BURHAN

Calcul intégral

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/calcul-integral/cours

Chapitre	Semestre
Calcul intégral	Semestre 2

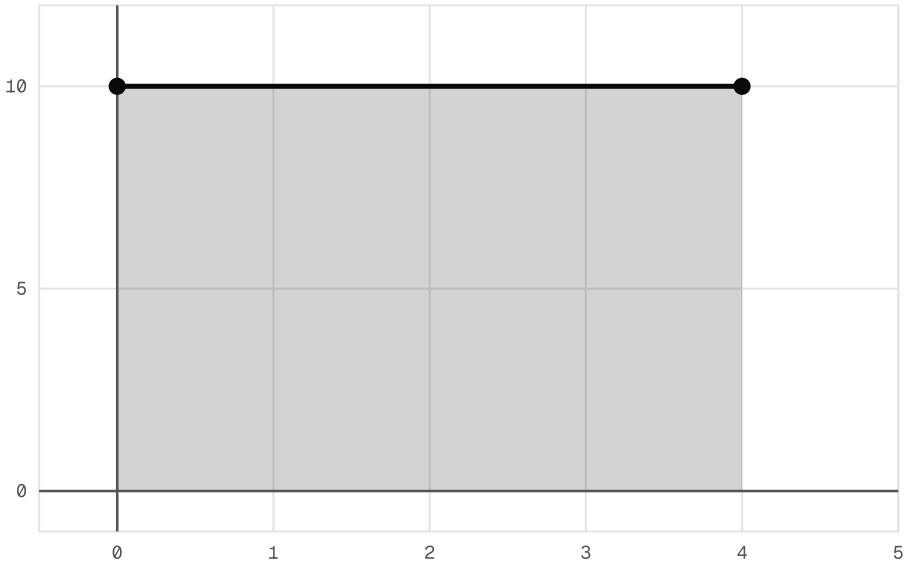
Une distance cachée sous une courbe

Un scooter qui démarre

Un scooter roule à 10 m/s pendant 4 s. Il parcourt $10 \times 4 = 40$ m.

Trace sa vitesse en fonction du temps : c'est un segment horizontal. Les 40 m sont l'**aire** du rectangle sous ce segment.

Au feu vert, c'est moins simple : la vitesse change à chaque instant. Après t secondes, elle vaut t^2 m/s. On regarde les 3 premières secondes.



Vitesse constante de 10 m/s pendant 4 s : la distance parcourue est l'aire du rectangle teinté sous le segment.

Devine : La distance du démarrage

Si la vitesse montait régulièrement de 0 à 9 m/s, le scooter ferait $13{,}5$ m : l'aire d'un triangle. Ici, la vitesse vaut t^2 m/s, de $t = 0$ à $t = 3$. Que dire de la distance parcourue ?

A. Elle vaut $13{,}5$ m : la vitesse part de 0 et finit à 9 m/s dans les deux cas.
Faux.

Les vitesses de départ et d'arrivée ne suffisent pas. Entre les deux, t^2 reste sous $3t$: à $t = 1$, on roule à 1 m/s au lieu de 3 m/s.

B. Elle est plus petite que $13{,}5$ m.

Juste.

Pour $0 < t < 3$, $t^2 < 3t$: le scooter roule toujours moins vite que dans le cas régulier.

C. Elle est plus grande que $13{,}5$ m, car t^2 grandit de plus en plus vite.

Faux.

La vitesse accélère surtout à la fin. Mais elle part de beaucoup plus bas : à $t = 1$, elle ne vaut que 1 m/s.

D. Elle vaut 27 m, soit 9 m/s pendant 3 s.

Faux.

9 m/s est la vitesse finale seulement. Avant $t = 3$, le scooter n'a jamais roulé aussi vite.

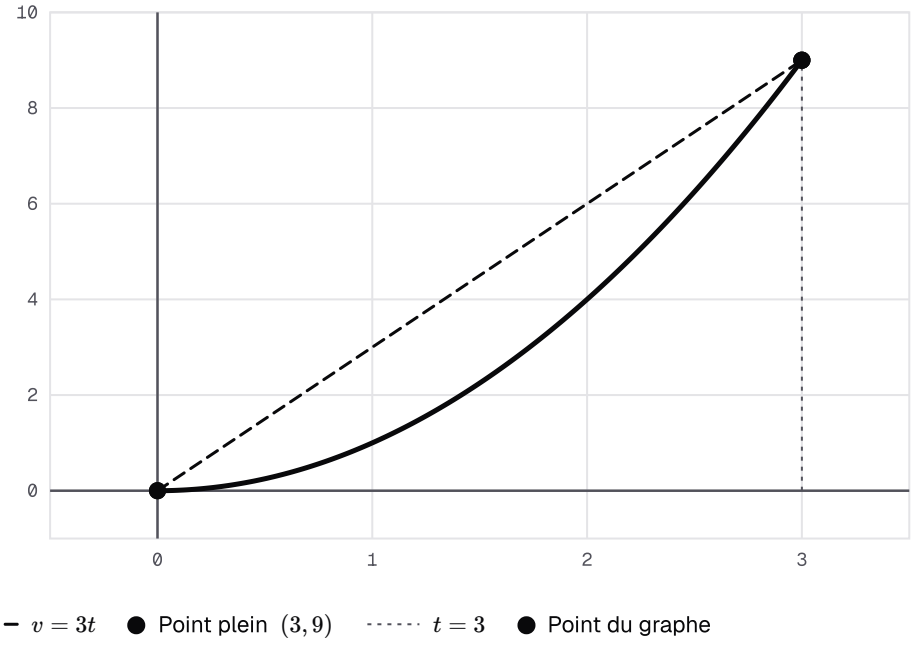
Correction

Dans le cas régulier, la vitesse vaut $3t$ m/s. Or, pour tout $t \in [0, 3]$:

$$t^2 - 3t = t(t - 3) \leq 0.$$

À chaque instant, le scooter va donc moins vite : la distance est **plus petite** que $13{,}5$ m. Reste à trouver sa valeur exacte.

La distance est une aire



La vitesse v = t² du scooter entre t = 0 et t = 3, avec la vitesse régulière v = 3t en pointillés.

Comme pour le rectangle, la distance est l'aire sous la courbe de la vitesse. Comment la calculer ?

Note $d(t)$ la distance parcourue à l'instant t. Sa dérivée est la vitesse : $d'(t) = t^2$. Donc d est une **primitive** de $t \mapsto t^2$, nulle en 0 :

$$d(t) = \frac{t^3}{3}.$$

En 3 s, le scooter parcourt $d(3) - d(0) = 9$ m.

Ce que tu vas construire

Une aire, obtenue comme l'écart entre deux valeurs d'une primitive : c'est l'**intégrale**.

Tu vas la définir, puis la calculer de deux façons. Tu t'en serviras ensuite pour des aires. Plus brièvement, tu verras aussi des valeurs moyennes et des volumes.

Le calcul intégral figure dans les 15 sujets de bac consultés. Le plus souvent, il y tient en quelques questions, à la fin d'une étude de fonction. La plus fréquente demande une aire : c'est le cas dans 12 des 15 sujets.

Intégrale d'une fonction continue : définition par une primitive

Rappel : les primitives

Rappel des chapitres « Fonctions primitives », « Logarithmes » (pour $\ln x$) et « Exponentielles » (pour e^x).

Une fonction F est une **primitive** de f sur un intervalle I si $F'(x) = f(x)$ pour tout x de I. Toute fonction continue sur I en possède. Deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante.

$f(x)$	une primitive $F(x)$	sur
k	kx	$\mathbb{R}$
x^n, $n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}$	$]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

> **Devine : Une constante de trop**
>
> Le scooter avait pour vitesse t^2. Les fonctions $t \mapsto \dfrac{t^3}{3}$ et $G : t \mapsto \dfrac{t^3}{3} + 5$ sont deux primitives de $t \mapsto t^2$. Que vaut $G(3) - G(0)$?
>
> **A.** 14 : la constante 5 s'ajoute au résultat.
> **Faux.**
> $G(3) = 9 + 5 = 14$, mais $G(0) = 5$: la constante figure dans les deux termes.
>
> **B.** On ne peut pas savoir : il faut d'abord choisir la bonne primitive.

Faux.
Toutes les primitives donnent le même écart : la constante disparaît dans la différence.

C. 9, comme avec $t \mapsto \dfrac{t^3}{3}$.

Juste.
$G(3) - G(0) = 14 - 5 = 9$: la constante 5 s'élimine.

Correction
On calcule :

$$\begin{aligned} G(3) - G(0) &= (9 + 5) - (0 + 5) \\ &= 9. \end{aligned}$$

Plus généralement, si $G(x) = F(x) + c$ pour tout x, avec c constante, alors $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$. Le résultat ne dépend donc pas de la primitive choisie.

La définition

Cet écart $F(b) - F(a)$ mérite un nom. On le calcule avec n'importe quelle primitive. Pour la vitesse du scooter, il donnait une distance, c'est-à-dire une aire.

Définition : Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I, et F une primitive de f sur I. Le réel $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive F choisie : on l'appelle **intégrale de f de a à b**, et on note

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemple : une première intégrale

Calculons $\displaystyle\int_0^1 \left(3x^2 + 1\right)\mathrm{d}x$.

La fonction $x \mapsto 3x^2 + 1$ est continue sur $[0, 1]$. Elle a pour primitive $x \mapsto x^3 + x$. Donc :

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left(3x^2 + 1\right)\mathrm{d}x \\ &= \big[x^3 + x\big]_0^1 \\ &= (1 + 1) - (0 + 0) = 2. \end{aligned}$$

On lit « intégrale de 0 à 1 de $3x^2 + 1$ ». Les réels 0 et 1 sont les **bornes**.

Le crochet

Le crochet $[F(x)]_a^b$ vaut $F(b) - F(a)$. On calcule d'abord la valeur en haut, puis on retranche la valeur en bas.

Quand $F(a)$ est négatif, mets-le entre parenthèses.

Attention : Borne du haut d'abord, parenthèses ensuite

✗ $\left[-\frac{1}{x}\right]_1^4 = -\frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{4}$.

