{R}$: par définition, H est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. **Valeur en $\dfrac{1}{2}$.** $H\left(\dfrac{1}{2}\right) = -2e^{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{2}{\sqrt{e}}$.

Calcul. Soit $\alpha > \dfrac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{1}{2}}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= H(\alpha) - H\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -(2\alpha+1)e^{-\alpha} + \frac{2}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

Conclusion de b. Pour tout $\alpha > \dfrac{1}{2}$, $\int_{\frac{1}{2}}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{\sqrt{e}} - (2\alpha+1)e^{-\alpha}$.

Barème indicatif. 0,25 pour la vérification $H' = f$; 0,25 pour la déduction. Vérifier qu'une fonction donnée est une primitive est apparu dans 10 des 15 sujets consultés.

3. 0,5 pts

Exprimer $\mathcal{A}(\alpha)$ en fonction de α, puis donner une valeur approchée de $\mathcal{A}(3)$ à 10^{-2} près.

INDICE

D'après la question 1, l'aire est l'intégrale de f elle-même.

CORRIGÉ

D'après la question 1, f est continue et positive sur $\left[\frac{1}{2}, \alpha\right]$: l'aire est l'intégrale de f elle-même.

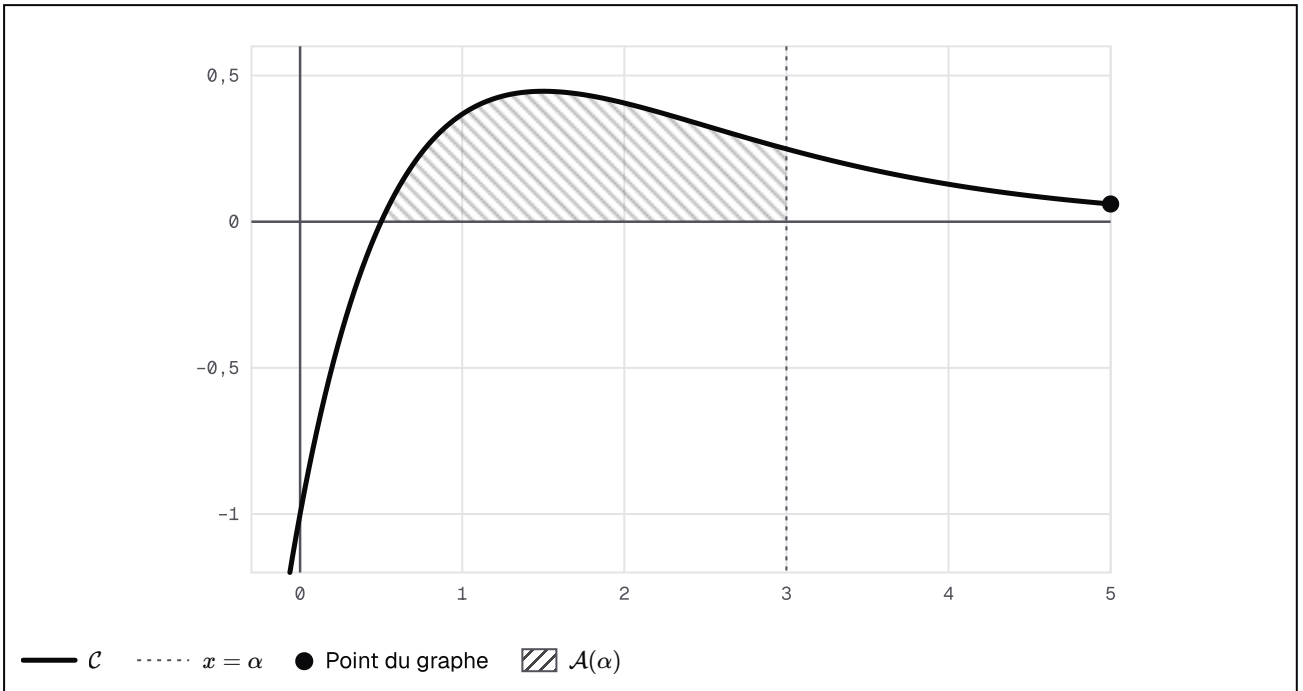
D'après la question 2 :

$$\mathcal{A}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{e}} - (2\alpha + 1)e^{-\alpha}$$

Valeur en 3. $\mathcal{A}(3) = \frac{2}{\sqrt{e}} - 7e^{-3}$.

Conclusion. Pour tout $\alpha > \frac{1}{2}$, $\mathcal{A}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{e}} - (2\alpha + 1)e^{-\alpha}$ unités d'aire, et $\mathcal{A}(3) \approx 0{,}86$ unité d'aire.

Barème indicatif. 0,25 pour l'expression de l'aire ; 0,25 pour la valeur approchée.



Le domaine qui définit A(α), de x = 1/2 à x = α, ici pour α = 3 : la courbe C y est au-dessus de l'axe des abscisses.

4. 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \mathcal{A}(\alpha)$.

INDICE

Écris $(2\alpha+1)e^{-\alpha} = 2 \times \dfrac{\alpha}{e^{\alpha}} + e^{-\alpha}$ et utilise une croissance comparée.

