BURHAN

Calcul intégral : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/calcul-integral/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul intégral	Application	10

Exercice 1

Polynômes et inverse : les primitives de base

1.

Calculer $I_1 = \int_{-1}^{2} \left(3x^2 - 4x + 5\right) \mathrm{d}x$.

INDICE

Primitive terme à terme : une primitive de x^n est $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$. Attention au signe de la valeur prise en -1.

CORRIGÉ

Primitive. La fonction $x \mapsto 3x^2 - 4x + 5$ est un polynôme, donc continue sur $[-1, 2]$. En primitivant terme à terme, une primitive est la fonction F définie par :

$$F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$$

Calcul. La valeur en -1 se met entre parenthèses :

$$\begin{aligned} I_1 &= F(2) - F(-1) \\ &= (8 - 8 + 10) \\ &\quad - (-1 - 2 - 5) \\ &= 10 - (-8) = 18 \end{aligned}$$

Conclusion. $I_1 = 18$.

2.

Calculer $I_2 = \int_{1}^{3} \left(\dfrac{2}{x} + x\right) \mathrm{d}x$.

INDICE

Sur $[1, 3]$, on a $x > 0$: une primitive de $\dfrac{1}{x}$ y est $\ln x$.

CORRIGÉ

Sur $[1, 3]$, on a $x > 0$: la fonction $x \mapsto \dfrac{2}{x} + x$ y est définie et continue. Une primitive sur $[1, 3]$ est $x \mapsto 2\ln x + \dfrac{x^2}{2}$, et $\ln 1 = 0$.

$$\begin{aligned} I_2 &= \left[2\ln x + \frac{x^2}{2}\right]_1^3 \\ &= \left(2\ln 3 + \frac{9}{2}\right) - \frac{1}{2} \\ &= 2\ln 3 + 4 \end{aligned}$$

Conclusion. $I_2 = 2\ln 3 + 4$.

3.

Pour $x > 0$, écrire $\dfrac{x^2 - 3}{x}$ comme une somme de deux termes, puis calculer $I_3 = \int_1^e \dfrac{x^2 - 3}{x}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Divise chacun des deux termes du numérateur par x.

CORRIGÉ

Transformation en somme. Pour tout $x > 0$:

$$\frac{x^2 - 3}{x} = x - \frac{3}{x}$$

Cette fonction est continue sur $[1, e]$.

Calcul. Une primitive sur $[1, e]$ est $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} - 3\ln x$. Avec $\ln e = 1$ et $\ln 1 = 0$:

$$\begin{aligned} I_3 &= \left[\frac{x^2}{2} - 3\ln x\right]_1^e \\ &= \left(\frac{e^2}{2} - 3\right) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{e^2 - 7}{2} \end{aligned}$$

Conclusion. Pour $x > 0$, $\dfrac{x^2 - 3}{x} = x - \dfrac{3}{x}$, et $I_3 = \dfrac{e^2 - 7}{2}$.

Attention. Un quotient ne se primitive pas en primitivant séparément son numérateur et son dénominateur : on le transforme d'abord en somme.

Exercice 2

Exponentielle d'une fonction affine : le facteur 1/a

1.

Calculer $J_1 = \int_0^1 e^{4x}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Dérive e^{4x} : quel facteur apparaît ? La primitive doit le compenser.

CORRIGÉ

Pour tout réel x, la dérivée de $x \mapsto e^{4x}$ vaut $4e^{4x}$. Une primitive de $x \mapsto e^{4x}$ sur $\mathbb{R}$ est donc $x \mapsto \dfrac{e^{4x}}{4}$.

$$\begin{aligned} J_1 &= \left[\frac{e^{4x}}{4}\right]_0^1 \\ &= \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{e^4 - 1}{4} \end{aligned}$$

Conclusion. $J_1 = \dfrac{e^4 - 1}{4}$.

2.

