BURHAN

Calcul intégral : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/calcul-integral/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul intégral	Entraînement	8

Exercice 1

Courbe, asymptote oblique et aire en cm²

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 2 + \dfrac{2x}{x^2+4}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm, et (D) la droite d'équation $y = x + 2$.

1.

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x+2))$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (x+2))$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Pour $x \neq 0$, divise le numérateur et le dénominateur de $\dfrac{2x}{x^2+4}$ par x^2.

CORRIGÉ

Différence. Pour tout réel x :

$$f(x) - (x+2) = \frac{2x}{x^2+4}$$

Pour $x \neq 0$, en divisant le numérateur et le dénominateur par x^2 :

$$\frac{2x}{x^2+4} = \frac{\dfrac{2}{x}}{1 + \dfrac{4}{x^2}}$$

Limites. Quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, $\dfrac{2}{x}$ tend vers 0 et $1 + \dfrac{4}{x^2}$ tend vers 1. Le quotient tend donc vers 0 :

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (x+2)) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (x+2)) = 0$$

Conclusion. Les deux limites valent 0 : la droite (D) est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

2.

Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de (D).

INDICE

Le dénominateur $x^2 + 4$ est strictement positif : le signe de la différence est celui de son numérateur.

CORRIGÉ

Pour tout réel x, $f(x) - (x+2) = \dfrac{2x}{x^2+4}$. Comme $x^2 + 4 > 0$, cette différence a le signe de $2x$, c'est-à-dire celui de x.

- Sur $]0, +\infty[$, la différence est strictement positive : $\mathcal{C}$ est au-dessus de (D) ;
- sur $]-\infty, 0[$, elle est strictement négative : $\mathcal{C}$ est au-dessous de (D) ;
- en $x = 0$, elle est nulle et $f(0) = 2$.

Conclusion. $\mathcal{C}$ est au-dessous de (D) sur $]-\infty, 0[$, au-dessus sur $]0, +\infty[$, et elles se coupent au point de coordonnées $(0, 2)$.

3.

Calculer $I = \int_0^2 \dfrac{2x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Pose $u(x) = x^2 + 4$: l'intégrande est de la forme $\dfrac{u'}{u}$, avec $u > 0$.

CORRIGÉ

Posons $u(x) = x^2 + 4$: $u'(x) = 2x$ et $u(x) > 0$ sur $[0, 2]$. La fonction intégrée est $\dfrac{u'}{u}$, continue sur $[0, 2]$; une primitive y est $\ln u$.

$$\begin{aligned} I &= \left[\ln\left(x^2+4\right)\right]_0^2 \\ &= \ln 8 - \ln 4 \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

Conclusion. $I = \ln 2$.

4.

En déduire l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan compris entre $\mathcal{C}$, (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$, en unités d'aire puis en cm². Donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

INDICE

Sur $[0, 2]$, quelle courbe est au-dessus ? Une unité d'aire vaut ici 2×2 cm².

CORRIGÉ

Position. D'après la question 2, $\mathcal{C}$ est au-dessus de (D) sur $[0, 2]$.

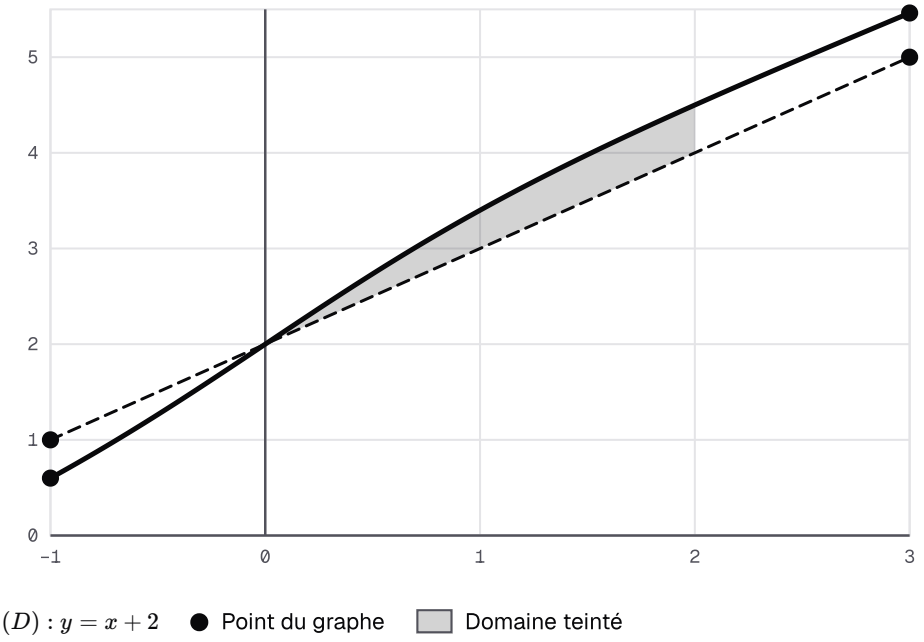
Aire en unités d'aire. D'après la question 3 :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^2 \left(f(x) - (x+2)\right) \mathrm{d}x \\ &= I = \ln 2\end{aligned}$$

Aire en cm². Une unité d'aire vaut $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| = 2 \times 2 = 4$ cm². Donc $\mathcal{A} = 4 \ln 2$ cm².