✓ $\left[-\frac{1}{x}\right]_1^4 = -\frac{1}{4} - (-1) = \frac{3}{4}$.

Ce crochet calcule $\int_1^4 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$. La fonction intégrée est positive, et $1 < 4$: un résultat négatif devait t'alerter.

Vérifie : Une borne négative

Que vaut $\int_{-1}^{2} x^2\,\mathrm{d}x$?

A. 3

Juste.
$\frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{3} = 3$.

B. $\frac{7}{3}$

Faux.
C'est $\frac{8}{3} - \frac{1}{3}$: les parenthèses autour de $-\frac{1}{3}$ ont été oubliées.

C. -3

Faux.
C'est la valeur en -1 moins la valeur en 2 : les bornes sont inversées.

D. $\frac{8}{3}$

Faux.
C'est la valeur en 2 seule : la borne du bas a été oubliée.

Correction

Une primitive de $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto \frac{x^3}{3}$. Donc :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} x^2\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} \\ &= \frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= 3.\end{aligned}$$

Bornes égales, bornes échangées

Devine : Bornes dans le désordre

Applique la définition, même si la borne du bas est la plus grande. Que vaut $\int_3^1 2t\,\mathrm{d}t$?

A. 8

Faux.
8 est l'intégrale de 1 à 3. Échanger les bornes change le signe.

B. 0

Faux.
Une intégrale est nulle quand ses bornes sont égales. Ici, $3 \neq 1$.

C. Elle n'existe pas : la borne du bas doit être la plus petite.

Faux.
Les bornes peuvent être dans n'importe quel ordre. Seul le signe change.

D. -8

Juste.
$\left[t^2\right]_3^1 = 1 - 9 = -8$: la borne du haut est ici 1.

Correction
Une primitive de $t \mapsto 2t$ est $t \mapsto t^2$. Donc :

$$\begin{aligned}\int_3^1 2t\,\mathrm{d}t &= \left[t^2\right]_3^1 \\ &= 1 - 9 = -8.\end{aligned}$$

C'est bien l'opposé de $\int_1^3 2t\,\mathrm{d}t = 9 - 1 = 8$.

La définition règle donc deux cas toute seule.

- Si on échange les bornes, l'écart change de signe.
- Si $a = b$, l'écart $F(a) - F(a)$ est nul.

Enfin, le nom de la variable ne compte pas : avec x ou avec t, le résultat est le même.

Propriété : Conventions et variable muette

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b deux éléments de I. Alors

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

La variable d'intégration est muette : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple : sans aucun calcul

- $\displaystyle\int_2^2 \left(x^3 - 5x\right) \mathrm{d}x = 0$: les deux bornes sont égales.
- On sait que $\displaystyle\int_0^1 3x^2 \,\mathrm{d}x = \left[x^3\right]_0^1 = 1$. Donc $\displaystyle\int_1^0 3x^2 \,\mathrm{d}x = -1$.

Continue sur tout le segment

Attention : Pas d'intégrale à travers une valeur interdite

✗ Ce calcul est faux :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{2} \\ &= -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Il n'a aucun sens : la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ n'est pas définie en 0, qui est entre -1 et 2.

Une intégrale n'existe ici que pour une fonction **continue sur tout le segment**.

Avant chaque calcul, cherche donc les valeurs interdites.

Par exemple, $\ln x$ n'existe que pour $x > 0$. On peut écrire $\displaystyle\int_1^e \ln x \,\mathrm{d}x$, mais jamais $\displaystyle\int_{-1}^1 \ln x \,\mathrm{d}x$.

De même, la primitive $\ln|u|$ de $\dfrac{u'}{u}$ exige que u ne s'annule pas sur le segment.

Une intégrale qui dépend de sa borne

Fixe la borne du bas et fais varier celle du haut. Par exemple, pour tout réel $x > 0$:

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t &= \left[\ln t\right]_1^x \\ &= \ln x - \ln 1 = \ln x.\end{aligned}$$

Tu retrouves $\ln$, la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1. Ce n'est pas un hasard.

Théorème : L'intégrale comme fonction de sa borne supérieure

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un élément de I. La fonction φ définie sur I par

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t) \,\mathrm{d}t$$

est la primitive de f sur I qui s'annule en a : $\varphi(a) = 0$ et $\varphi'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

En particulier, si g est dérivable sur I et si g' est continue sur I, alors $\int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}x = g(b) - g(a)$ pour tous a, b de I.

Exemple : dériver une intégrale

Pour tout réel x, posons $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x 2t\,\mathrm{d}t$.

Le calcul direct donne $\varphi(x) = \left[t^2\right]_0^x = x^2$. On a bien $\varphi(0) = 0$ et, pour tout réel x, $\varphi'(x) = 2x$.

La dérivée redonne la fonction intégrée, écrite en x.

Vérifie : Sans primitive connue

Pour tout réel x, on pose $\psi(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Aucune primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$ ne s'écrit avec les fonctions usuelles. Que vaut $\psi'(x)$?

A. $-2x\,e^{-x^2}$

Faux.
C'est la dérivée de e^{-x^2}. Or ψ est une primitive de cette fonction : on ne dérive pas une seconde fois.

B. e^{-x^2}

Juste.
La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$: ψ est sa primitive qui s'annule en 0.

C. 0, car $\psi(0) = 0$.

Faux.
$\psi(0) = 0$ donne une valeur en un point, pas la dérivée.

D. $e^{-x^2} - 1$, en retranchant la valeur en 0.

Faux.
La valeur en 0 se retranche dans $\psi(x)$, pas dans sa dérivée. Une constante retranchée disparaît en dérivant.

Correction
La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. D'après l'énoncé précédent, ψ est sa primitive qui s'annule en 0.

Donc, pour tout réel x, $\psi'(x) = e^{-x^2}$, sans aucun calcul d'intégrale.

Calcul d'intégrales à l'aide de primitives

Trois formes composées

Devine : Lire une dérivée à l'envers

Le chapitre « Exponentielles » t'a appris à dériver e^u : si u est dérivable, $(e^u)' = u'e^u$. Quelle fonction a pour dérivée $x \mapsto u'(x)\, e^{u(x)}$?

A. $x \mapsto u(x)\, e^{u(x)}$

Faux.
C'est un produit : sa dérivée vaut $u'e^u + u\,u'e^u$, avec un terme de trop.

B. $x \mapsto e^{u'(x)}$

Faux.
Sa dérivée fait apparaître la dérivée de u', et non $u'e^u$.

C. $x \mapsto u'(x)\, e^{u(x)}$ elle-même

Faux.
En la dérivant, il faudrait aussi dériver u' : on n'obtient pas la même fonction en général.

D. $x \mapsto e^{u(x)}$

Juste.
Oui : c'est l'égalité $(e^u)' = u'e^u$, lue de droite à gauche.

Correction
D'après la dérivée de e^u, $(e^u)' = u'e^u$.

Lue de droite à gauche, cette égalité donne une fonction dont la dérivée est $u'e^u$: c'est exactement ce que demande la définition d'une primitive. Le paragraphe suivant le justifie en deux lignes.

Pourquoi e^u est une primitive de $u'e^u$. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Dérivée d'une composée (chapitre « Exponentielles ») : $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $(e^u)'(x) = u'(x)\, e^{u(x)}$ pour tout x de I.
- Définition d'une primitive (chapitre « Fonctions primitives ») : $x \mapsto e^{u(x)}$ est donc une primitive de $x \mapsto u'(x)\, e^{u(x)}$ sur I.

Conséquence. Si de plus u' est continue sur I, alors pour tous a, b de I :

$$\int_a^b u'(x)\, e^{u(x)}\, \mathrm{d}x = e^{u(b)} - e^{u(a)}.$$

Voici les trois formes composées de ce chapitre, pour u dérivable de dérivée continue. La première vient du chapitre « Fonctions primitives », la deuxième du chapitre « Logarithmes », la troisième de la justification que tu viens de lire.

forme	une primitive
$u'u^n$, $n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{u'}{u}$, u sans zéro	$\ln \lvert u \rvert$
$u'e^u$	e^u

Dérive chaque primitive : tu retrouves la forme. Tu t'en serviras dans tout ce chapitre.

Vérifie : Reconnaître la forme

Quelle forme reconnais-tu dans $\dfrac{\ln x}{x}$, pour $x > 0$?

A. $\dfrac{u'}{u}$, avec $u : x \mapsto x$, multipliée par $\ln x$.

Faux.

Avec $u : x \mapsto x$, on a $\dfrac{u'}{u} = \dfrac{1}{x}$: le facteur $\ln x$ reste, et ce n'est plus une forme du tableau.

B. Aucune des trois : il faut intégrer par parties.

Faux.

Inutile ici : une forme du tableau convient, et la primitive se lit directement.

C. $u'u^n$, avec $u : x \mapsto \ln x$ et $n = 1$.

Juste.

$\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{1}{x} \times \ln x$: c'est $u' \times u$.

D. $u'e^u$, avec $u : x \mapsto \ln x$, car $e^{\ln x} = x$.

Faux.

Avec ce choix, $u'e^u = \dfrac{1}{x} \times x = 1$, et non $\dfrac{\ln x}{x}$.

Correction

Pour $x > 0$, on écrit :

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln x = u'(x)\,u(x),$$

avec $u : x \mapsto \ln x$. Une primitive est $\dfrac{u^2}{2}$, soit $x \mapsto \dfrac{(\ln x)^2}{2}$ sur $]0, +\infty[$.

Vérifie en dérivant : $\dfrac{1}{2} \times 2 \ln x \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{\ln x}{x}$.

La méthode

Méthode : intégrer avec une primitive

1. **Continuité** : la fonction est-elle continue sur tout le segment ? Sinon, pas d'intégrale.
2. **Forme** : fonction usuelle, somme, multiple, ou forme composée du tableau. Écris u et u'.
3. **Crochet** : écris $[F(x)]_a^b$, puis la différence, avec $F(a)$ entre parenthèses.
4. **Valeur exacte** : simplifie les logarithmes et les exponentielles. Une valeur approchée vient en dernier.

Exemple : deux formes composées

Forme $\frac{u'}{u}$. Pour $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$, pose $u(x) = x^2+x+1$ pour tout réel x. Alors $u'(x) = 2x+1$.