Calculer $J_2 = \int_{-1}^0 e^{-2x+1}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Ici le coefficient de x vaut -2 : le facteur est $-\dfrac{1}{2}$, et son signe compte.

CORRIGÉ

Pour tout réel x, la dérivée de $x \mapsto e^{-2x+1}$ vaut $-2e^{-2x+1}$. Une primitive de $x \mapsto e^{-2x+1}$ sur $\mathbb{R}$ est donc $x \mapsto -\dfrac{1}{2}e^{-2x+1}$.

$$\begin{aligned} J_2 &= \left[-\frac{1}{2}e^{-2x+1}\right]_{-1}^0 \\ &= -\frac{1}{2}e^1 + \frac{1}{2}e^3 \\ &= \frac{e^3 - e}{2} \end{aligned}$$

Contrôle. La fonction intégrée est positive et $-1 < 0$: on doit trouver un nombre positif. C'est le cas, car $e^3 > e$.

Conclusion. $J_2 = \dfrac{e^3 - e}{2}$.

3.

Calculer $J_3 = \int_0^{2\ln 2} e^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Le coefficient de x vaut $\dfrac{1}{2}$: le facteur est donc 2. Simplifie ensuite $e^{\ln 2}$.

CORRIGÉ

La dérivée de $x \mapsto 2e^{\frac{x}{2}}$ vaut $2 \times \dfrac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}}$: c'est une primitive de $x \mapsto e^{\frac{x}{2}}$ sur $\mathbb{R}$. De plus, $e^{\frac{2\ln 2}{2}} = e^{\ln 2} = 2$.

$$\begin{aligned} J_3 &= \left[2e^{\frac{x}{2}}\right]_0^{2\ln 2} \\ &= 2e^{\ln 2} - 2e^{0} \\ &= 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

Conclusion. $J_3 = 2$.

Exercice 3

Reconnaître u′/u et u′uⁿ

1.

Calculer $K_1 = \int_0^2 \dfrac{3}{3x+2}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Le numérateur est-il la dérivée du dénominateur ? Vérifie aussi que le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,2]$.

CORRIGÉ

Forme reconnue. Posons $u(x) = 3x+2$. Alors $u'(x) = 3$ et, pour tout $x \in [0,2]$, $u(x) \geq 2 > 0$. La fonction intégrée est $\dfrac{u'}{u}$; comme $u > 0$ sur $[0,2]$, une primitive y est $\ln u$.

Calcul.

$$\begin{aligned} K_1 &= \left[\ln(3x+2)\right]_0^2 \\ &= \ln 8 - \ln 2 \\ &= \ln 4 = 2\ln 2 \end{aligned}$$

Conclusion. $K_1 = 2\ln 2$.

2.

Calculer $K_2 = \int_0^1 \dfrac{e^x}{e^x+2}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Dérive le dénominateur et compare avec le numérateur.

CORRIGÉ

Posons $u(x) = e^x + 2$. Alors $u'(x) = e^x$ et $u(x) > 0$ pour tout réel x : une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln u$.

$$\begin{aligned} K_2 &= \left[\ln\left(e^x+2\right)\right]_0^1 \\ &= \ln(e+2) - \ln 3 \\ &= \ln\frac{e+2}{3} \end{aligned}$$

Conclusion. $K_2 = \ln\dfrac{e+2}{3}$.

3.

Calculer $K_3 = \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Écris le quotient sous la forme $\frac{1}{x} \times (\ln x)^2$: reconnais-tu $u'u^2$?

CORRIGÉ

Posons $u(x) = \ln x$ pour $x \in [1, e]$: $u'(x) = \frac{1}{x}$. La fonction intégrée s'écrit $u'u^2$; elle est continue sur $[1, e]$ et admet pour primitive $\frac{u^3}{3}$.

Avec $\ln e = 1$ et $\ln 1 = 0$:

$$\begin{aligned} K_3 &= \left[\frac{(\ln x)^3}{3}\right]_1^e \\ &= \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Conclusion. $K_3 = \frac{1}{3}$.