Conclusion. $\mathcal{A} = \ln 2$ unités d'aire, soit $4 \ln 2$ cm², environ $2{,}77$ cm².

Coin examen. Une aire entre la courbe et une asymptote oblique est apparue dans 3 des 15 sujets consultés ; un repère d'unité 2 cm est apparu dans 2 des 15 sujets consultés.



Sur [0, 2], la courbe C est au-dessus de son asymptote (D) ; le domaine compris entre elles est teinté.

Exercice 2

Deux courbes exponentielles qui se croisent deux fois

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x}$ et $g(x) = 5e^{x} - 4$, de courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un repère orthonormé.

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = g(x)$.

INDICE

Pose $X = e^{x}$, avec $X > 0$: tu obtiens une équation du second degré.

CORRIGÉ

Posons $X = e^{x}$: on a $X > 0$ et $e^{2x} = X^{2}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & f(x) = g(x) \\ \iff\ & X^{2} = 5X - 4 \\ \iff\ & X^{2} - 5X + 4 = 0 \\ \iff\ & (X - 1)(X - 4) = 0 \end{aligned}$$

Retour à x. Les deux racines 1 et 4 sont strictement positives, donc acceptables. Or $e^{x} = 1$ équivaut à $x = 0$, et $e^{x} = 4$ équivaut à $x = \ln 4 = 2\ln 2$.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $S = \{0, 2\ln 2\}$: les courbes se coupent aux points d'abscisses 0 et $2\ln 2$.

2.

Étudier le signe de $g(x) - f(x)$ sur $[0, 2\ln 2]$. En déduire la position relative des deux courbes sur cet intervalle.

INDICE

Écris $g(x) - f(x)$ comme un produit de deux facteurs en $X = e^{x}$, puis situe X quand x parcourt $[0, 2\ln 2]$.

CORRIGÉ

Factorisation. Avec $X = e^{x}$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & g(x) - f(x) \\ & = -e^{2x} + 5e^{x} - 4 \\ & = -(X - 1)(X - 4) \\ & = (X - 1)(4 - X) \end{aligned}$$

Signe. Soit $x \in [0, 2\ln 2]$. La fonction exponentielle est croissante, donc $e^{0} \leq e^{x} \leq e^{2\ln 2}$, soit $1 \leq X \leq 4$. Les facteurs $X - 1$ et $4 - X$ sont positifs ou nuls, donc $g(x) - f(x) \geq 0$.

Conclusion. Pour tout $x \in [0, 2\ln 2]$, $g(x) - f(x) \geq 0$: sur cet intervalle, $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$.

3.

Calculer l'aire $\mathcal{A}$, en unités d'aire, du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

INDICE

Intègre $g - f$ entre les deux abscisses d'intersection. Une primitive de e^{2x} est $\dfrac{e^{2x}}{2}$.

CORRIGÉ

D'après la question 2, $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$ sur $[0, 2\ln 2]$, et les deux fonctions sont continues. Une primitive de $x \mapsto 5e^{x} - 4 - e^{2x}$ est $x \mapsto 5e^{x} - 4x - \dfrac{e^{2x}}{2}$.

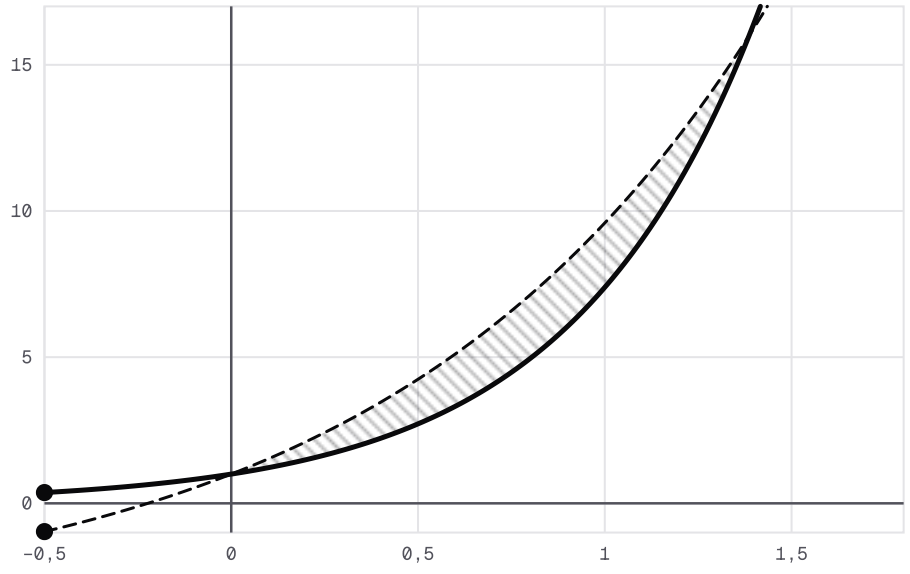
Valeurs utiles. $e^{2\ln 2} = 4$ et $e^{4\ln 2} = 16$.

Calcul.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{0}^{2\ln 2} \left(g(x) - f(x)\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[5e^{x} - 4x - \frac{e^{2x}}{2}\right]_{0}^{2\ln 2} \\ &= (20 - 8\ln 2 - 8) \\ &\quad - \left(5 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{15}{2} - 8\ln 2\end{aligned}$$

Conclusion. $\mathcal{A} = \dfrac{15}{2} - 8\ln 2$ unités d'aire, soit environ $1{,}95$ unité d'aire.