Le discriminant de x^2+x+1 vaut -3, et le coefficient de x^2 est positif : $u(x) > 0$ pour tout réel x. Donc :

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\ln\left(x^2+x+1\right)\right]_0^1\\ &= \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.\end{aligned}$$

Forme $u'e^u$. Avec $u : x \mapsto x^2$, de dérivée $x \mapsto 2x$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 2x\,e^{x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[e^{x^2}\right]_0^1\\ &= e - 1.\end{aligned}$$

Ajuster un facteur. Pour $\dfrac{x^2}{x^3+1}$, la dérivée de x^3+1 est $3x^2$: il manque un facteur 3. Fais apparaître u' en multipliant et en divisant par 3. Comme $x^3+1 > 0$ sur $[0,1]$:

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{3x^2}{x^3+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}\left[\ln\left(x^3+1\right)\right]_0^1\\ &= \frac{1}{3}\ln 2.\end{aligned}$$

Le facteur oublié

Attention : Dérive ta primitive pour la contrôler

✗ $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[e^{2x}\right]_0^{\ln 2} = 4 - 1 = 3.$

✓ $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^{\ln 2} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}.$

La dérivée de $x \mapsto e^{2x}$ est $x \mapsto 2e^{2x}$: il faut diviser par 2.

Pour $a \neq 0$, une primitive de $x \mapsto e^{ax+b}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{a}e^{ax+b}$.

À toi : une exponentielle

Calcule $\displaystyle\int_0^{\ln 3} e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Indice 1

Écris e^{-x} sous la forme e^{ax+b} : que vaut a ?

Indice 2

Une primitive est $x \mapsto -e^{-x}$. Dérive-la pour vérifier.

Indice 3

$e^{-\ln 3} = \dfrac{1}{3}$. Attention aux parenthèses autour de la valeur en 0.

Réponse

Ici $a = -1$: une primitive de $x \mapsto e^{-x}$ est $x \mapsto -e^{-x}$. Avec $e^{-\ln 3} = \dfrac{1}{3}$:

$$\begin{aligned}&\int_0^{\ln 3} e^{-x}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[-e^{-x}\right]_0^{\ln 3}\\ &= -\frac{1}{3} - (-1)\\ &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Vérifier une primitive donnée

Au bac, la primitive est souvent **donnée** : « Vérifier que H est une primitive de h sur I ». Cette question figure dans 10 des 15 sujets consultés.

Bonne nouvelle : il n'y a rien à chercher. Il suffit de dériver H.

Méthode : vérifier, puis intégrer

1. **Dérive** H sur I, avec les formules de dérivation.
2. **Compare** : montre que $H'(x) = h(x)$ pour tout x de I. C'est la définition d'une primitive.
3. **Conclus** : l'intégrale de h de a à b vaut $H(b) - H(a)$, avec cette même fonction H.

Ne cherche pas à primitiver h toi-même : c'est plus long, et ce n'est pas la question.

Exemple : un polynôme fois l'exponentielle

Soit h et H les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 e^x$ et $H(x) = \left(x^2 - 2x + 2\right) e^x$.

Par la dérivée d'un produit, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&H'(x)\\ &= (2x - 2)e^x + \left(x^2 - 2x + 2\right) e^x\\ &= \left(2x - 2 + x^2 - 2x + 2\right) e^x\\ &= x^2 e^x = h(x).\end{aligned}$$

Donc H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2 e^x \,\mathrm{d}x &= H(2) - H(0)\\ &= 2e^2 - 2.\end{aligned}$$

Coin examen

Trouve l'erreur : Une copie à corriger

On donne les fonctions G et g définies sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = (2x-3)e^x$ et $g(x) = (2x-1)e^x$. Il faut vérifier que G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$. Un élève écrit :

> $G'(1) = 2e + (2-3)e = e$ et $g(1) = (2-1)e = e$. Donc G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

Où est l'erreur ?

A. La dérivée du produit est fausse.

Faux.
$G'(1) = 2e^1 + (2\times 1 - 3)e^1 = e$: ce calcul est juste.

B. Il fallait comparer $G(1)$ et $g(1)$.

Faux.
C'est la dérivée de G qui doit donner g, pas G elle-même. D'ailleurs $G(1) = -e$.

C. Une égalité en $x = 1$ ne suffit pas.

Juste.
Il faut l'égalité $G'(x) = g(x)$ pour chaque réel x, pas en un seul point.

D. Il fallait chercher une primitive de g.

Faux.
La primitive est donnée : la dériver suffit, et c'est plus court.

Correction
Une égalité en $x = 1$ ne prouve rien pour les autres réels. On dérive donc G : pour tout réel x,

$$\begin{aligned}G'(x) &= 2e^x + (2x-3)e^x\\ &= (2x-1)e^x = g(x).\end{aligned}$$

Donc G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

Méthode : Coin examen : la rédaction attendue

Dans les barèmes lus, cette question vaut de $0{,}25$ à $0{,}75$ point. Avec la déduction de l'intégrale, c'est souvent $0{,}25 + 0{,}25$.

> H est dérivable sur I et, pour tout x de I, $H'(x) = \ldots = h(x)$. Donc H est une primitive de h sur I. Par suite, $\displaystyle\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = H(b) - H(a) = \ldots$

Écris la dérivée en entier : le correcteur lit chaque ligne.

À toi : en déduire une intégrale

Avec G de l'activité précédente, calcule $\displaystyle\int_0^1 (2x-1)e^x \,\mathrm{d}x$.

Indice 1

G est une primitive de $x \mapsto (2x-1)e^x$: sers-t'en directement.

Indice 2

Calcule $G(1)$ et $G(0)$.

Indice 3

$G(0) = (0-3)e^0 = -3$: mets-le entre parenthèses.

Réponse

G est une primitive de $x \mapsto (2x-1)e^x$ sur $\mathbb{R}$. Donc :

$$\begin{aligned}&\int_0^1 (2x-1)e^x \,\mathrm{d}x\\ &= G(1) - G(0)\\ &= -e - (-3)\\ &= 3 - e.\end{aligned}$$

Garde ce résultat : tu le retrouveras par une autre méthode.

Propriétés de l'intégrale

Découper une intégrale

Devine : Deux morceaux

Une fonction f est continue sur $[0,4]$. On sait que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ et $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$. Que vaut $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$?

A. 7

Juste.

Avec une primitive F : $F(1) - F(0) + F(4) - F(1) = F(4) - F(0)$.

B. 3

Faux.

C'est $5 - 2$. Or les deux morceaux se mettent bout à bout : ils s'ajoutent.

C. 10

Faux.

Le produit 2×5 n'a pas de sens ici : les morceaux s'ajoutent.

D. On ne peut pas savoir sans connaître f.

Faux.

Les deux morceaux suffisent : la valeur en 1 s'élimine dans la somme.

Correction

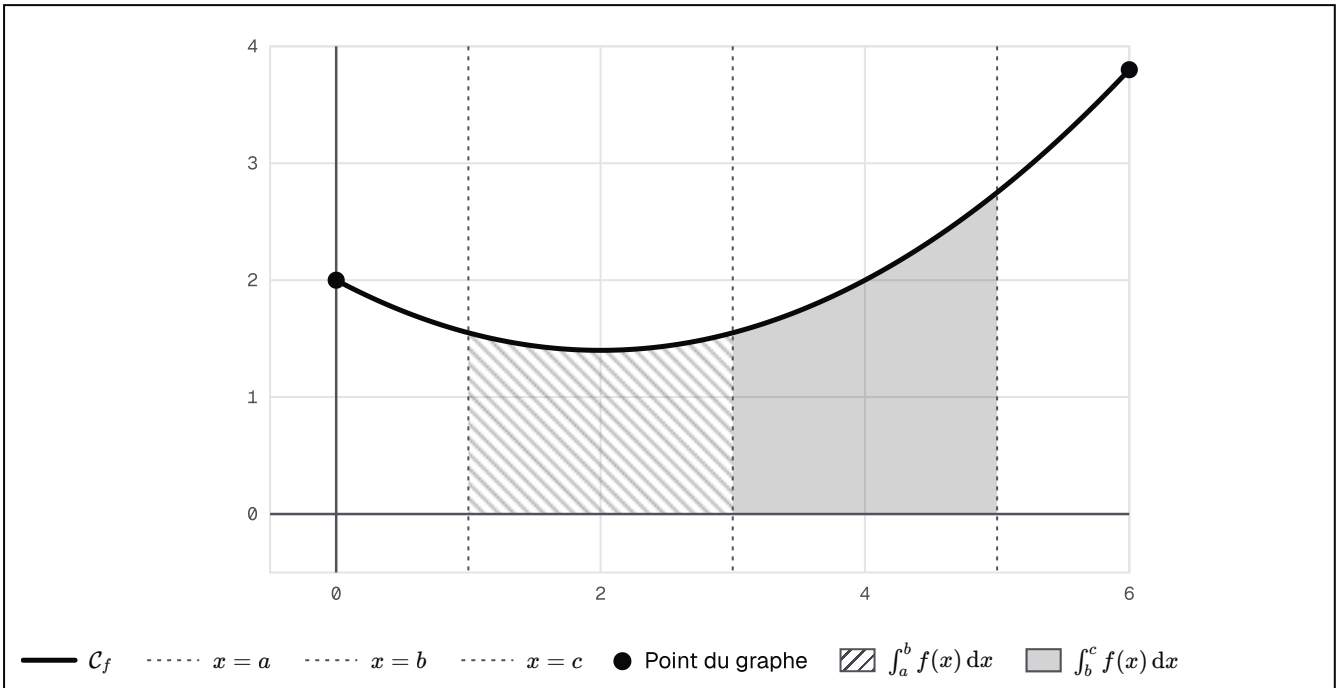
Soit F une primitive de f sur $[0, 4]$. Alors :

$$\begin{aligned}&\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= F(1) - F(0) + F(4) - F(1) \\ &= F(4) - F(0).\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 + 5 = 7$.

Pour une fonction positive, les deux aires se juxtaposent.

Ce calcul vaut pour toute fonction continue. Les propriétés de cette section sont **admises**. Chacune se lit sur une aire.