4.

Calculer $K_4 = \int_0^1 x\left(x^2+1\right)^3\,\mathrm{d}x$.

INDICE

La dérivée de $x^2 + 1$ est $2x$, et non x : fais apparaître le facteur 2.

CORRIGÉ

Forme reconnue. Posons $u(x) = x^2 + 1$, d'où $u'(x) = 2x$. Pour tout réel x :

$$x\left(x^2+1\right)^3 = \frac{1}{2}u'(x)\left(u(x)\right)^3$$

Primitive. Une primitive de $u'u^3$ est $\frac{u^4}{4}$. Une primitive de la fonction intégrée est donc $\frac{1}{2} \times \frac{u^4}{4}$, soit $x \mapsto \frac{\left(x^2+1\right)^4}{8}$.

Calcul.

$$\begin{aligned} K_4 &= \left[\frac{\left(x^2+1\right)^4}{8}\right]_0^1 \\ &= \frac{16}{8} - \frac{1}{8} = \frac{15}{8} \end{aligned}$$

Conclusion. $K_4 = \frac{15}{8}$.

Exercice 4

Une primitive proposée par l'énoncé

On considère les fonctions h et H définies sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$ et $H(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$.

1.

Montrer que H est une primitive de h sur $]0,+\infty[$.

INDICE

Dérive le quotient $\dfrac{\ln x}{x^2}$ avec la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, puis simplifie par x.

CORRIGÉ

Dérivabilité. Sur $]0,+\infty[$, les fonctions $x\mapsto\ln x$ et $x\mapsto x^2$ sont dérivables, et $x^2\neq 0$: le quotient H est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Numérateur de la dérivée. On applique $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u(x)=\ln x$ et $v(x)=x^2$. Pour tout $x>0$, le numérateur vaut :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x}\times x^2-\ln x\times 2x\\&=x-2x\ln x\\&=x\left(1-2\ln x\right)\end{aligned}$$

Simplification. Pour tout $x>0$:

$$\begin{aligned}H'(x)&=\frac{x\left(1-2\ln x\right)}{x^4}\\&=\frac{1-2\ln x}{x^3}=h(x)\end{aligned}$$

Conclusion. H est dérivable et $H'=h$ sur $]0,+\infty[$: H est une primitive de h sur cet intervalle. On n'a pas cherché à primitiver h : on a dérivé H.

2.

En déduire $L_1=\int_1^e h(x)\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Tu disposes déjà d'une primitive : sers-t'en directement.

CORRIGÉ

D'après la question 1, H est une primitive de h sur $]0,+\infty[$, qui contient $[1,e]$. Avec $\ln e=1$ et $\ln 1=0$:

$$\begin{aligned}L_1&=H(e)-H(1)\\&=\frac{\ln e}{e^2}-\frac{\ln 1}{1}\\&=\frac{1}{e^2}\end{aligned}$$

Conclusion. $L_1=\dfrac{1}{e^2}$.

3.

Calculer $L_2 = \int_{\sqrt{e}}^{e} h(x)\,\mathrm{d}x$, puis expliquer son signe à l'aide du signe de h sur $[\sqrt{e}, e]$.

INDICE

Souviens-toi que $\ln\sqrt{e} = \dfrac{1}{2}$. Pour le signe, résous $1 - 2\ln x \leq 0$.

CORRIGÉ

Calcul. On a $\ln\sqrt{e} = \dfrac{1}{2}$ et $\left(\sqrt{e}\right)^2 = e$, donc $H\left(\sqrt{e}\right) = \dfrac{1}{2e}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} L_2 &= H(e) - H\left(\sqrt{e}\right) \\ &= \frac{1}{e^2} - \frac{1}{2e} \\ &= \frac{2-e}{2e^2} \end{aligned}$$

Comme $e > 2$, $L_2 < 0$.