Coin examen. Une aire entre deux courbes est apparue dans 1 des 15 sujets consultés.



Entre les abscisses 0 et 2 ln 2, la courbe de g passe au-dessus de celle de f ; le domaine fermé qu'elles délimitent est hachuré.

Exercice 3

Intégrale ou aire : quand la fonction change de signe

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)e^x$, et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé. On travaille sur le segment $[0, 2]$.

1.

Vérifier que $F : x \mapsto (x-2)e^x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Dérive F comme un produit et compare le résultat à $f(x)$.

CORRIGÉ

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables. D'après la dérivée d'un produit, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} F'(x) &= 1 \times e^x + (x-2)e^x \\ &= (x-1)e^x = f(x) \end{aligned}$$

Conclusion. $F' = f$ sur $\mathbb{R}$: F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2.

Calculer $I = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Utilise le crochet $[F(x)]_0^2$, avec $F(0)$ entre parenthèses.

CORRIGÉ

D'après la question 1, F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} I &= F(2) - F(0) \\ &= 0 \times e^2 - (-2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Conclusion. $I = 2$.

3.

Étudier le signe de $f(x)$ sur $[0,2]$, puis calculer $I_1 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $I_2 = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Vérifier que $I_1 + I_2 = I$.

INDICE

Comme $e^x > 0$, le signe de $f(x)$ est celui de $x - 1$.

CORRIGÉ

Signe de $f(x)$. Pour tout réel x, $e^x > 0$: $f(x)$ a le signe de $x - 1$. Donc $f(x) \leq 0$ pour $x \in [0,1]$, et $f(x) \geq 0$ pour $x \in [1,2]$.

Les deux intégrales. Avec $F(0) = -2$, $F(1) = -e$ et $F(2) = 0$:

$$\begin{aligned} I_1 &= F(1) - F(0) \\ &= -e + 2 = 2 - e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= F(2) - F(1) \\ &= 0 - (-e) = e \end{aligned}$$

Vérification. $I_1 \approx -0{,}72$ est négative, comme f sur $[0,1]$. Et, comme l'annonce la relation de Chasles :

$$I_1 + I_2 = 2 - e + e = 2 = I$$

Conclusion. $f \leq 0$ sur $[0,1]$ et $f \geq 0$ sur $[1,2]$; $I_1 = 2 - e$, $I_2 = e$, et $I_1 + I_2 = I$.

4.

Calculer l'aire $\mathcal{A}$, en unités d'aire, du domaine limité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$. Expliquer pourquoi $\mathcal{A} \neq I$.

INDICE

Sur $[0, 1]$, la courbe est sous l'axe : l'aire de cette partie vaut $-I_1$.

CORRIGÉ

Découpage. La fonction f change de signe en 1.

- Sur $[0, 1]$, $f \leq 0$: l'aire de cette partie est $\int_0^1 (-f(x))\,\mathrm{d}x = -I_1$;
- sur $[1, 2]$, $f \geq 0$: l'aire de cette partie est I_2.

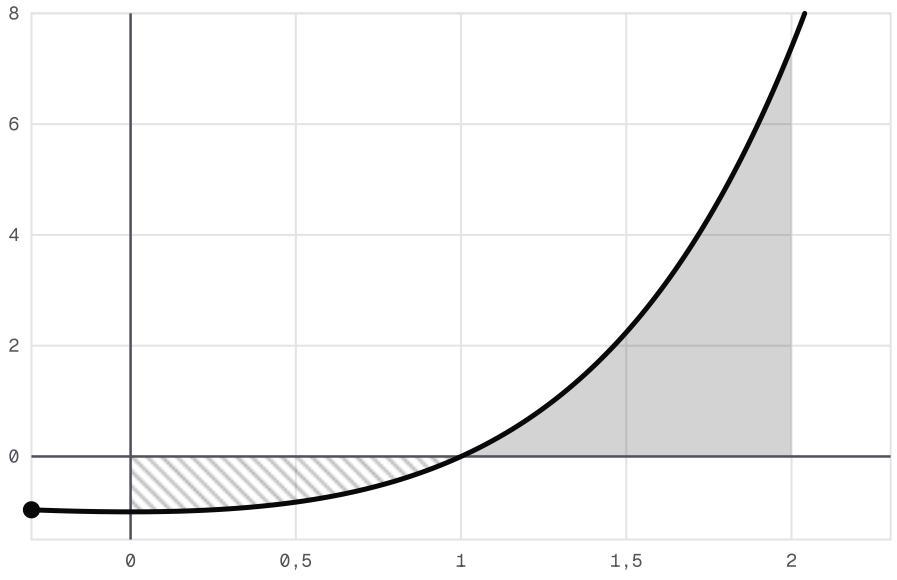
Calcul.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -I_1 + I_2 \\ &= (e - 2) + e \\ &= 2e - 2 \end{aligned}$$

Pourquoi $\mathcal{A} \neq I$. Dans I, la partie située sous l'axe compte négativement et compense une partie de l'autre : $I = 2$ est une intégrale, pas une aire. Pour une aire, on coupe aux points où le signe change, puis on additionne des quantités positives.