Relation de Chasles lue sur une aire : le domaine sous la courbe, de a à c, est la réunion du domaine de a à b et du domaine de b à c.

Propriété : Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous réels a, b et c de I :

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple : découper la distance du scooter

Avec $x \mapsto x^2$ entre 0 et 3, découpé en 1 :

$$\begin{aligned}&\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^3 x^2\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3} + \left(9 - \frac{1}{3}\right)\\ &= 9 = \int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On retrouve les 9 m du scooter : la première seconde n'en couvre qu'un tiers de mètre.

Sommes et multiples

Une primitive d'une somme est la somme des primitives. Une primitive de αf est αF. Les intégrales suivent donc les mêmes règles.

Propriété : Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux éléments de I, et α un réel. Alors

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple : séparer les termes

Par linéarité :

$$\begin{aligned}&\int_1^e \left(2 + \frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_1^e 2\,\mathrm{d}x + 3\int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= 2(e-1) + 3(\ln e - \ln 1)\\ &= 2e + 1.\end{aligned}$$

Dans l'autre sens, la linéarité permet de **regrouper** deux intégrales sur le même segment.

Signe et ordre

Une fonction positive délimite une aire positive. Si f est au-dessous de g, l'intégrale de f est la plus petite.

Pour deux fonctions positives, cela se lit sur les aires. Ces lectures supposent la borne du bas inférieure ou égale à celle du haut.

Propriété : Positivité

Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$, et f une fonction continue sur $[a, b]$. Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Propriété : Intégrale et ordre

Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$, et f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vérifie : Comparer sans calculer

Sans calculer, compare $I = \displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x$.

A. $I \leq J$, car $3 > 2$.

Faux.

Sur $[0, 1]$, une puissance plus grande donne une valeur plus petite : $0{,}5^3 = 0{,}125$ et $0{,}5^2 = 0{,}25$.

B. $I = J$

Faux.

Les deux fonctions ne sont égales qu'en 0 et en 1 : les intégrales diffèrent.

C. $J \leq I$

Juste.

Pour $x \in [0, 1]$, $x^3 = x \times x^2 \leq x^2$, et $0 \leq 1$.

D. On ne peut rien dire : J peut être négatif.

Faux.

$x^3 \geq 0$ sur $[0, 1]$: par positivité, $J \geq 0$.

Correction

Soit $x \in [0, 1]$. On a $x^3 = x \times x^2$, avec $0 \leq x \leq 1$ et $x^2 \geq 0$, donc $x^3 \leq x^2$.

Comme $0 \leq 1$, la propriété « intégrale et ordre » donne $J \leq I$.

Le calcul le confirme : $J = \dfrac{1}{4}$ et $I = \dfrac{1}{3}$.

Intégrale et aire

Devine : Une parabole qui traverse l'axe

La courbe de $x \mapsto x^2 - 1$ est sous l'axe des abscisses sur $[0, 1[$ et au-dessus sur $]1, 2]$. Que représente le nombre $\displaystyle\int_0^2 \left(x^2 - 1\right) \mathrm{d}x$?

A. L'aire totale du domaine entre la courbe et l'axe, de 0 à 2.

Faux.

La partie sous l'axe compte **négativement** : l'intégrale n'est pas l'aire totale.

B. L'aire au-dessus de l'axe moins l'aire au-dessous.

Juste.

Sur $[0, 1]$, la fonction est négative : cette aire est retranchée.

C. Seulement l'aire au-dessus de l'axe.

Faux.

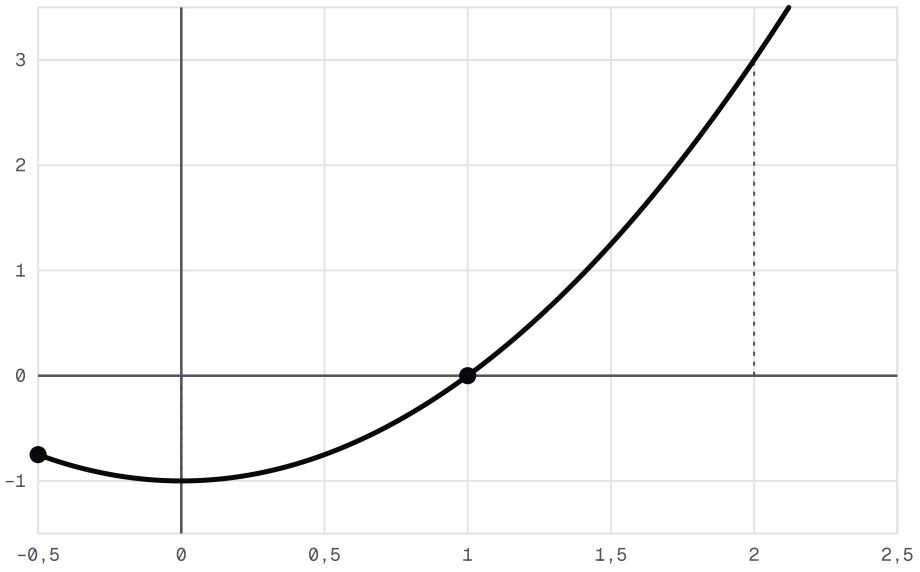
La partie située sur $[0, 1]$ compte aussi, avec un signe moins.

Correction

On calcule :

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left(x^2 - 1\right) \mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

L'aire au-dessous de l'axe vaut $\dfrac{2}{3}$, celle au-dessus $\dfrac{4}{3}$. L'intégrale est leur différence : $\dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}$.



La courbe de x ↦ x² – 1 entre x = 0 et x = 2, avec l'axe des abscisses et les deux droites verticales qui ferment le domaine.

Attention : Une intégrale peut être négative, une aire jamais

Sur la figure, l'aire totale du domaine vaut $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$. L'intégrale, elle, vaut $\frac{2}{3}$.

✗ « L'aire est $\int_0^2 \left(x^2-1\right)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$. »

✓ On coupe en 1, où la fonction change de signe, puis on compte chaque morceau positivement.

Une intégrale peut être négative ou nulle ; une aire est toujours positive.

Bornes dans l'ordre

Attention : Positivité : bornes dans l'ordre croissant

La fonction $x\mapsto x^2$ est positive. Pourtant $\int_2^0 x^2\,\mathrm{d}x=0-\frac{8}{3}=-\frac{8}{3}$.

La positivité ne s'applique pas ici : la borne du bas, 2, dépasse celle du haut. Avant de conclure sur un signe, vérifie que $a\leq b$.

À toi : un signe sans calcul

Donne le signe de $\int_e^1 \ln x\,\mathrm{d}x$, sans la calculer.

Indice 1

Quel est le signe de $\ln x$ pour $x\in[1,e]$?

Indice 2

Les bornes sont-elles dans l'ordre croissant ? Sinon, échange-les.

Indice 3

$\int_e^1 \ln x\,\mathrm{d}x=-\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x$.

Réponse

La fonction $\ln$ est continue sur $[1,e]$ et, pour $x\in[1,e]$, $\ln x\geq 0$. Comme $1\leq e$, la positivité donne :

$$\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x\geq 0.$$

Or, en échangeant les bornes :

$$\int_e^1 \ln x\,\mathrm{d}x=-\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x.$$

Conclusion. $\int_e^1 \ln x\,\mathrm{d}x\leq 0$.

Méthode : signe ou comparaison

1. **Ordre des bornes** : vérifie que $a \leq b$. Sinon, échange-les et change le signe.
2. **Signe** : étudie le signe de la fonction sur $[a, b]$, puis applique la positivité. Si $f \leq 0$ sur $[a, b]$ avec $a \leq b$, applique la positivité à $-f$: l'intégrale de f est négative ou nulle.
3. **Comparaison** : sur un même segment, compare les deux fonctions, puis applique l'intégrale et l'ordre.

Bonus : encadrer une intégrale

Remarque : Bonus

Ce qui suit est un **Bonus**, à sauter sans perdre le fil. Aucun des 15 sujets consultés ne demande d'encadrer une intégrale.

L'idée : si f reste entre deux constantes, l'aire reste entre deux rectangles.

Propriété : Bonus — Encadrement d'une intégrale (inégalité de la moyenne)

Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$, f une fonction continue sur $[a, b]$, et m, M deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

Exemple : Bonus : encadrer sans primitive

Soit $x \in [0, 1]$. Alors $0 \leq x^2 \leq 1$, donc $-1 \leq -x^2 \leq 0$.

La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, donc $e^{-1} \leq e^{-x^2} \leq 1$.

La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $[0, 1]$, segment de longueur 1. L'encadrement de l'intégrale donne :

$$\frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leq 1.$$

Aucune primitive explicite n'était nécessaire.

Intégration par parties

Un produit qui résiste

Devine : La primitive d'un produit

On cherche une primitive de $x \mapsto xe^x$. Une primitive de $x \mapsto x$ est $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$, une primitive de $x \mapsto e^x$ est $x \mapsto e^x$. La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}e^x$ convient-elle ?

A. Oui : on multiplie les deux primitives.

Faux.

Sa dérivée vaut $xe^x + \dfrac{x^2}{2}e^x$: il y a un terme de trop.

B. Non : $x \mapsto xe^x$ n'a pas de primitive.

Faux.

Elle est continue sur $\mathbb{R}$: elle a des primitives. Celle-ci n'en fait simplement pas partie.

C. Non : sa dérivée n'est pas xe^x.

Juste.

La dérivée d'un produit a deux termes. L'un d'eux est de trop ici.

D. Oui, à une constante près.

Faux.

Deux primitives diffèrent d'une constante. Ici, l'écart $\dfrac{x^2}{2}e^x$ n'est pas constant.

Correction

La dérivée de $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}e^x$ est $x \mapsto xe^x + \dfrac{x^2}{2}e^x$, différente de $x \mapsto xe^x$.

La primitive d'un produit n'est pas le produit des primitives. Il faut un autre outil, construit sur la dérivée d'un produit.

Pars de la dérivée d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$.

Intègre de a à b. À gauche, tu obtiens $[u(x)v(x)]_a^b$, car uv est une primitive de $(uv)'$. Il reste à isoler l'intégrale de uv'.