Explication du signe. Soit $x \in [\sqrt{e}, e]$. La fonction $\ln$ est croissante, donc $\ln x \geq \dfrac{1}{2}$, puis $1 - 2\ln x \leq 0$; comme $x^3 > 0$, on obtient $h(x) \leq 0$.

La fonction $-h$ est donc continue et positive sur $[\sqrt{e}, e]$, avec $\sqrt{e} \leq e$. Par positivité de l'intégrale, $\int_{\sqrt{e}}^{e} (-h(x))\,\mathrm{d}x \geq 0$, soit $L_2 \leq 0$.

Conclusion. $L_2 = \dfrac{2-e}{2e^2}$ est strictement négatif, ce qui était prévisible : $h \leq 0$ sur $[\sqrt{e}, e]$.

Exercice 5

Intégration par parties guidée : un polynôme et une exponentielle

On se propose de calculer $I = \int_0^1 (2x-1)e^{2x}\,\mathrm{d}x$.

1.

On pose $u(x) = 2x - 1$ et $v'(x) = e^{2x}$. Déterminer $u'(x)$ et une fonction v convenable, puis justifier que la formule d'intégration par parties s'applique sur $[0, 1]$.

INDICE

Pour v, cherche une primitive de e^{2x}, sans oublier le facteur $\dfrac{1}{2}$.

CORRIGÉ

Choix de u' et v. On a $u'(x) = 2$. La fonction v définie par $v(x) = \dfrac{e^{2x}}{2}$ convient, car $v'(x) = \dfrac{2e^{2x}}{2} = e^{2x}$.

Conditions. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 1]$, et leurs dérivées u' et v' y sont continues.

Conclusion. $u'(x) = 2$, $v(x) = \dfrac{e^{2x}}{2}$, et la formule d'intégration par parties s'applique sur $[0, 1]$.

2.

Calculer I.

INDICE

Écris d'abord le crochet $[u(x)v(x)]_0^1$, puis la nouvelle intégrale $\int_0^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$.

CORRIGÉ

Formule. Avec les fonctions de la question 1 :

$$I = \left[(2x-1)\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 2 \times \frac{e^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x$$

Le crochet.

$$\begin{aligned}&\left[(2x-1)\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1\\ &= \frac{e^2}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{e^2+1}{2}\end{aligned}$$

La nouvelle intégrale.

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{2x}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1\\ &= \frac{e^2-1}{2}\end{aligned}$$

Résultat.

$$\begin{aligned}I &= \frac{e^2+1}{2} - \frac{e^2-1}{2}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Conclusion. $I = 1$.

3.

Contrôle : vérifier que $G : x \mapsto (x-1)e^{2x}$ est une primitive de $x \mapsto (2x-1)e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$, et retrouver la valeur de I.

INDICE

Dérive le produit $(x-1) \times e^{2x}$.

CORRIGÉ

Dérivée de G. D'après la dérivée d'un produit, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} G'(x) &= e^{2x} + 2(x-1)e^{2x} \\ &= (1 + 2x - 2)e^{2x} \\ &= (2x-1)e^{2x} \end{aligned}$$

Donc G est une primitive de $x \mapsto (2x-1)e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$.

Valeur de I.

$$\begin{aligned} I &= G(1) - G(0) \\ &= 0 - (-1) = 1 \end{aligned}$$

Conclusion. G est une primitive de $x \mapsto (2x-1)e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$, et l'on retrouve $I = 1$: les deux méthodes concordent.

Exercice 6

Intégration par parties guidée : un polynôme et un logarithme

On se propose de calculer $J = \int_1^e x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$.

1.

Choisir u et v' pour une intégration par parties, en expliquant pourquoi on dérive $\ln x$ plutôt que x^2. Donner u' et v.

INDICE

Une primitive de $\ln x$ n'a rien d'immédiat, alors que sa dérivée $\dfrac{1}{x}$ se simplifiera avec une puissance de x.