Conclusion. $\mathcal{A} = 2e - 2$ unités d'aire, soit environ $3{,}44$ unités d'aire, alors que $I = 2$.

Coin examen. Dans les 15 sujets consultés, l'intervalle d'une aire était toujours choisi pour que la différence garde un signe constant ; ce découpage reste utile pour comprendre.



La courbe de f est sous l'axe sur [0, 1] et au-dessus sur [1, 2] : deux domaines, hachuré puis teinté, dont les aires s'ajoutent.

Exercice 4

Deux intégrations par parties successives

On se propose de calculer $J = \int_0^2 \left(x^2 - x\right) e^x \, \mathrm{d}x$.

1.

À l'aide d'une intégration par parties, calculer $K = \int_0^2 x e^x \, \mathrm{d}x$.

INDICE

Dérive le facteur polynomial et intègre l'exponentielle : $u(x) = x$, $v'(x) = e^x$.

CORRIGÉ

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$, d'où $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$. Les fonctions u et v sont dérivables, et u' et v' continues sur $[0, 2]$. D'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} K &= \left[x e^x\right]_0^2 - \int_0^2 e^x \, \mathrm{d}x \\ &= 2e^2 - \left(e^2 - 1\right) \\ &= e^2 + 1 \end{aligned}$$

Conclusion. $K = e^2 + 1$.

2.

En intégrant par parties, exprimer J à l'aide de K, puis montrer que $J = e^2 - 3$.

INDICE

Prends $u(x) = x^2 - x$ et $v'(x) = e^x$. La nouvelle intégrale contient $(2x - 1)e^x$: sépare-la en $2K$ et une intégrale de e^x.

CORRIGÉ

Intégration par parties. On pose $u(x) = x^2 - x$ et $v'(x) = e^x$, d'où $u'(x) = 2x - 1$ et $v(x) = e^x$; u et v sont dérivables, et u' et v' continues sur $[0, 2]$. Le crochet vaut $(4 - 2)e^2 - 0 = 2e^2$, donc :

$$J = 2e^2 - \int_0^2 (2x - 1)e^x \, \mathrm{d}x$$

Lien avec K. Par linéarité, puis avec la question 1 :

$$\begin{aligned} &\int_0^2 (2x - 1)e^x \, \mathrm{d}x \\ &= 2K - \int_0^2 e^x \, \mathrm{d}x \\ &= 2\left(e^2 + 1\right) - \left(e^2 - 1\right) \\ &= e^2 + 3 \end{aligned}$$

Résultat.

$$J = 2e^2 - \left(e^2 + 3\right) = e^2 - 3$$

Conclusion. $J = 2e^2 - \left(2K - \left(e^2 - 1\right)\right)$, d'où $J = e^2 - 3$.

3.

Contrôle : montrer que $G : x \mapsto \left(x^2 - 3x + 3\right) e^x$ est une primitive de $x \mapsto \left(x^2 - x\right) e^x$ sur $\mathbb{R}$, puis retrouver J.

INDICE

Dérive G comme un produit et regroupe les termes devant e^x.

CORRIGÉ

Dérivée de G. D'après la dérivée d'un produit, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} G'(x) &= (2x - 3)e^x \\ &\quad + \left(x^2 - 3x + 3\right) e^x \\ &= \left(x^2 - x\right) e^x \end{aligned}$$

Donc G est une primitive de $x \mapsto \left(x^2 - x\right) e^x$ sur $\mathbb{R}$.

Valeur de J.

$$\begin{aligned} J &= G(2) - G(0) \\ &= (4 - 6 + 3)e^2 - 3 \\ &= e^2 - 3 \end{aligned}$$

Conclusion. On retrouve $J = e^2 - 3$, soit environ $4{,}39$: les deux méthodes concordent.

Coin examen. Le couple polynôme fois exponentielle est apparu dans 3 des 15 sujets consultés ; dans 6 des barèmes lus, la technique de l'intégration par parties est notée à part du résultat.

Exercice 5

Le carré du logarithme, puis une aire sous l'axe des abscisses

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=1-(\ln x)^2$, de courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé.

1.

Calculer $K=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\ln x\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties.

INDICE

Écris $\ln x=1\times\ln x$, puis pose $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=1$.

CORRIGÉ

On pose $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=1$, d'où $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=x$; u et v sont dérivables, et u' et v' continues sur $\left[\dfrac{1}{e},e\right]$.

Crochet. Comme $\ln e=1$ et $\dfrac{1}{e}\ln\dfrac{1}{e}=-\dfrac{1}{e}$:

$$[x\ln x]_{\frac{1}{e}}^{e}=e+\frac{1}{e}$$

Calcul.

$$\begin{aligned}K&=[x\ln x]_{\frac{1}{e}}^{e}-\int_{\frac{1}{e}}^{e}1\,\mathrm{d}x\\&=\left(e+\frac{1}{e}\right)-\left(e-\frac{1}{e}\right)\\&=\frac{2}{e}\end{aligned}$$

Conclusion. $K=\dfrac{2}{e}$.

2.

En intégrant par parties, montrer que $L = \int_{\frac{1}{e}}^{e} (\ln x)^2 \, \mathrm{d}x = e - \dfrac{5}{e}$.