CORRIGÉ

Découpage. Pour tout réel α :

$$(2\alpha+1)e^{-\alpha} = 2 \times \frac{\alpha}{e^{\alpha}} + e^{-\alpha}$$

Limites. Quand α tend vers $+\infty$, $\dfrac{\alpha}{e^{\alpha}}$ tend vers 0 par croissance comparée, et $e^{-\alpha}$ tend vers 0. Donc $(2\alpha+1)e^{-\alpha}$ tend vers 0, et :

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{e}}$$

Conclusion. La limite vaut $\dfrac{2}{\sqrt{e}}$, environ $1{,}21$ unité d'aire : l'aire reste bornée alors que le domaine s'allonge.

Barème indicatif. 0,25 pour la méthode (croissance comparée) ; 0,25 pour la limite. La limite d'une aire dépendant d'un paramètre est apparue dans 2 des 15 sujets consultés.

Exercice 5 2 pts

Exercice dédié : parties, valeur moyenne et volume

Exercice dédié de 2 points, original BURHAN, au barème indicatif. Les questions 2 et 3 portent sur la valeur moyenne et sur le volume de révolution : ces notions sont **absentes des 15 sujets consultés**. Le document O (page O9) cite les deux, le document R cite le volume ; aucun de ces documents n'est authentifié.

On considère les fonctions g et h définies par $g(x) = (2x+1)\ln x$ sur $]0, +\infty[$ et $h(x) = e^x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. 0,75 pts

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^e g(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{e^2+3}{2}$.

INDICE

Pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = 2x+1$: c'est le logarithme qu'on dérive. Prends $v(x) = x^2 + x$, qui se simplifie bien avec $\dfrac{1}{x}$.

CORRIGÉ

Choix de u et v'. On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = 2x+1$, d'où $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = x^2 + x$; u et v sont dérivables, et u' et v' continues sur $[1, e]$.

Formule. Comme $u'(x)v(x) = \dfrac{x^2+x}{x} = x+1$:

$$\int_1^e g(x)\,\mathrm{d}x = \big[\big(x^2+x\big)\ln x\big]_1^e - \int_1^e (x+1)\,\mathrm{d}x$$

Crochet. Avec $\ln e = 1$ et $\ln 1 = 0$, il vaut $e^2 + e$.

Intégrale restante.

$$\int_1^e (x+1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_1^e = \frac{e^2}{2} + e - \frac{3}{2}$$

Résultat.

$$\begin{aligned}\int_1^e g(x)\,\mathrm{d}x &= e^2 + e \\ &\quad - \left(\frac{e^2}{2} + e - \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{e^2+3}{2}\end{aligned}$$

Conclusion. $\int_1^e g(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{e^2+3}{2}$.

Barème indicatif. 0,5 pour la technique ; 0,25 pour le résultat.

2. `0,5 pts`

Calculer la valeur moyenne μ de g sur $[1, e]$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

INDICE

La valeur moyenne sur $[a, b]$ est l'intégrale divisée par la longueur $b - a$, ici $e - 1$.

CORRIGÉ

Continuité. La fonction g est continue sur $[1, e]$, comme produit de fonctions continues.

Valeur moyenne. D'après la question 1 :

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{e-1}\int_1^e g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{e^2+3}{2(e-1)}\end{aligned}$$

Interprétation. Pour $x \in [1, e]$, $2x + 1 > 0$ et $\ln x \geq 0$, donc $g(x) \geq 0$: un rectangle de base $[1, e]$ et de hauteur μ a exactement la même aire que le domaine compris entre la courbe de g et l'axe des abscisses.

Conclusion. $\mu = \dfrac{e^2+3}{2(e-1)}$, soit environ $3{,}02$.

Barème indicatif. 0,25 pour la formule ; 0,25 pour la valeur.

3. 0,75 pts

Dans un repère orthonormé, l'arc de la courbe de h d'abscisses comprises entre 0 et $\ln 3$ tourne autour de l'axe des abscisses. Développer $(h(x))^2$, puis calculer le volume V du solide obtenu, en unités de volume.

INDICE

$V = \pi \int_0^{\ln 3} (h(x))^2 \, \mathrm{d}x$: c'est l'intégrale du carré, pas le carré de l'intégrale. Utilise $e^{2\ln 3} = 9$.

CORRIGÉ

Développement. Pour tout réel x :

$$(h(x))^2 = e^{2x} - 2e^{x} + 1$$

Primitive. La fonction $x \mapsto (h(x))^2$ est continue sur $\mathbb{R}$; une primitive est $x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{2} - 2e^{x} + x$.

Volume. Avec $e^{2\ln 3} = 9$ et $e^{\ln 3} = 3$:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\ln 3} (h(x))^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \pi \left[\frac{e^{2x}}{2} - 2e^{x} + x \right]_0^{\ln 3} \\ &= \pi \left(\frac{9}{2} - 6 + \ln 3 \right) \\ &\quad - \pi \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \\ &= \pi \ln 3 \end{aligned}$$

Conclusion. $(h(x))^2 = e^{2x} - 2e^{x} + 1$, et $V = \pi \ln 3$ unités de volume, soit environ $3{,}45$ unités de volume.

Barème indicatif. 0,25 pour le développement ; 0,25 pour la formule du volume ; 0,25 pour la valeur exacte.