La formule

Théorème : Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, de dérivées u' et v' continues sur I, et a, b deux éléments de I. Alors

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple : polynôme fois exponentielle

Calculons $\int_0^1 xe^x \,\mathrm{d}x$. On pose :

$$\begin{aligned} u(x) &= x, \quad & v'(x) &= e^x, \\ u'(x) &= 1, \quad & v(x) &= e^x. \end{aligned}$$

Ces fonctions sont dérivables sur $[0,1]$, et u', v' y sont continues. La formule donne :

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^x \,\mathrm{d}x &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x \\ &= e - (e-1) = 1. \end{aligned}$$

Par linéarité, on en déduit :

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (2x-1)e^x \,\mathrm{d}x \\ &= 2 \times 1 - (e-1) \\ &= 3 - e. \end{aligned}$$

C'est la valeur trouvée plus haut avec la primitive G.

Bien choisir u

Méthode : intégrer par parties

1. **Repère le produit** $u(x) \times v'(x)$.
2. **Choisis** u, la fonction qui se simplifie quand on la dérive :
   - polynôme fois e^{kx} : u est le polynôme ;
   - polynôme fois $\ln x$: u est $\ln$;
   - $\ln x$ ou $(\ln x)^2$ seul : u est ce logarithme, et $v'(x) = 1$.
3. **Pose les quatre fonctions** u, u', v, v' avant tout calcul.
4. **Applique la formule** : la nouvelle intégrale doit être plus simple.

Attention : Le mauvais choix de u complique tout

Pour $\int_0^1 xe^x \,\mathrm{d}x$:

✗ $u(x) = e^x,\ v'(x) = x$. Alors $v : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$, et il reste $\int_0^1 \dfrac{x^2}{2} e^x \,\mathrm{d}x$: le degré a monté.

✓ $u(x) = x,\ v'(x) = e^x$. En dérivant, x devient 1 : il reste $\int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x$.

Autre piège : le signe moins. Pour $\int_0^{\ln 2} xe^{-x} \,\mathrm{d}x$, on a $v(x) = -e^{-x}$, et la formule retranche $\int_0^{\ln 2} \left(-e^{-x}\right) \mathrm{d}x$.

✗ Résultat négatif, pour une fonction positive :

$$\begin{aligned}&\left[-xe^{-x}\right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^{-x}\,\mathrm{d}x\\&= -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

✓ Moins par moins donne plus :

$$\begin{aligned}&\left[-xe^{-x}\right]_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} e^{-x}\,\mathrm{d}x\\&= -\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1-\ln 2}{2}.\end{aligned}$$

Le logarithme

Exemple : le logarithme seul

Pour $\displaystyle\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x$, écris $\ln x = \ln x \times 1$. On pose $u(x) = \ln x,\ v'(x) = 1$, d'où $u'(x) = \dfrac{1}{x},\ v(x) = x$.

Les fonctions u' et v' sont continues sur $[1, e]$. Donc :

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x &= [x\ln x]_1^e - \int_1^e 1\,\mathrm{d}x\\&= (e-0) - (e-1)\\&= 1.\end{aligned}$$

Au passage, $x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de $\ln$ sur $]0, +\infty[$.

À toi : Exemple à compléter : polynôme fois logarithme

Calcule $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x$. Le début est posé : $u(x) = \ln x,\ v'(x) = x$, donc $u'(x) = \dfrac{1}{x},\ v(x) = \dfrac{x^2}{2}$. Termine le calcul.

Indice 1

Écris la formule : le crochet $\left[\dfrac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e$, moins une intégrale.

Indice 2

Simplifie la nouvelle fonction à intégrer : $\dfrac{1}{x} \times \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{x}{2}$.

Indice 3

$\displaystyle\int_1^e \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2-1}{4}$.

Réponse

Le crochet vaut :

$$\begin{aligned}&\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e\\&=\frac{e^2}{2}\times 1-\frac{1}{2}\times 0\\&=\frac{e^2}{2}.\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}&\int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x\\&=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2-1}{4}\\&=\frac{e^2+1}{4}.\end{aligned}$$

À toi de choisir

Vérifie : Quel couple choisir ?

Pour calculer $\int_0^2 xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ par parties, quel choix fais-tu ?

A. $u(x)=x,\ v'(x)=e^{-x}$

Juste.

En dérivant, x devient 1 : il reste l'intégrale de e^{-x}.

B. $u(x)=e^{-x},\ v'(x)=x$

Faux.

Alors $v'(x)=x$ donne $v:x\mapsto\dfrac{x^2}{2}$: la nouvelle intégrale contient x^2e^{-x}, plus difficile.

C. $u(x)=xe^{-x},\ v'(x)=1$

Faux.

Alors $u'(x)=(1-x)e^{-x}$: la nouvelle intégrale n'est pas plus simple.

D. Aucun : c'est une forme $u'e^u$.

Faux.

Avec $u:x\mapsto -x$, la forme $u'e^u$ vaut $-e^{-x}$: le facteur x ne correspond pas.

Correction

On pose $u(x)=x,\ v'(x)=e^{-x}$, donc $u'(x)=1,\ v(x)=-e^{-x}$. Les fonctions u' et v' sont continues sur $[0,2]$. Donc :

$$\begin{aligned}&\int_0^2 xe^{-x}\,\mathrm{d}x\\&= \left[-xe^{-x}\right]_0^2 + \int_0^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x\\&= -2e^{-2} + \left(1 - e^{-2}\right)\\&= 1 - 3e^{-2}.\end{aligned}$$

Le signe $+$ vient du signe moins de v : moins par moins donne plus.

Le carré du logarithme se traite de la même façon. On pose $u(x) = (\ln x)^2,\ v'(x) = 1$. Alors $u'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$, et la nouvelle intégrale est celle de $2\ln x$, déjà connue.

Une intégration par parties complète, rédigée pour le bac, t'attend dans la dernière section.

Coin examen

Méthode : Coin examen : poser avant de calculer

L'intégration par parties figure dans 9 des 15 sujets consultés. Le couple polynôme et logarithme y revient dans 6, dont 3 avec le carré du logarithme. Le couple polynôme et exponentielle apparaît dans 3.

Dans 6 barèmes, la technique est notée à part du résultat : souvent $0{,}5$ point, puis $0{,}25$ pour la valeur.

> On pose $u(x) = \ldots$ et $v'(x) = \ldots$; alors $u'(x) = \ldots$ et $v(x) = \ldots$. Les fonctions u' et v' sont continues sur $[a, b]$, donc…

Même si ton calcul déraille ensuite, ces lignes rapportent déjà des points.

À retenir : Le mot du prof

Un produit, deux rôles : la fonction qu'on dérive, la fonction qu'on primitive. Choisis bien u, pose les quatre fonctions, et le reste suit.

Calcul d'aires par l'intégrale

Sous une courbe positive

Devine : Une aire sous l'hyperbole

On considère le domaine compris entre la courbe de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et l'axe des abscisses, de $x = 1$ à $x = e$. Que vaut son aire ?

A. $e - 1$, la largeur du domaine.

Faux.

La largeur ne suffit pas : la hauteur varie, de 1 à $\dfrac{1}{e}$.

B. $\dfrac{1}{e}$

Faux.

C'est la hauteur du domaine en $x = e$, pas son aire.

C. -1

Faux.

La fonction est positive sur $[1, e]$: l'aire ne peut pas être négative. Vérifie l'ordre du crochet.

D. 1

Juste.

$\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln e - \ln 1 = 1.$

Correction

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue et positive sur $[1, e]$. L'aire est donc l'intégrale :

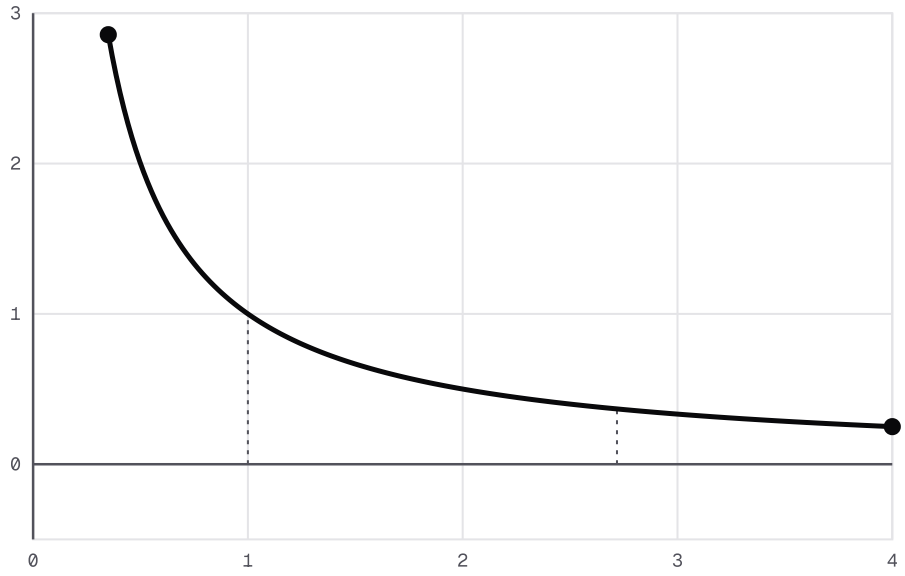
$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \left[\ln x\right]_1^e \\ &= 1 - 0 = 1.\end{aligned}$$

L'aire vaut 1 unité d'aire.

Propriété : Aire sous la courbe d'une fonction positive

Le plan est rapporté à un repère orthogonal. Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et f une fonction continue et positive sur $[a, b]$, de courbe $\mathcal{C}_f$. L'aire, en unités d'aire, du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Le domaine compris entre la courbe de x ↦ 1/x et l'axe des abscisses, de x = 1 à x = e.

L'unité d'aire

Une intégrale donne une aire en **unités d'aire**. Pour passer aux cm², il faut connaître le repère.

Si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm, le carré unité mesure 2 cm de côté.

Définition : Unité d'aire

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'**unité d'aire** est l'aire du rectangle construit sur $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Si $\|\vec{i}\| = p$ cm et $\|\vec{j}\| = q$ cm, alors une unité d'aire vaut $p \times q$ cm².

Attention : Les deux unités comptent

Repère d'unité 2 cm sur chaque axe : une unité d'aire vaut $2 \times 2 = 4$ cm².