INDICE

Pose $u(x) = (\ln x)^2$ et $v'(x) = 1$. La dérivée de $(\ln x)^2$ est $\dfrac{2\ln x}{x}$: la nouvelle intégrale vaut $2K$.

CORRIGÉ

Intégration par parties. On pose $u(x) = (\ln x)^2$ et $v'(x) = 1$, d'où $u'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$ et $v(x) = x$; u et v sont dérivables, et u' et v' continues sur $\left[\dfrac{1}{e}, e\right]$.

Crochet. Comme $\left(\ln \dfrac{1}{e}\right)^2 = (-1)^2 = 1$ et $(\ln e)^2 = 1$:

$$\left[x(\ln x)^2\right]_{\frac{1}{e}}^{e} = e - \frac{1}{e}$$

Nouvelle intégrale. $u'(x)v(x) = \dfrac{2\ln x}{x} \times x = 2\ln x$: elle vaut $2K$.

Calcul.

$$\begin{aligned} L &= \left(e - \frac{1}{e}\right) - \int_{\frac{1}{e}}^{e} 2\ln x \, \mathrm{d}x \\ &= e - \frac{1}{e} - 2K \\ &= e - \frac{1}{e} - \frac{4}{e} \\ &= e - \frac{5}{e} \end{aligned}$$

Conclusion. $L = e - \dfrac{5}{e}$.

3.

Montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{e}, e\right]$.

INDICE

Encadre $\ln x$ sur cet intervalle, puis déduis-en un encadrement de $(\ln x)^2$.

CORRIGÉ

Soit $x \in \left[\dfrac{1}{e}, e\right]$. La fonction $\ln$ est croissante, donc $\ln \dfrac{1}{e} \leq \ln x \leq \ln e$, soit $-1 \leq \ln x \leq 1$. Il en résulte $(\ln x)^2 \leq 1$, donc :

$$f(x) = 1 - (\ln x)^2 \geq 0$$

De plus, $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = f(e) = 0$: la courbe coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses $\dfrac{1}{e}$ et e.

Conclusion. Pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{e}, e\right]$, $f(x) \geq 0$.

4.

En déduire l'aire $\mathcal{A}$, en unités d'aire, de la partie du plan située entre $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses, pour x variant de $\dfrac{1}{e}$ à e.

INDICE

Linéarité : l'intégrale de $1-(\ln x)^2$ est l'intégrale de 1 moins L.

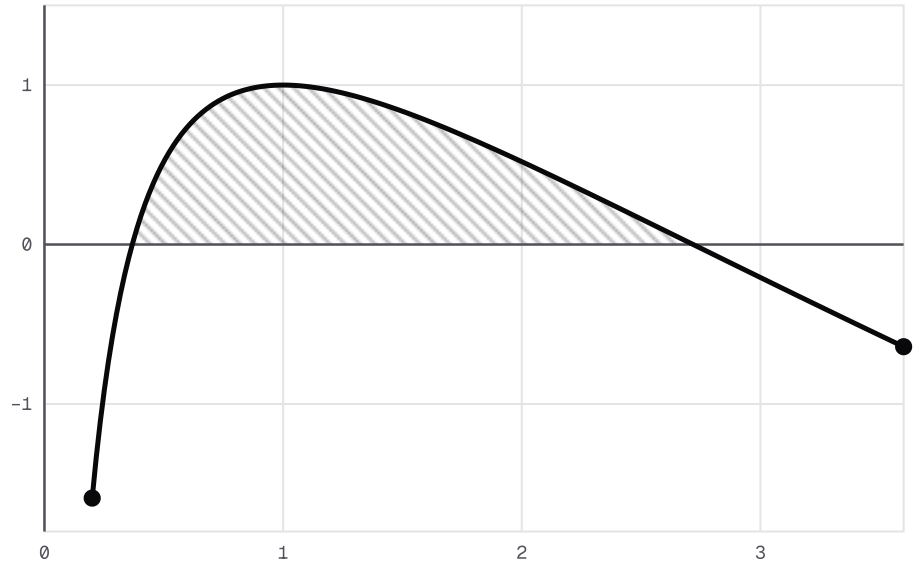
CORRIGÉ

Comme f est continue et positive sur $\left[\dfrac{1}{e}, e\right]$ (question 3), l'aire est l'intégrale de f. Par linéarité, avec $\int_{\frac{1}{e}}^{e} 1\,\mathrm{d}x = e - \dfrac{1}{e}$ et la question 2 :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left(1-(\ln x)^2\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(e-\frac{1}{e}\right) - L \\ &= \left(e-\frac{1}{e}\right) - \left(e-\frac{5}{e}\right) \\ &= \frac{4}{e}\end{aligned}$$

Conclusion. $\mathcal{A} = \dfrac{4}{e}$ unités d'aire, soit environ $1{,}47$ unité d'aire.

Coin examen. Le carré du logarithme, intégré par parties, est apparu dans 3 des 15 sujets consultés.



Sur [1/e, e], la courbe C reste au-dessus de l'axe des abscisses, qu'elle coupe aux deux bornes ; le domaine est hachuré.

Exercice 6

Signe et comparaison d'intégrales sans les calculer

Dans cet exercice, aucune primitive n'est cherchée : tu raisonnes uniquement avec la positivité et l'ordre.

1.