CORRIGÉ

Choix. On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x^2$ sur $[1, e]$. Alors $u'(x) = \dfrac{1}{x}$, et l'on peut prendre $v(x) = \dfrac{x^3}{3}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1, e]$, et u' et v' y sont continues.

Pourquoi dériver $\ln x$. En dérivant $\ln x$, le logarithme disparaît : la nouvelle intégrale ne porte plus que sur une puissance de x, puisque $\dfrac{1}{x} \times \dfrac{x^3}{3} = \dfrac{x^2}{3}$. Dériver x^2 obligerait au contraire à primitiver $\ln x$.

Conclusion. $u(x) = \ln x$ et $u'(x) = \dfrac{1}{x}$; $v'(x) = x^2$ et $v(x) = \dfrac{x^3}{3}$.

2.

Calculer J, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

INDICE

Dans la nouvelle intégrale, simplifie $\dfrac{1}{x}\times\dfrac{x^3}{3}$ avant de primitiver.

CORRIGÉ

Intégration par parties. Avec les fonctions de la question 1, et comme $\ln e = 1$ et $\ln 1 = 0$, le crochet vaut $\dfrac{e^3}{3}$:

$$\begin{aligned} J &= \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e \\ &\quad - \int_1^e \frac{1}{x}\times\frac{x^3}{3}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{e^3}{3} - \int_1^e \frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Nouvelle intégrale.

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e \\ &= \frac{e^3-1}{9} \end{aligned}$$

Résultat.

$$\begin{aligned} J &= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3-1}{9} \\ &= \frac{3e^3 - e^3 + 1}{9} \\ &= \frac{2e^3+1}{9} \end{aligned}$$

Conclusion. $J = \dfrac{2e^3+1}{9}$, et $J \approx 4{,}57$ à 10^{-2} près.

3.

Contrôle : vérifier que $F : x \mapsto \dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{x^3}{9}$ est une primitive de $x \mapsto x^2 \ln x$ sur $]0, +\infty[$, puis retrouver J.

INDICE

Dérive le premier terme comme un produit.

CORRIGÉ

Dérivée de F. Pour tout $x > 0$, en dérivant le premier terme comme un produit :

$$\begin{aligned} F'(x) &= x^2 \ln x + \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} \\ &\quad - \frac{3x^2}{9} \\ &= x^2 \ln x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{3} \\ &= x^2 \ln x \end{aligned}$$

Donc F est une primitive de $x \mapsto x^2 \ln x$ sur $]0, +\infty[$.

Valeur de J. Avec $\ln e = 1$ et $\ln 1 = 0$:

$$\begin{aligned} J &= F(e) - F(1) \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{2e^3 + 1}{9} \end{aligned}$$

Conclusion. F est une primitive de $x \mapsto x^2 \ln x$ sur $]0, +\infty[$, et l'on retrouve $J = \dfrac{2e^3 + 1}{9}$.

Exercice 7

Chasles et linéarité, sans aucune primitive

Deux fonctions f et g, continues sur $[0,4]$, vérifient :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$$
$$\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = -5$$
$$\int_0^4 g(x)\,\mathrm{d}x = 3$$

1.

Calculer $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_4^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Relation de Chasles d'abord, échange des bornes ensuite.

CORRIGÉ

Relation de Chasles. La fonction f est continue sur $[0,4]$ et $1 \in [0,4]$:

$$\begin{aligned}\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x &= 2 + (-5)\\ &= -3\end{aligned}$$

Échange des bornes.

$$\begin{aligned}\int_4^0 f(x)\,\mathrm{d}x &= -\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= 3\end{aligned}$$

Conclusion. $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = -3$ et $\int_4^0 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$.

2.

Calculer $\int_0^4 (2f(x) - 3g(x))\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^4 (f(x) + 1)\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Linéarité ; et l'intégrale de la constante 1 sur $[0, 4]$ vaut la longueur de ce segment.