✗ Une aire de $\frac{1}{2}$ unité d'aire vaut $\frac{1}{2} \times 2 = 1$ cm².

✓ Une aire de $\frac{1}{2}$ unité d'aire vaut $\frac{1}{2} \times 4 = 2$ cm².

Sans unité donnée sur les axes, l'aire reste en unités d'aire.

Vérifie : Un repère à deux unités

Dans un repère orthogonal, $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 3$ cm. Une aire vaut $1{,}5$ unité d'aire. Combien de cm² cela fait-il ?

A. 9 cm²

Juste.

Une unité d'aire vaut $2 \times 3 = 6$ cm², et $1{,}5 \times 6 = 9$.

B. $7{,}5$ cm²

Faux.

C'est $1{,}5 \times (2 + 3)$: les unités se multiplient, elles ne s'additionnent pas.

C. 3 cm²

Faux.

Seule l'unité de l'axe des abscisses a servi : il manque le facteur 3.

D. $1{,}5$ cm²

Faux.

Ici, une unité d'aire ne vaut pas 1 cm² : il faut convertir.

Correction

Une unité d'aire est l'aire du rectangle construit sur $\vec{i}$ et $\vec{j}$: $2 \times 3 = 6$ cm². Donc $1{,}5$ unité d'aire vaut $1{,}5 \times 6 = 9$ cm².

Une fonction de signe quelconque

Si la courbe passe sous l'axe, l'intégrale compte cette partie négativement. Pour une aire, on prend donc la valeur absolue : là où f est négative, on intègre $-f$.

Propriété : Aire pour une fonction de signe quelconque

Le plan est rapporté à un repère orthogonal. Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et f une fonction continue sur $[a, b]$, de courbe $\mathcal{C}_f$. L'aire, en unités d'aire, du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x.$$

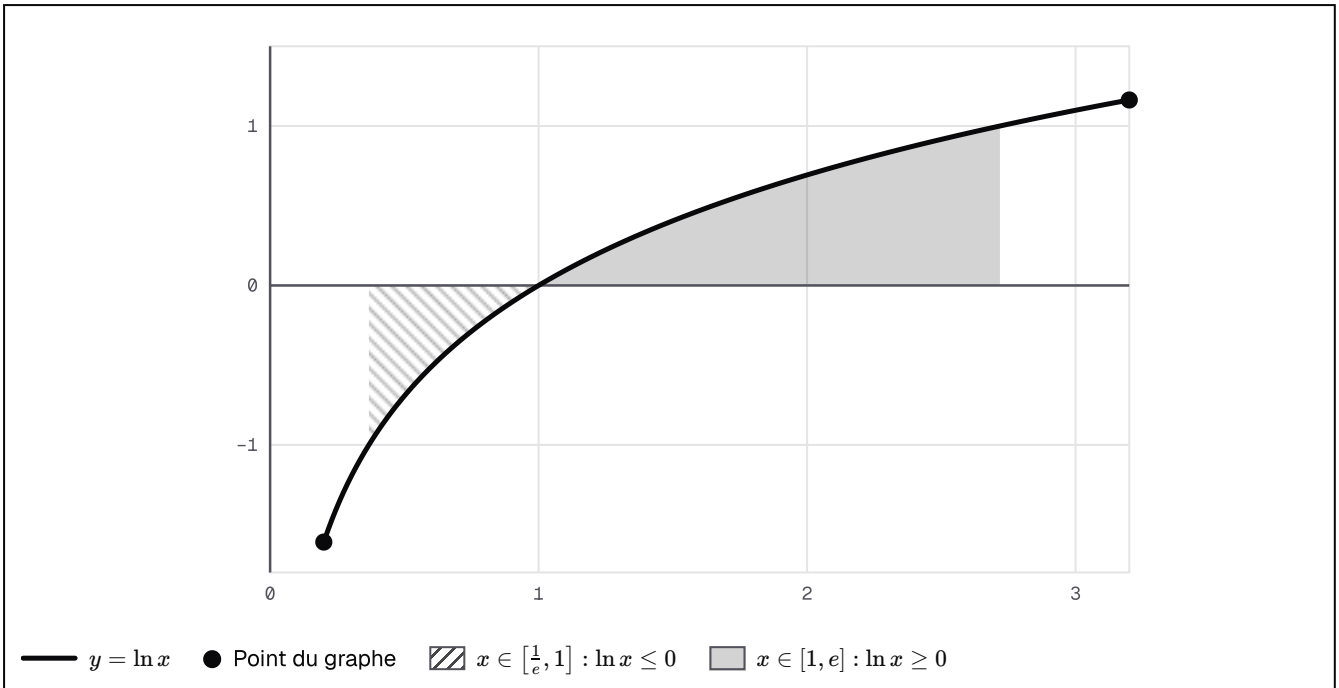
Si f est négative sur $[a, b]$, alors $\mathcal{A} = -\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$. Si f change de signe sur $[a, b]$, on découpe l'intégrale, par la relation de Chasles, aux réels de $]a, b[$ où f change de signe.

Exemple : une courbe sous l'axe

La fonction $\ln$ est continue sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$, et négative ou nulle sur ce segment. Avec la primitive $x \mapsto x \ln x - x$:

$$\begin{aligned}&\int_{1/e}^{1} \ln x \,\mathrm{d}x \\ &= (0-1) - \left(-\frac{1}{e} - \frac{1}{e}\right) \\ &= \frac{2}{e} - 1 \approx -0{,}26.\end{aligned}$$

L'intégrale est négative. L'aire entre la courbe de $\ln$ et l'axe, de $x = \dfrac{1}{e}$ à $x = 1$, est son opposé : elle vaut $1 - \dfrac{2}{e} \approx 0{,}26$ unité d'aire.



Courbe de ln entre 1/e et e : sous l'axe des abscisses de 1/e à 1, au-dessus de 1 à e ; les deux domaines sont marqués différemment.

Entre deux courbes

Entre deux courbes, la hauteur du domaine en x est l'écart « dessus moins dessous ». On intègre cet écart.

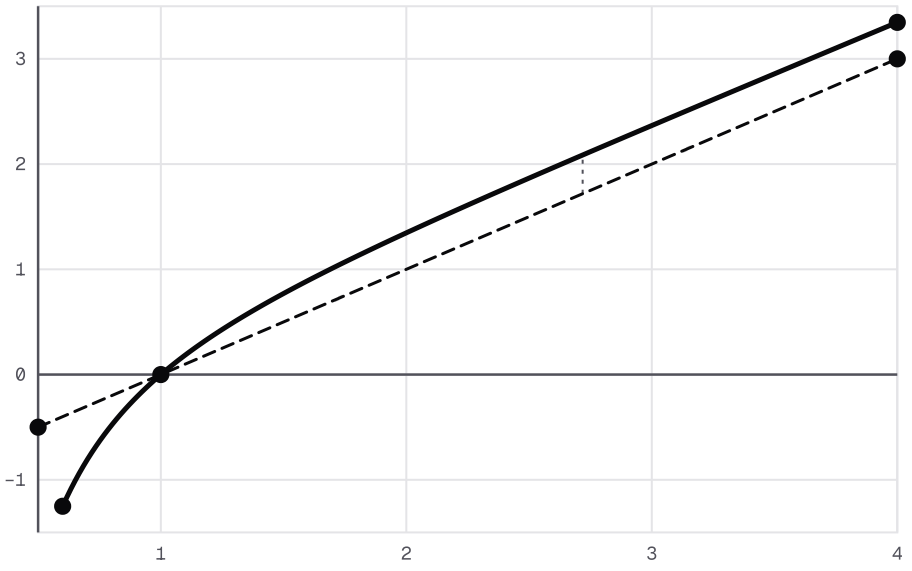
Il faut donc d'abord savoir quelle courbe est au-dessus : c'est le signe de la différence.

Propriété : Aire entre deux courbes

Le plan est rapporté à un repère orthogonal. Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$, de courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. L'aire, en unités d'aire, du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x.$$

En particulier, si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\mathcal{A} = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$.



Une courbe et la droite y = x – 1, entre les droites x = 1 et x = e.

Exemple : entre une courbe et son asymptote

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - 1 + \dfrac{\ln x}{x}$, dans un repère orthonormé d'unité 2 cm. Sa droite asymptote (D) a pour équation $y = x - 1$.

Position. Pour $x \in [1, e]$, $f(x) - (x - 1) = \dfrac{\ln x}{x} \geq 0$: la courbe est au-dessus de (D).

Aire. La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est continue sur $[1, e]$. Elle a la forme $u'u$, où $u : x \mapsto \ln x$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. L'aire vaut $\dfrac{1}{2}$ unité d'aire. Une unité d'aire vaut 4 cm², donc l'aire vaut 2 cm².

La méthode

Méthode : une aire en cm²

1. **Position** : étudie le signe de $f(x) - g(x)$ sur $[a, b]$. Ici, g est une autre fonction, une droite, ou la fonction nulle pour l'axe.
2. **Formule** : écris l'intégrale de « dessus moins dessous », multipliée par l'unité d'aire en cm².

3. **Calcul** : par une primitive, ou par parties.
4. **Conclusion** : la valeur exacte en cm², puis une valeur approchée si on la demande.

Si le signe change sur $[a, b]$, découpe le segment avec la relation de Chasles.

À toi : Exemple à compléter : une aire en cm²

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + 1 + \dfrac{3}{x^2}$, dans un repère orthonormé d'unité 2 cm. Soit (Δ) la droite d'équation $y = x + 1$.

Calcule, en cm², l'aire du domaine limité par la courbe de f, (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

Indice 1
Dessus moins dessous : calcule $f(x) - (x + 1)$ et étudie son signe sur $[1, 3]$.
Indice 2
Écris l'intégrale de cette différence de 1 à 3. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{3}{x^2}$ est $x \mapsto -\dfrac{3}{x}$.
Indice 3
Une unité d'aire vaut $2 \times 2 = 4$ cm² : n'oublie pas le facteur 4.