Donner le signe de $I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} e^x \ln x \, \mathrm{d}x$.

INDICE

Étudie le signe de $e^x \ln x$ sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, et vérifie que les bornes sont dans l'ordre croissant.

CORRIGÉ

Signe de la fonction. Pour $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $e^x > 0$ et $\ln x \leq 0$, donc $e^x \ln x \leq 0$.

Positivité. La fonction $x \mapsto -e^x \ln x$ est continue et positive sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, et $\frac{1}{2} \leq 1$. Par positivité de l'intégrale, $-I \geq 0$.

Conclusion. $I \leq 0$.

2.

Donner le signe de $J = \int_{4}^{1} \sqrt{x}\, e^{-x} \, \mathrm{d}x$.

INDICE

Regarde l'ordre des bornes : échange-les d'abord.

CORRIGÉ

Échange des bornes.

$$J = -\int_{1}^{4} \sqrt{x}\, e^{-x} \, \mathrm{d}x$$

Positivité. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}\, e^{-x}$ est continue et positive sur $[1, 4]$, et $1 \leq 4$: donc $\int_{1}^{4} \sqrt{x}\, e^{-x} \, \mathrm{d}x \geq 0$.

Conclusion. $J \leq 0$.

Attention. Une fonction positive peut avoir une intégrale négative quand la borne du bas dépasse celle du haut.

3.

Comparer, sans les calculer, $A = \int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$ et $B = \int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$.

INDICE

Pour $0 \leq x \leq 1$, compare x^4 et x^3 en écrivant $x^4 = x \times x^3$.

CORRIGÉ

Comparaison des fonctions. Soit $x \in [0,1]$. On a $x \leq 1$ et $x^3 \geq 0$, donc $x^4 = x \times x^3 \leq x^3$, puis $1 + x^4 \leq 1 + x^3$. Ces deux nombres sont strictement positifs, et la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$:

$$\frac{1}{1+x^3} \leq \frac{1}{1+x^4}$$

Comparaison des intégrales. Les deux fonctions sont continues sur $[0,1]$, et $0 \leq 1$: d'après l'intégrale et l'ordre, $A \leq B$.

Conclusion. $A \leq B$.

4.

Bonus. a. Vérifier que, pour tout réel x, $1 - x^4 \leq \dfrac{1}{1+x^4}$.

b. En déduire que $\dfrac{4}{5} \leq B \leq 1$.

INDICE

Pour a., multiplie par $1 + x^4 > 0$ et développe $\left(1 - x^4\right)\left(1 + x^4\right)$. Pour b., encadre l'intégrande sur $[0, 1]$ puis intègre.

CORRIGÉ

a. **Réduction.** Soit x un réel. Comme $1 + x^4 > 0$, multiplier par $1 + x^4$ conserve le sens de l'inégalité :

$$\begin{aligned} 1 - x^4 &\leq \frac{1}{1+x^4} \\ \iff \left(1 - x^4\right)\left(1 + x^4\right) &\leq 1 \\ \iff 1 - x^8 &\leq 1 \end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie, car $x^8 \geq 0$.

Conclusion de a. Pour tout réel x, $1 - x^4 \leq \dfrac{1}{1+x^4}$.

b. **Encadrement de l'intégrande.** Pour $x \in [0, 1]$, $1 + x^4 \geq 1$, donc $\dfrac{1}{1+x^4} \leq 1$. Avec a. :

$$1 - x^4 \leq \frac{1}{1+x^4} \leq 1$$

Intégrales des bornes.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(1 - x^4\right) \mathrm{d}x &= \left[x - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

et $\int_0^1 1 \, \mathrm{d}x = 1$.

Intégration. Les trois fonctions sont continues sur $[0, 1]$ et $0 \leq 1$: l'intégrale et l'ordre donnent

$$\frac{4}{5} \leq B \leq 1$$

Conclusion de b. $\dfrac{4}{5} \leq B \leq 1$.

À retenir. Un encadrement de l'intégrande sur le segment, bornes dans l'ordre croissant, donne un encadrement de l'intégrale. Aucun des 15 sujets consultés ne demandait ce type d'encadrement : l'exercice entraîne la propriété elle-même.

Exercice 7

Volume d'un solide de révolution avec des exponentielles

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x} + e^{-x}$. Dans un repère orthonormé, l'arc de sa courbe dont les abscisses vont de 0 à $\ln 3$ tourne autour de l'axe des abscisses et engendre un solide $\mathcal{S}$.

1.

Développer $(f(x))^{2}$.

INDICE

Utilise $(a+b)^{2} = a^{2} + 2ab + b^{2}$ et $e^{x} \times e^{-x} = 1$.

CORRIGÉ

Pour tout réel x, avec $(a+b)^{2} = a^{2} + 2ab + b^{2}$ et $e^{x} \times e^{-x} = e^{0} = 1$:

$$\begin{aligned} (f(x))^{2} &= e^{2x} + 2e^{x}e^{-x} + e^{-2x} \\ &= e^{2x} + 2 + e^{-2x} \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $(f(x))^{2} = e^{2x} + 2 + e^{-2x}$.

2.

Calculer $\int_{0}^{\ln 3} (f(x))^{2}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Pour $a \neq 0$, une primitive de e^{ax} est $\dfrac{e^{ax}}{a}$. Note aussi que $e^{2\ln 3} = 9$ et $e^{-2\ln 3} = \dfrac{1}{9}$.

