BURHAN

Calcul intégral : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/calcul-integral/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul intégral	Entraînement	8

Exercice 1

Courbe, asymptote oblique et aire en cm²

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 2 + \dfrac{2x}{x^2+4}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm, et (D) la droite d'équation $y = x + 2$.

1.

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - (x+2)\big)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \big(f(x) - (x+2)\big)$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Pour $x \neq 0$, divise le numérateur et le dénominateur de $\dfrac{2x}{x^2+4}$ par x^2.

2.

Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de (D).

INDICE

Le dénominateur $x^2 + 4$ est strictement positif : le signe de la différence est celui de son numérateur.

3.

Calculer $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{2x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Pose $u(x) = x^2 + 4$: l'intégrande est de la forme $\dfrac{u'}{u}$, avec $u > 0$.

4.

En déduire l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan compris entre $\mathcal{C}$, (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$, en unités d'aire puis en cm². Donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

INDICE

Sur $[0, 2]$, quelle courbe est au-dessus ? Une unité d'aire vaut ici 2×2 cm².

Exercice 2

Deux courbes exponentielles qui se croisent deux fois

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x}$ et $g(x) = 5e^{x} - 4$, de courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un repère orthonormé.

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = g(x)$.

INDICE

Pose $X = e^{x}$, avec $X > 0$: tu obtiens une équation du second degré.

2.

Étudier le signe de $g(x) - f(x)$ sur $[0, 2\ln 2]$. En déduire la position relative des deux courbes sur cet intervalle.

INDICE

Écris $g(x) - f(x)$ comme un produit de deux facteurs en $X = e^{x}$, puis situe X quand x parcourt $[0, 2\ln 2]$.

3.

Calculer l'aire $\mathcal{A}$, en unités d'aire, du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

INDICE

Intègre $g - f$ entre les deux abscisses d'intersection. Une primitive de e^{2x} est $\dfrac{e^{2x}}{2}$.

Exercice 3

Intégrale ou aire : quand la fonction change de signe

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)e^x$, et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé. On travaille sur le segment $[0, 2]$.

1.

Vérifier que $F : x \mapsto (x-2)e^x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Dérive F comme un produit et compare le résultat à $f(x)$.

2.

Calculer $I = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Utilise le crochet $[F(x)]_0^2$, avec $F(0)$ entre parenthèses.

3.

Étudier le signe de $f(x)$ sur $[0, 2]$, puis calculer $I_1 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $I_2 = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Vérifier que $I_1 + I_2 = I$.

INDICE

Comme $e^x > 0$, le signe de $f(x)$ est celui de $x - 1$.

4.

Calculer l'aire $\mathcal{A}$, en unités d'aire, du domaine limité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$. Expliquer pourquoi $\mathcal{A} \neq I$.

INDICE

Sur $[0, 1]$, la courbe est sous l'axe : l'aire de cette partie vaut $-I_1$.

Exercice 4

Deux intégrations par parties successives

On se propose de calculer $J = \int_0^2 \left(x^2 - x\right) e^x \, \mathrm{d}x$.

1.

À l'aide d'une intégration par parties, calculer $K = \int_0^2 x e^x \, \mathrm{d}x$.

INDICE

Dérive le facteur polynomial et intègre l'exponentielle : $u(x) = x$, $v'(x) = e^x$.

2.

En intégrant par parties, exprimer J à l'aide de K, puis montrer que $J = e^2 - 3$.

INDICE

Prends $u(x) = x^2 - x$ et $v'(x) = e^x$. La nouvelle intégrale contient $(2x - 1)e^x$: sépare-la en $2K$ et une intégrale de e^x.

3.

Contrôle : montrer que $G : x \mapsto \left(x^2 - 3x + 3\right) e^x$ est une primitive de $x \mapsto \left(x^2 - x\right) e^x$ sur $\mathbb{R}$, puis retrouver J.

INDICE

Dérive G comme un produit et regroupe les termes devant e^x.

Exercice 5

Le carré du logarithme, puis une aire sous l'axe des abscisses

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 - (\ln x)^2$, de courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé.

1.

Calculer $K = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \ln x \, \mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties.

INDICE

Écris $\ln x = 1 \times \ln x$, puis pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = 1$.

2.

En intégrant par parties, montrer que $L = \int_{\frac{1}{e}}^{e} (\ln x)^2 \, \mathrm{d}x = e - \dfrac{5}{e}$.

INDICE

Pose $u(x) = (\ln x)^2$ et $v'(x) = 1$. La dérivée de $(\ln x)^2$ est $\dfrac{2 \ln x}{x}$: la nouvelle intégrale vaut $2K$.