Réponse
Pour $x \in [1, 3]$, $f(x) - (x + 1) = \dfrac{3}{x^2} > 0$: la courbe est au-dessus de (Δ). Une unité d'aire vaut 4 cm², donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 4 \int_1^3 \frac{3}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 4 \left[-\frac{3}{x} \right]_1^3 \\ &= 4\,(-1 - (-3)) = 8. \end{aligned}$$

Conclusion. L'aire vaut 8 cm².

Coin examen

Trouve l'erreur : Une copie à corriger

Repère orthonormé d'unité 1 cm. Un élève calcule l'aire du domaine compris entre la droite $y = x$ et la parabole $y = x^2$, de $x = 0$ à $x = 1$:

> $\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^1 \left(x^2 - x\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$ cm².

Où est l'erreur ?

A. Une primitive est fausse dans son calcul.
Faux.

$\frac{x^3}{3}$ et $\frac{x^2}{2}$ sont justes, et $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$ aussi.

B. La différence est dans le mauvais ordre.

Juste.

Sur $[0, 1]$, $x^2 \leq x$: la droite est au-dessus de la parabole. Il fallait intégrer $x - x^2$.

C. Il manque le passage aux cm².

Faux.

Ici, une unité d'aire vaut $1 \times 1 = 1$ cm² : aucune conversion ne manque.

D. Les bornes 0 et 1 sont à échanger.

Faux.

Les bornes 0 et 1 sont dans le bon ordre.

Correction

Pour $x \in [0, 1]$, $x - x^2 = x(1 - x) \geq 0$: la droite est au-dessus de la parabole. Donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^1 \left(x - x^2\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

L'aire vaut $\frac{1}{6}$ cm². Un résultat négatif signale presque toujours une erreur d'ordre.

Méthode : Coin examen : la formule, puis la valeur

Une aire est demandée dans 12 des 15 sujets consultés : entre la courbe et une droite dans 6, entre la courbe et l'axe dans 5, entre deux courbes dans 1. Dans 8 barèmes, la formule est notée à part de la valeur, souvent $0{,}25 + 0{,}25$.

> Pour $x \in [a, b]$, $f(x) - g(x) \geq 0$: la courbe est au-dessus de la droite.
>
> L'aire en cm² vaut $\mathcal{A} = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, \mathrm{d}x \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$.

Avec une unité de 2 cm, écris directement $4 \int_a^b \ldots \, \mathrm{d}x$: c'est la forme des barèmes.

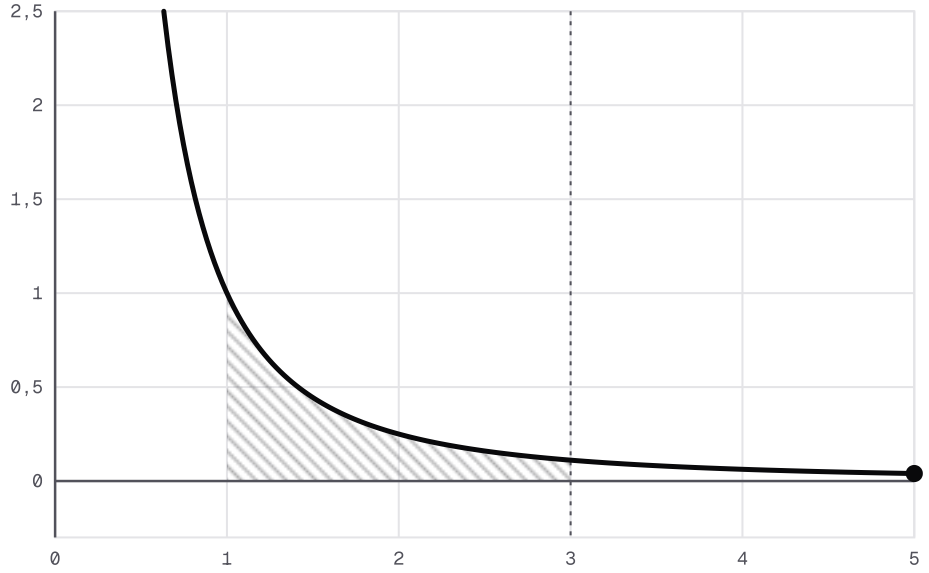
Lis bien la consigne. « Entre la courbe et l'axe des abscisses » : g est la fonction nulle. « L'axe des ordonnées » est la droite d'équation $x = 0$: il fixe une borne.

Une aire qui dépend d'un paramètre

Parfois, une borne est un paramètre α. L'aire devient alors une fonction $\mathcal{A}(\alpha)$.

C'est le cas dans 3 des 15 sujets consultés, et sa limite est demandée dans 2. Par exemple, pour tout réel $\alpha > 1$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\alpha) &= \int_1^{\alpha} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\alpha} = 1 - \frac{1}{\alpha}.\end{aligned}$$



Aire sous la courbe de x ↦ 1/x² de 1 à α, dessinée pour une valeur de α : elle varie quand la borne α se déplace.

Vérifie : La limite de l'aire

Avec $\mathcal{A}(\alpha) = 1 - \dfrac{1}{\alpha}$, que vaut $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \mathcal{A}(\alpha)$?

A. $+\infty$: le domaine devient infiniment long.

Faux.

Sa longueur tend vers $+\infty$, mais sa hauteur $\dfrac{1}{x^2}$ diminue très vite. La limite se calcule, elle ne se devine pas.

B. 0

Faux.

C'est la limite de $\dfrac{1}{\alpha}$, pas celle de $1 - \dfrac{1}{\alpha}$.

C. 1

Juste.

$\dfrac{1}{\alpha}$ tend vers 0 quand α tend vers $+\infty$.

Correction

Quand α tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{\alpha}$ tend vers 0. Donc :

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = 1.$$

> On traite $\mathcal{A}$ comme n'importe quelle fonction de α.

Valeur moyenne

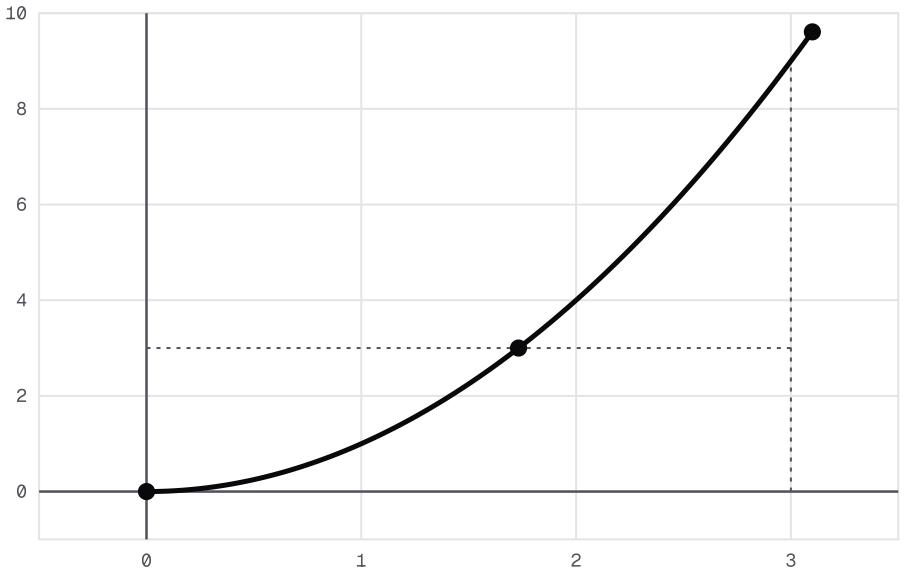
Une vitesse moyenne

> **Devine : La vitesse constante équivalente**
>
> Le scooter de l'introduction a parcouru 9 m en 3 s, à la vitesse t^2 m/s. À quelle vitesse **constante** ferait-il la même distance, dans le même temps ?
>
> **A.** $4{,}5$ m/s, la moyenne de 0 et 9.
> **Faux.**
> La moyenne des vitesses extrêmes ignore la façon dont la vitesse varie entre elles.
>
> **B.** 3 m/s
> **Juste.**
> La distance divisée par la durée : $9 \div 3 = 3$.
>
> **C.** 9 m/s
> **Faux.**
> C'est la vitesse finale : à cette vitesse, il ferait 27 m.
>
> **Correction**
> La distance vaut $\displaystyle\int_0^3 t^2 \,\mathrm{d}t = 9$ m. À vitesse constante v, il parcourt $3v$ m.
>
> Donc $3v = 9$, et $v = 3$ m/s : c'est l'intégrale divisée par la longueur de l'intervalle.

Cette vitesse constante est une **valeur moyenne**. Le rectangle de cette hauteur a la même aire que le domaine sous la courbe.

Cette notion n'apparaît dans aucun des 15 sujets consultés : on la traite brièvement.

> **Définition : Valeur moyenne**
>
> Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et f une fonction continue sur $[a, b]$. La **valeur moyenne** de f sur $[a, b]$ est le réel
>
> $$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$
>
> Lorsque f est positive sur $[a, b]$, le rectangle de base $[a, b]$ et de hauteur μ a la même aire que le domaine situé sous la courbe de f.



La courbe de x ↦ x² sur [0, 3] et le rectangle de base [0, 3] et de hauteur 3.

La moyenne est atteinte

Exemple : où la moyenne est atteinte

La fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $[0, 3]$. Sa valeur moyenne sur ce segment est :

$$\mu = \frac{1}{3}\int_0^3 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{9}{3} = 3.$$

L'équation $x^2 = 3$ a une solution dans $[0, 3]$: $c = \sqrt{3} \approx 1{,}73$.

En c, la fonction prend exactement sa valeur moyenne.

Propriété : La valeur moyenne est atteinte

Soit a et b deux réels tels que $a < b$, f une fonction continue sur $[a, b]$, et μ sa valeur moyenne sur $[a, b]$. Il existe au moins un réel c de $[a, b]$ tel que

$$f(c) = \mu.$$

Méthode : une valeur moyenne

1. Vérifie que $a < b$ et que la fonction est continue sur $[a, b]$.
2. Calcule l'intégrale de a à b.
3. Divise par la longueur $b - a$ du segment.

4. Si on te demande où elle est atteinte, résous l'équation « fonction $= \mu$ » dans $[a, b]$.

À toi : la moyenne de l'inverse

Calcule la valeur moyenne μ de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $[1, e]$. Trouve ensuite le réel c de $[1, e]$ tel que $\dfrac{1}{c} = \mu$.