CORRIGÉ

Première intégrale. Par linéarité de l'intégrale, elle vaut $2\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x - 3\int_0^4 g(x)\,\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}&\int_0^4 (2f(x) - 3g(x))\,\mathrm{d}x\\&= 2 \times (-3) - 3 \times 3\\&= -15\end{aligned}$$

Seconde intégrale. Par linéarité, et comme l'intégrale de la constante 1 sur $[0, 4]$ vaut $[x]_0^4 = 4$:

$$\begin{aligned}&\int_0^4 (f(x) + 1)\,\mathrm{d}x\\&= -3 + 4 = 1.\end{aligned}$$

Conclusion. La première intégrale vaut -15, la seconde vaut 1.

3.

La fonction f peut-elle être positive sur tout l'intervalle $[1, 4]$? Justifier.

INDICE

Que dirait la positivité de l'intégrale si c'était le cas ?

CORRIGÉ

Raisonnons par l'absurde : supposons f positive sur $[1, 4]$. Comme f est continue et $1 \leq 4$, la positivité de l'intégrale donnerait :

$$\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$

Cela contredit la donnée $\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = -5$.

Conclusion. Non : f ne peut pas être positive sur tout l'intervalle $[1, 4]$; elle y prend au moins une valeur strictement négative.

4.

On suppose de plus que $g(x) \leq 2$ pour tout x de $[0, 4]$. Montrer que $\int_0^4 g(x)\,\mathrm{d}x \leq 8$, et vérifier que la donnée de l'énoncé est compatible.

INDICE

Intégrale et ordre, sur un segment dont les bornes sont dans le bon ordre.

CORRIGÉ

Les fonctions g et $x \mapsto 2$ sont continues sur $[0, 4]$, on a $g(x) \leq 2$ pour tout $x \in [0, 4]$, et $0 \leq 4$. D'après l'intégrale et l'ordre :

$$\begin{aligned}\int_0^4 g(x)\,\mathrm{d}x &\leq \int_0^4 2\,\mathrm{d}x \\ &= 2 \times 4 = 8\end{aligned}$$

Compatibilité. La valeur donnée, 3, vérifie bien $3 \leq 8$.

Conclusion. $\int_0^4 g(x)\,\mathrm{d}x \leq 8$, et la donnée de l'énoncé est compatible avec cette majoration.

Exercice 8

Aire sous une parabole, en unités d'aire puis en cm²

Dans un repère orthonormé dont l'unité mesure 1 cm sur chaque axe, on note $\mathcal{P}$ la courbe de la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = x^2 - 4x + 5$.

1.

Montrer que $p(x) = (x-2)^2 + 1$ pour tout réel x, et en déduire que p est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Développe $(x-2)^2$.

CORRIGÉ

Égalité. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(x-2)^2 + 1\\ &= x^2 - 4x + 4 + 1\\ &= x^2 - 4x + 5 = p(x)\end{aligned}$$

Signe. Pour tout réel x, un carré est positif ou nul : $(x-2)^2 \geq 0$, donc $p(x) \geq 1 > 0$.

Conclusion. Pour tout réel x, $p(x) = (x-2)^2 + 1$, et p est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

2.

Calculer, en unités d'aire, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par $\mathcal{P}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.