3.

Montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{e}, e\right]$.

INDICE

Encadre $\ln x$ sur cet intervalle, puis déduis-en un encadrement de $(\ln x)^2$.

4.

En déduire l'aire $\mathcal{A}$, en unités d'aire, de la partie du plan située entre $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses, pour x variant de $\dfrac{1}{e}$ à e.

INDICE

Linéarité : l'intégrale de $1 - (\ln x)^2$ est l'intégrale de 1 moins L.

Exercice 6

Signe et comparaison d'intégrales sans les calculer

Dans cet exercice, aucune primitive n'est cherchée : tu raisonnes uniquement avec la positivité et l'ordre.

1.

Donner le signe de $I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{x} \ln x \, \mathrm{d}x$.

INDICE

Étudie le signe de $e^{x} \ln x$ sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, et vérifie que les bornes sont dans l'ordre croissant.

2.

Donner le signe de $J = \int_{4}^{1} \sqrt{x}\, e^{-x} \, \mathrm{d}x$.

INDICE

Regarde l'ordre des bornes : échange-les d'abord.

3.

Comparer, sans les calculer, $A = \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{3}}$ et $B = \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{4}}$.

INDICE

Pour $0 \leq x \leq 1$, compare x^{4} et x^{3} en écrivant $x^{4} = x \times x^{3}$.

4.

Bonus. a. Vérifier que, pour tout réel x, $1 - x^{4} \leq \frac{1}{1+x^{4}}$.

b. En déduire que $\frac{4}{5} \leq B \leq 1$.

INDICE

Pour a., multiplie par $1 + x^{4} > 0$ et développe $\left(1 - x^{4}\right)\left(1 + x^{4}\right)$. Pour b., encadre l'intégrande sur $[0, 1]$ puis intègre.

Exercice 7

Volume d'un solide de révolution avec des exponentielles

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x} + e^{-x}$. Dans un repère orthonormé, l'arc de sa courbe dont les abscisses vont de 0 à $\ln 3$ tourne autour de l'axe des abscisses et engendre un solide $\mathcal{S}$.

1.

Développer $\left(f(x)\right)^{2}$.

INDICE

Utilise $(a+b)^{2} = a^{2} + 2ab + b^{2}$ et $e^{x} \times e^{-x} = 1$.

2.

Calculer $\int_{0}^{\ln 3} \left(f(x)\right)^{2} \,\mathrm{d}x$.

INDICE

Pour $a \neq 0$, une primitive de e^{ax} est $\dfrac{e^{ax}}{a}$. Note aussi que $e^{2\ln 3} = 9$ et $e^{-2\ln 3} = \dfrac{1}{9}$.

3.

En déduire le volume V de $\mathcal{S}$, en unités de volume, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

INDICE

Le volume vaut π fois l'intégrale du carré de f, et non le carré de l'intégrale.

4.

Bonus. Contrôle. Montrer que f est croissante sur $[0, \ln 3]$, puis que $4\pi \ln 3 \leq V \leq \dfrac{100}{9}\pi \ln 3$. Ce résultat est-il cohérent avec la question 3 ?

INDICE

$f'(x) = e^{x} - e^{-x}$. Encadre $f(x)$ entre $f(0)$ et $f(\ln 3)$, puis $\left(f(x)\right)^{2}$, et intègre.

Exercice 8

Une aire qui dépend d'un paramètre, et sa limite

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^3}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé. Pour tout réel $\alpha>1$, on note $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=\alpha$.

1.

Justifier que $f(x)\geq 0$ pour tout $x\geq 1$, puis écrire $\mathcal{A}(\alpha)$ sous la forme d'une intégrale.

INDICE

Quel est le signe de $\ln x$ lorsque $x\geq 1$? Et celui de x^3 ?

2.

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\mathcal{A}(\alpha)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1+2\ln\alpha}{4\alpha^2}$.

INDICE

Pose $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=\dfrac{1}{x^3}=x^{-3}$, d'où $v(x)=\dfrac{x^{-2}}{-2}=-\dfrac{1}{2x^2}$.

3.

Calculer $\mathcal{A}(e)$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

INDICE

Remplace α par e et utilise $\ln e=1$.

4.

Calculer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathcal{A}(\alpha)$. Interpréter le résultat.

INDICE

Sépare $\dfrac{1+2\ln\alpha}{4\alpha^2}=\dfrac{1}{4\alpha^2}+\dfrac{1}{2\alpha}\times\dfrac{\ln\alpha}{\alpha}$ et utilise une croissance comparée.