CORRIGÉ

Primitive. Pour $a \neq 0$, une primitive de $x \mapsto e^{ax}$ est $x \mapsto \dfrac{e^{ax}}{a}$. D'après la question 1, une primitive de $x \mapsto (f(x))^{2}$ sur $\mathbb{R}$ est donc :

$$x \mapsto \frac{e^{2x}}{2} + 2x - \frac{e^{-2x}}{2}$$

Valeurs utiles. $e^{2\ln 3} = 9$ et $e^{-2\ln 3} = \dfrac{1}{9}$.

Calcul.

$$\begin{aligned} &\int_{0}^{\ln 3} (f(x))^{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{9}{2} + 2\ln 3 - \frac{1}{18}\right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{81-1}{18} + 2\ln 3 \\ &= \frac{40}{9} + 2\ln 3 \end{aligned}$$

Conclusion. $\int_{0}^{\ln 3} (f(x))^{2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{40}{9} + 2\ln 3$.

3.

En déduire le volume V de $\mathcal{S}$, en unités de volume, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

INDICE

Le volume vaut π fois l'intégrale du carré de f, et non le carré de l'intégrale.

CORRIGÉ

La fonction f est continue sur $[0, \ln 3]$. Le volume du solide de révolution vaut π fois l'intégrale du carré de f ; d'après la question 2 :

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{0}^{\ln 3} \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \pi \left(\frac{40}{9} + 2\ln 3\right) \end{aligned}$$

Conclusion. $V = \pi \left(\frac{40}{9} + 2\ln 3\right)$ unités de volume, soit environ $20{,}87$ unités de volume.

4.

Bonus. Contrôle. Montrer que f est croissante sur $[0, \ln 3]$, puis que $4\pi \ln 3 \leq V \leq \dfrac{100}{9}\pi \ln 3$. Ce résultat est-il cohérent avec la question 3 ?

INDICE

$f'(x) = e^x - e^{-x}$. Encadre $f(x)$ entre $f(0)$ et $f(\ln 3)$, puis $(f(x))^2$, et intègre.

CORRIGÉ

Croissance de f. Pour tout réel x, $f'(x) = e^x - e^{-x}$. Pour $x \geq 0$, $e^x \geq 1$ et $e^{-x} \leq 1$, donc $f'(x) \geq 0$: f est croissante sur $[0, \ln 3]$.

Encadrement de f. Pour $x \in [0, \ln 3]$, $f(0) \leq f(x) \leq f(\ln 3)$, avec $f(0) = 2$ et $f(\ln 3) = 3 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{10}{3}$:

$$2 \leq f(x) \leq \frac{10}{3}$$

Encadrement du carré. Ces nombres sont positifs, et la fonction carré est croissante sur $[0, +\infty[$:

$$4 \leq (f(x))^2 \leq \frac{100}{9}$$

Encadrement de V. Les fonctions sont continues sur $[0, \ln 3]$ et $0 \leq \ln 3$. On intègre, avec $\int_0^{\ln 3} 4 \, \mathrm{d}x = 4 \ln 3$ et $\int_0^{\ln 3} \dfrac{100}{9} \, \mathrm{d}x = \dfrac{100}{9} \ln 3$, puis on multiplie par $\pi > 0$:

$$4\pi \ln 3 \leq V \leq \frac{100}{9}\pi \ln 3$$

Cohérence. $4\pi \ln 3 \approx 13{,}81$ et $\dfrac{100}{9}\pi \ln 3 \approx 38{,}35$: la valeur $20{,}87$ de la question 3 est bien comprise entre les deux.

Conclusion. f est croissante sur $[0, \ln 3]$, $4\pi \ln 3 \leq V \leq \dfrac{100}{9}\pi \ln 3$, et ce résultat est cohérent avec la question 3.

Coin examen. Le volume de révolution est absent des 15 sujets consultés ; les documents O (page O9) et R, non authentifiés, le citent parmi les capacités.

Exercice 8

Une aire qui dépend d'un paramètre, et sa limite

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^3}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé. Pour tout réel $\alpha>1$, on note $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=\alpha$.

1.

Justifier que $f(x)\geq 0$ pour tout $x\geq 1$, puis écrire $\mathcal{A}(\alpha)$ sous la forme d'une intégrale.

INDICE

Quel est le signe de $\ln x$ lorsque $x\geq 1$? Et celui de x^3 ?