INDICE

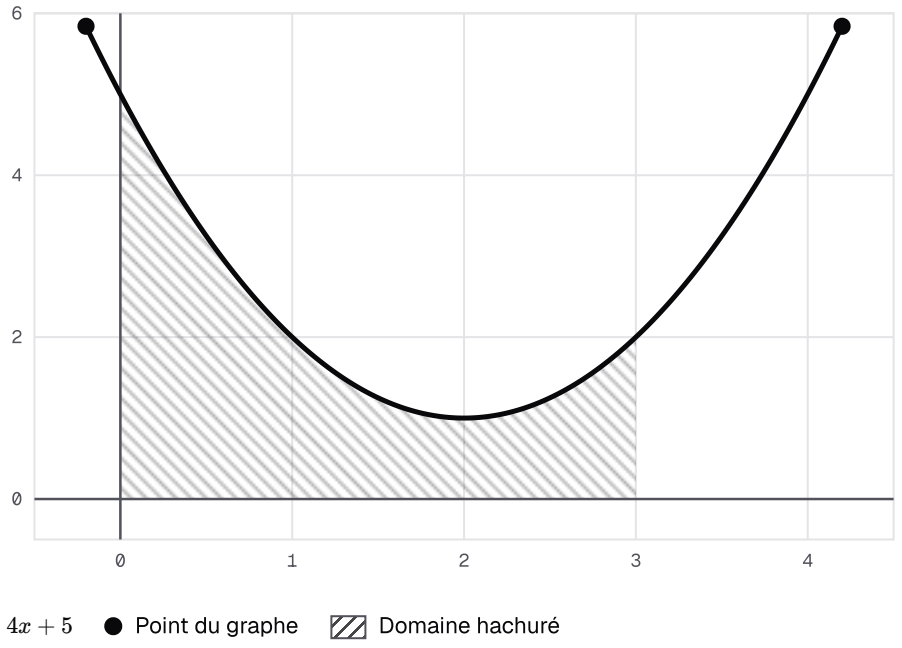
La fonction est positive : l'aire est directement l'intégrale de p entre les deux bornes.

CORRIGÉ

La fonction p est continue et positive sur $[0, 3]$ (question 1), et $0 \leq 3$: l'aire cherchée est l'intégrale de p sur $[0, 3]$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{0}^{3} \left(x^2 - 4x + 5\right) \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x\right]_{0}^{3} \\ &= 9 - 18 + 15 = 6\end{aligned}$$

Conclusion. $\mathcal{A} = 6$ unités d'aire.



La parabole P reste au-dessus de l'axe des abscisses ; le domaine mesuré est hachuré, de x = 0 à x = 3.

3.

Exprimer cette aire en cm².

INDICE

Combien mesure, en cm², le rectangle construit sur les deux vecteurs unités ?

CORRIGÉ

Le repère est orthonormé, d'unité 1 cm sur chaque axe : une unité d'aire est l'aire d'un carré de côté 1 cm, soit $1 \times 1 = 1$ cm². Donc $\mathcal{A} = 6 \times 1 = 6$ cm².

Conclusion. $\mathcal{A} = 6$ cm².

Attention. Le nombre change avec l'unité de longueur : si l'unité mesurait 3 cm sur chaque axe, une unité d'aire vaudrait 9 cm², et l'aire 54 cm².

Exercice 9

Valeurs moyennes : une vitesse et un quotient

1.

Lors d'un essai, la vitesse d'un mobile, en mètres par seconde, vaut $v(t) = 6t - t^2$ à l'instant t, exprimé en secondes, pour $t \in [0, 6]$. Calculer la vitesse moyenne μ du mobile sur $[0, 6]$.

INDICE

Valeur moyenne : l'intégrale, divisée par la longueur de l'intervalle.

CORRIGÉ

La fonction v est un polynôme, continue sur $[0, 6]$. Par définition de la valeur moyenne :

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{6-0}\int_0^6 \left(6t - t^2\right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{6}\left[3t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_0^6 \\ &= \frac{1}{6}(108 - 72) = 6 \end{aligned}$$

Conclusion. La vitesse moyenne du mobile sur $[0, 6]$ vaut $\mu = 6$ m/s.

2.

Déterminer les instants c de $[0, 6]$ où la vitesse est égale à cette vitesse moyenne.

INDICE

Résous l'équation du second degré $6c - c^2 = 6$.

