BURHAN

Calcul intégral : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/calcul-integral/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul intégral	Application	10

Exercice 1

Polynômes et inverse : les primitives de base

1.

Calculer $I_1 = \int_{-1}^{2} \left(3x^2 - 4x + 5\right) \mathrm{d}x$.

INDICE

Primitive terme à terme : une primitive de x^n est $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$. Attention au signe de la valeur prise en -1.

2.

Calculer $I_2 = \int_{1}^{3} \left(\dfrac{2}{x} + x\right) \mathrm{d}x$.

INDICE

Sur $[1, 3]$, on a $x > 0$: une primitive de $\dfrac{1}{x}$ y est $\ln x$.

3.

Pour $x > 0$, écrire $\dfrac{x^2 - 3}{x}$ comme une somme de deux termes, puis calculer $I_3 = \int_{1}^{e} \dfrac{x^2 - 3}{x} \mathrm{d}x$.

INDICE

Divise chacun des deux termes du numérateur par x.

Exercice 2

Exponentielle d'une fonction affine : le facteur 1/a

1.

Calculer $J_1 = \int_0^1 e^{4x}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Dérive e^{4x} : quel facteur apparaît ? La primitive doit le compenser.

2.

Calculer $J_2 = \int_{-1}^0 e^{-2x+1}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Ici le coefficient de x vaut -2 : le facteur est $-\dfrac{1}{2}$, et son signe compte.

3.

Calculer $J_3 = \int_0^{2\ln 2} e^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Le coefficient de x vaut $\dfrac{1}{2}$: le facteur est donc 2. Simplifie ensuite $e^{\ln 2}$.

Exercice 3

Reconnaître u′/u et u′uⁿ

1.

Calculer $K_1 = \int_0^2 \dfrac{3}{3x+2}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Le numérateur est-il la dérivée du dénominateur ? Vérifie aussi que le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,2]$.

2.

Calculer $K_2 = \int_0^1 \dfrac{e^x}{e^x+2}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Dérive le dénominateur et compare avec le numérateur.

3.

Calculer $K_3 = \int_1^e \dfrac{(\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Écris le quotient sous la forme $\dfrac{1}{x} \times (\ln x)^2$: reconnais-tu $u'u^2$?

4.

Calculer $K_4 = \int_0^1 x\left(x^2+1\right)^3\,\mathrm{d}x$.

INDICE

La dérivée de x^2+1 est $2x$, et non x : fais apparaître le facteur 2.

Exercice 4

Une primitive proposée par l'énoncé

On considère les fonctions h et H définies sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$ et $H(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$.

1.

Montrer que H est une primitive de h sur $]0,+\infty[$.

INDICE

Dérive le quotient $\dfrac{\ln x}{x^2}$ avec la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, puis simplifie par x.

2.

En déduire $L_1=\int_1^e h(x)\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Tu disposes déjà d'une primitive : sers-t'en directement.

3.

Calculer $L_2=\int_{\sqrt{e}}^e h(x)\,\mathrm{d}x$, puis expliquer son signe à l'aide du signe de h sur $[\sqrt{e},e]$.

INDICE

Souviens-toi que $\ln\sqrt{e}=\dfrac{1}{2}$. Pour le signe, résous $1-2\ln x\leq 0$.

Exercice 5

Intégration par parties guidée : un polynôme et une exponentielle

On se propose de calculer $I=\int_0^1(2x-1)e^{2x}\,\mathrm{d}x$.

1.

On pose $u(x)=2x-1$ et $v'(x)=e^{2x}$. Déterminer $u'(x)$ et une fonction v convenable, puis justifier que la formule d'intégration par parties s'applique sur $[0,1]$.

INDICE

Pour v, cherche une primitive de e^{2x}, sans oublier le facteur $\dfrac{1}{2}$.

2.

Calculer I.

INDICE

Écris d'abord le crochet $[u(x)v(x)]_0^1$, puis la nouvelle intégrale $\int_0^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$.

3.

Contrôle : vérifier que $G:x\mapsto(x-1)e^{2x}$ est une primitive de $x\mapsto(2x-1)e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$, et retrouver la valeur de I.

INDICE

Dérive le produit $(x-1)\times e^{2x}$.

Exercice 6

Intégration par parties guidée : un polynôme et un logarithme

On se propose de calculer $J = \int_1^e x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$.

1.

Choisir u et v' pour une intégration par parties, en expliquant pourquoi on dérive $\ln x$ plutôt que x^2. Donner u' et v.