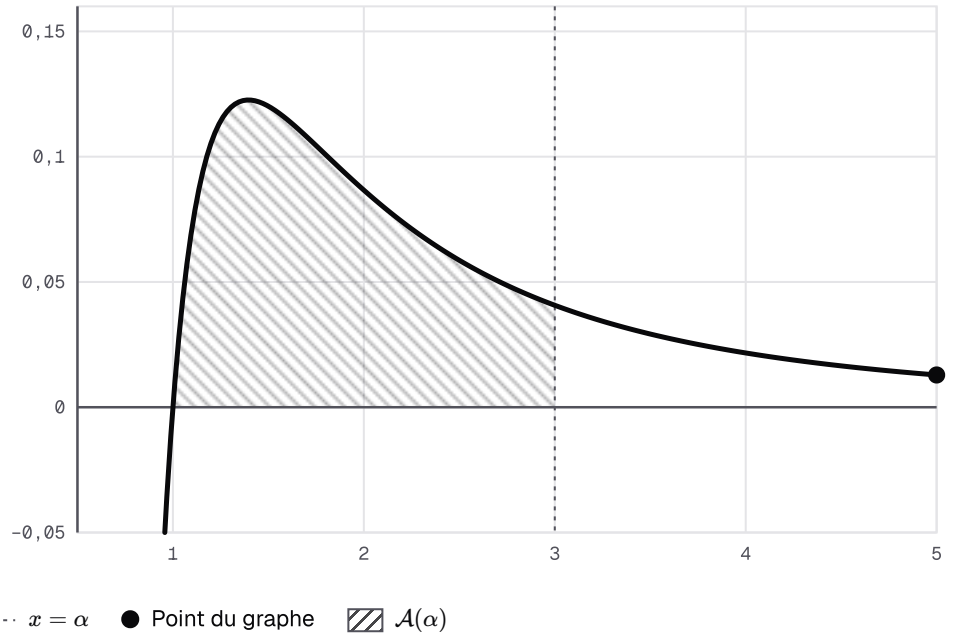
CORRIGÉ

Soit $x\geq 1$. On a $\ln x\geq 0$ et $x^3>0$, donc $f(x)\geq 0$.

Ainsi, sur $[1,\alpha]$, $\mathcal{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses. Comme f est continue sur $[1,\alpha]$ et $1<\alpha$:

$$\mathcal{A}(\alpha)=\int_1^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Conclusion. $f(x)\geq 0$ pour tout $x\geq 1$, et $\mathcal{A}(\alpha)=\int_1^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$.



Pour x ≥ 1, la courbe C est au-dessus de l'axe ; le domaine qui définit A(α) est hachuré, dessiné ici pour une valeur de α.

2.

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\mathcal{A}(\alpha) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1+2\ln\alpha}{4\alpha^2}$.

INDICE

Pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x^3} = x^{-3}$, d'où $v(x) = \dfrac{x^{-2}}{-2} = -\dfrac{1}{2x^2}$.

CORRIGÉ

Intégration par parties. On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x^3}$, d'où $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = -\dfrac{1}{2x^2}$; u et v sont dérivables, et u' et v' continues sur $[1, \alpha]$.

Crochet. Avec $\ln 1 = 0$:

$$\left[-\frac{\ln x}{2x^2}\right]_1^{\alpha} = -\frac{\ln\alpha}{2\alpha^2}$$

Nouvelle intégrale. $u'(x)v(x) = -\dfrac{1}{2x^3}$: avec le signe moins de la formule, on ajoute $\int_1^{\alpha} \dfrac{\mathrm{d}x}{2x^3}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2x^3}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{4x^2}$:

$$\begin{aligned}\int_1^{\alpha} \frac{\mathrm{d}x}{2x^3} &= \left[-\frac{1}{4x^2}\right]_1^{\alpha} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4\alpha^2}\end{aligned}$$

Résultat.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\alpha) &= -\frac{\ln\alpha}{2\alpha^2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4\alpha^2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1+2\ln\alpha}{4\alpha^2}\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $\alpha > 1$, $\mathcal{A}(\alpha) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1+2\ln\alpha}{4\alpha^2}$.

3.

Calculer $\mathcal{A}(e)$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

INDICE

Remplace α par e et utilise $\ln e = 1$.

CORRIGÉ

Avec $\ln e = 1$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(e) &= \frac{1}{4} - \frac{1+2}{4e^2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}\end{aligned}$$

Conclusion. $\mathcal{A}(e) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4e^2}$, soit environ $0{,}15$ unité d'aire.

4.

Calculer $\lim_{\alpha \to +\infty} \mathcal{A}(\alpha)$. Interpréter le résultat.

INDICE

Sépare $\frac{1+2\ln\alpha}{4\alpha^2} = \frac{1}{4\alpha^2} + \frac{1}{2\alpha} \times \frac{\ln\alpha}{\alpha}$ et utilise une croissance comparée.

CORRIGÉ

Découpage. Pour tout $\alpha > 1$:

$$\frac{1+2\ln\alpha}{4\alpha^2} = \frac{1}{4\alpha^2} + \frac{1}{2\alpha} \times \frac{\ln\alpha}{\alpha}$$

Limites. Quand α tend vers $+\infty$, $\frac{1}{4\alpha^2}$ et $\frac{1}{2\alpha}$ tendent vers 0 ; par croissance comparée, $\frac{\ln\alpha}{\alpha}$ tend aussi vers 0. Donc :

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = \frac{1}{4}$$

Interprétation. Le domaine s'étire sans fin vers la droite, et pourtant son aire se rapproche de $\frac{1}{4}$ d'unité d'aire sans l'atteindre, car $\frac{1+2\ln\alpha}{4\alpha^2} > 0$ pour $\alpha > 1$. Il s'agit seulement de la limite d'une fonction de α.

Conclusion. $\lim_{\alpha \to +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = \frac{1}{4}$: l'aire tend vers $\frac{1}{4}$ d'unité d'aire.

Coin examen. Une aire dépendant d'un paramètre est apparue dans 3 des 15 sujets consultés, et la limite d'une telle aire dans 2.