CORRIGÉ

On cherche les réels $c \in [0, 6]$ tels que $v(c) = 6$. L'équation $6c - c^2 = 6$ équivaut à :

$$c^2 - 6c + 6 = 0$$

Résolution. Le discriminant vaut $36 - 24 = 12$, et $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Les solutions sont :

$$c_1 = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{2} = 3 - \sqrt{3}$$

$$c_2 = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{2} = 3 + \sqrt{3}$$

soit environ $1{,}27$ s et $4{,}73$ s. Comme $0 < 3 - \sqrt{3}$ et $3 + \sqrt{3} < 6$, les deux instants sont dans $[0, 6]$.

Conclusion. La vitesse est égale à la vitesse moyenne aux instants $3 - \sqrt{3}$ et $3 + \sqrt{3}$, en secondes.

3.

Calculer la valeur moyenne μ_w de la fonction $w : x \mapsto \dfrac{1}{x+2}$ sur $[0, 2]$, et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

INDICE

Sur $[0, 2]$, $x + 2 > 0$: une primitive de w y est $x \mapsto \ln(x + 2)$.

CORRIGÉ

Sur $[0, 2]$, $x + 2 > 0$: la fonction w y est continue, et une primitive est $x \mapsto \ln(x + 2)$.

$$\begin{aligned} \mu_w &= \frac{1}{2-0}\int_0^2 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln(x+2)\right]_0^2 \\ &= \frac{\ln 4 - \ln 2}{2} = \frac{\ln 2}{2} \end{aligned}$$

Conclusion. $\mu_w = \dfrac{\ln 2}{2}$, et $\mu_w \approx 0{,}35$ à 10^{-2} près.

Exercice 10

Un tronc de cône par le calcul intégral

L'espace est muni d'un repère orthonormé dont l'unité mesure 1 cm. On fait tourner autour de l'axe des abscisses la courbe de la fonction f définie sur $[0,2]$ par $f(x)=\dfrac{x}{2}+1$: c'est un segment, et le solide obtenu est un tronc de cône.

1.

Calculer, en unités de volume, le volume V de ce tronc de cône à l'aide d'une intégrale.

INDICE

Développe $(f(x))^2$ avant d'intégrer.

CORRIGÉ

Carré de f. La fonction f est continue sur $[0,2]$ et, pour tout $x\in[0,2]$:

$$(f(x))^2=\frac{x^2}{4}+x+1$$

Volume. D'après la formule du volume d'un solide de révolution :

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^2\left(\frac{x^2}{4}+x+1\right)\mathrm{d}x\\&=\pi\left[\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{2}+x\right]_0^2\\&=\pi\left(\frac{8}{12}+2+2\right)\\&=\frac{14\pi}{3}\end{aligned}$$

Conclusion. $V=\dfrac{14\pi}{3}$ unités de volume.

2.

Le volume d'un tronc de cône de hauteur h et de rayons r et R vaut $\frac{\pi h}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right)$. Identifier h, r et R ici, puis comparer avec le résultat précédent.

INDICE

Les rayons sont les valeurs de f aux bornes ; la hauteur est la longueur de l'intervalle.

CORRIGÉ

Identification. La hauteur est la longueur de l'intervalle : $h=2-0=2$. Les rayons sont les valeurs de f aux bornes : $r=f(0)=1$ et $R=f(2)=2$.

Formule du tronc de cône.

$$\begin{aligned}&\frac{\pi h}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right)\\&=\frac{2\pi}{3}(4+2+1)\\&=\frac{14\pi}{3}\end{aligned}$$

Conclusion. $h=2$, $r=1$ et $R=2$; la formule redonne $\frac{14\pi}{3}$: les deux calculs concordent.

3.

Donner V en cm³, puis une valeur approchée au dixième.

INDICE

L'unité de longueur mesure 1 cm : une unité de volume vaut donc $1^3=1$ cm³.

CORRIGÉ

L'unité de longueur mesure 1 cm, donc une unité de volume vaut $1^3=1$ cm³.

Conclusion. $V=\frac{14\pi}{3}$ cm³, soit environ $14{,}7$ cm³.