INDICE

Une primitive de $\ln x$ n'a rien d'immédiat, alors que sa dérivée $\dfrac{1}{x}$ se simplifiera avec une puissance de x.

2.

Calculer J, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

INDICE

Dans la nouvelle intégrale, simplifie $\dfrac{1}{x} \times \dfrac{x^3}{3}$ avant de primitiver.

3.

Contrôle : vérifier que $F : x \mapsto \dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{x^3}{9}$ est une primitive de $x \mapsto x^2 \ln x$ sur $]0, +\infty[$, puis retrouver J.

INDICE

Dérive le premier terme comme un produit.

Exercice 7

Chasles et linéarité, sans aucune primitive

Deux fonctions f et g, continues sur $[0,4]$, vérifient :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$$
$$\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = -5$$
$$\int_0^4 g(x)\,\mathrm{d}x = 3$$

1.

Calculer $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_4^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Relation de Chasles d'abord, échange des bornes ensuite.

2.

Calculer $\int_0^4 (2f(x) - 3g(x))\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^4 (f(x)+1)\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Linéarité ; et l'intégrale de la constante 1 sur $[0,4]$ vaut la longueur de ce segment.

3.

La fonction f peut-elle être positive sur tout l'intervalle $[1,4]$? Justifier.

INDICE

Que dirait la positivité de l'intégrale si c'était le cas ?

4.

On suppose de plus que $g(x) \leq 2$ pour tout x de $[0,4]$. Montrer que $\int_0^4 g(x)\,\mathrm{d}x \leq 8$, et vérifier que la donnée de l'énoncé est compatible.

INDICE

Intégrale et ordre, sur un segment dont les bornes sont dans le bon ordre.

Exercice 8

Aire sous une parabole, en unités d'aire puis en cm²

Dans un repère orthonormé dont l'unité mesure 1 cm sur chaque axe, on note $\mathcal{P}$ la courbe de la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = x^2 - 4x + 5$.

1.

Montrer que $p(x) = (x-2)^2 + 1$ pour tout réel x, et en déduire que p est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Développe $(x-2)^2$.

2.

Calculer, en unités d'aire, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par $\mathcal{P}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.

INDICE

La fonction est positive : l'aire est directement l'intégrale de p entre les deux bornes.

3.

Exprimer cette aire en cm².

INDICE

Combien mesure, en cm², le rectangle construit sur les deux vecteurs unités ?

Exercice 9

Valeurs moyennes : une vitesse et un quotient

1.

Lors d'un essai, la vitesse d'un mobile, en mètres par seconde, vaut $v(t) = 6t - t^2$ à l'instant t, exprimé en secondes, pour $t \in [0, 6]$. Calculer la vitesse moyenne μ du mobile sur $[0, 6]$.

INDICE

Valeur moyenne : l'intégrale, divisée par la longueur de l'intervalle.

2.

Déterminer les instants c de $[0, 6]$ où la vitesse est égale à cette vitesse moyenne.

INDICE

Résous l'équation du second degré $6c - c^2 = 6$.

3.

Calculer la valeur moyenne μ_w de la fonction $w : x \mapsto \dfrac{1}{x+2}$ sur $[0, 2]$, et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

INDICE

Sur $[0, 2]$, $x + 2 > 0$: une primitive de w y est $x \mapsto \ln(x+2)$.

Exercice 10

Un tronc de cône par le calcul intégral

L'espace est muni d'un repère orthonormé dont l'unité mesure 1 cm. On fait tourner autour de l'axe des abscisses la courbe de la fonction f définie sur $[0, 2]$ par $f(x) = \dfrac{x}{2} + 1$: c'est un segment, et le solide obtenu est un tronc de cône.

1.

Calculer, en unités de volume, le volume V de ce tronc de cône à l'aide d'une intégrale.

INDICE

Développe $(f(x))^2$ avant d'intégrer.

2.

Le volume d'un tronc de cône de hauteur h et de rayons r et R vaut $\dfrac{\pi h}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$. Identifier h, r et R ici, puis comparer avec le résultat précédent.

INDICE

Les rayons sont les valeurs de f aux bornes ; la hauteur est la longueur de l'intervalle.

3.

Donner V en cm³, puis une valeur approchée au dixième.

INDICE

L'unité de longueur mesure 1 cm : une unité de volume vaut donc $1^3 = 1$ cm³.