Indice 1

La longueur du segment est $e - 1$.

Indice 2

$\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 1$.

Indice 3

Résous $\dfrac{1}{c} = \mu$ en passant à l'inverse, puis vérifie que la solution est bien dans $[1, e]$.

Réponse

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $[1, e]$, et $e - 1 > 0$. Donc :

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{e-1}\int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{e-1} \approx 0{,}58.\end{aligned}$$

Ensuite, $\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{e-1}$ donne $c = e - 1 \approx 1{,}72$, qui est bien dans $[1, e]$.

Volume d'un solide de révolution

Faire tourner un domaine

Devine : Un cylindre

Repère orthonormé. On fait tourner autour de l'axe des abscisses le rectangle limité par la droite $y = 1$, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 2$. On obtient un cylindre. Quel est son volume, en unités de volume ?

A. 2

Faux.
C'est l'aire du rectangle qui tourne, pas le volume du cylindre.

B. π

Faux.
C'est l'aire de la base seulement : il faut multiplier par la hauteur 2.

C. 4π

Faux.
Ce serait un rayon $\sqrt{2}$, ou une hauteur 4. Ici, le rayon vaut 1 et la hauteur 2.

D. 2π

Juste.
La base est un disque de rayon 1, d'aire π, et la hauteur vaut 2.

Correction
Le cylindre a pour base un disque de rayon 1 et pour hauteur 2. Son volume vaut $\pi \times 1^2 \times 2 = 2\pi$ unités de volume.

On le retrouve par $\pi \displaystyle\int_0^2 1^2 \,\mathrm{d}x = 2\pi$: chaque tranche est un disque de rayon 1.

Pour une courbe quelconque, coupe le solide en tranches très fines. En x, la tranche est un disque de rayon $|f(x)|$, d'aire $\pi\,(f(x))^2$. Une intégrale additionne ces tranches.

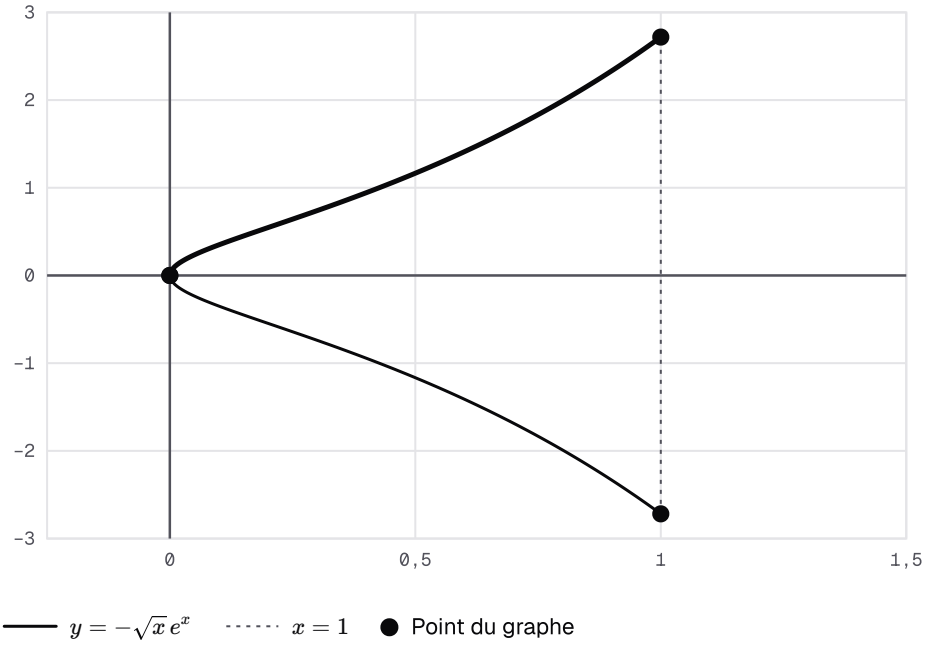
Ce calcul n'apparaît dans aucun des 15 sujets consultés : on le traite brièvement.

Propriété : Volume d'un solide de révolution

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et f une fonction continue sur $[a, b]$. Le volume, en unités de volume, du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du domaine limité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, est

$$V = \int_a^b \pi\,(f(x))^2 \,\mathrm{d}x.$$

Si $\|\vec{i}\| = p$ cm, l'unité de volume vaut p^3 cm³.



Le profil d'un solide de révolution : la courbe de x ↦ √x eˣ sur [0, 1] et sa symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

Un calcul de volume

Exemple : un volume par parties

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\sqrt{x}\,e^{x}$. Pour tout $x\in[0,1]$, $(f(x))^2=xe^{2x}$.

Par parties, avec $u(x)=x,\ v'(x)=e^{2x}$, donc $u'(x)=1,\ v(x)=\dfrac{e^{2x}}{2}$:

$$\begin{aligned}&\int_0^1 xe^{2x}\,\mathrm{d}x\\&=\left[\frac{xe^{2x}}{2}\right]_0^1-\int_0^1\frac{e^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2-1}{4}\\&=\frac{e^2+1}{4}.\end{aligned}$$

Le volume vaut $V=\dfrac{\pi\left(e^2+1\right)}{4}\approx 6{,}59$ unités de volume.

Attention : Le carré et π, tous les deux

Pour $x\mapsto\sqrt{x}$ sur $[0,3]$:

✗ $\displaystyle\int_0^3\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=2\sqrt{3}$: ni carré, ni π.

✗ $\displaystyle\pi\left(\int_0^3\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\right)^2=12\pi$: le carré est mal placé.

✓ Le carré porte sur la fonction, sous l'intégrale :

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^3\left(\sqrt{x}\right)^2\mathrm{d}x\\&=\pi\int_0^3 x\,\mathrm{d}x=\frac{9\pi}{2}.\end{aligned}$$

Le volume vaut $\dfrac{9\pi}{2}$ unités de volume.

Méthode : un volume de révolution

1. Vérifie que le repère est orthonormé.
2. Calcule $(f(x))^2$ et simplifie-le.
3. Intègre, puis multiplie par π : $V=\pi\displaystyle\int_a^b(f(x))^2\,\mathrm{d}x$.

4. Conclus en unités de volume. Si $\|\vec{i}\| = 2$ cm, une unité de volume vaut $2^3 = 8$ cm³.

À toi : un volume

Repère orthonormé. Calcule le volume du solide engendré par la rotation, autour de l'axe des abscisses, du domaine limité par la courbe de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, cet axe et les droites $x = 1$ et $x = 2$.

Indice 1

Élève d'abord au carré : $\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 = \dfrac{1}{x^2}$.

Indice 2

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$.

Indice 3

N'oublie pas le facteur π.

Réponse

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $[1, 2]$, et $\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 = \dfrac{1}{x^2}$. Donc :

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \pi \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 \\ &= \pi \left(-\frac{1}{2} + 1\right) \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Le volume vaut $\dfrac{\pi}{2}$ unités de volume.

Suite d'intégrales (bonus)

Une intégrale pour chaque entier

Remarque : Bonus

Cette section est un **Bonus**, à sauter sans perdre le fil. Les suites d'intégrales n'apparaissent dans aucun des 15 sujets consultés.

Pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto \dfrac{x^n}{1+x}$ est continue sur $[0, 1]$. On pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

Devine : Quand n grandit

Pour $x \in [0, 1]$, compare x^{n+1} et x^n. Comment évolue I_n quand n augmente ?

A. I_n augmente, car la puissance grandit.

Faux.

Sur $[0,1]$, multiplier par $x \leq 1$ fait diminuer : $x^{n+1} \leq x^n$.

B. I_n reste égal à I_0.

Faux.

Les fonctions intégrées changent avec n : en $x = \dfrac{1}{2}$, par exemple, elles diminuent.

C. I_n diminue.

Juste.

$x^{n+1} \leq x^n$ sur $[0,1]$, et l'intégrale conserve l'ordre.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$. On a $x^{n+1} = x \times x^n \leq x^n$, car $0 \leq x \leq 1$ et $x^n \geq 0$. Comme $1 + x > 0$:

$$\frac{x^{n+1}}{1+x} \leq \frac{x^n}{1+x}.$$

Comme $0 \leq 1$, la propriété « intégrale et ordre » donne $I_{n+1} \leq I_n$: la suite (I_n) est décroissante.

Valeurs et limite

Exemple : Bonus : étude de la suite

Premier terme.

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\ln(1+x)\right]_0^1 = \ln 2. \end{aligned}$$

Limite. Pour tout $x \in [0,1]$, $1 + x \geq 1$ et $x^n \geq 0$, donc $0 \leq \dfrac{x^n}{1+x} \leq x^n$. Par positivité, puis par la propriété « intégrale et ordre » :

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$

Par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

Relation. Pour tout $x \in [0,1]$, $\dfrac{x^n + x^{n+1}}{1+x} = x^n$. Par linéarité :

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$

À toi : deux termes

Avec la relation $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$ et $I_0 = \ln 2$, calcule I_1, puis I_2.

Indice 1

Prends $n = 0$: $I_0 + I_1 = 1$.

Indice 2

Prends $n = 1$: $I_1 + I_2 = \dfrac{1}{2}$.

Réponse

Avec $n = 0$: $I_0 + I_1 = 1$, donc $I_1 = 1 - \ln 2 \approx 0{,}31$.

Avec $n = 1$: $I_1 + I_2 = \dfrac{1}{2}$, donc :

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} - I_1 \\ &= \ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0{,}19. \end{aligned}$$

On a bien $I_2 \leq I_1 \leq I_0$.

Au bac : la séquence complète

L'énoncé

Dans 12 des 15 sujets consultés, le calcul intégral arrive en fin d'étude de fonction, dans le problème. Dans 2, il fait partie d'un exercice mixte ; dans 1, d'un exercice dédié. Il y vaut de $0{,}5$ à $2{,}25$ points.

L'enchaînement le plus courant : primitive donnée, intégrale, intégration par parties, aire. Voici une séquence de ce type, rédigée comme les barèmes l'attendent.

Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = 2x + 1 + (3 - x)\ln(x + 1)$, de courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé d'unité 1 cm. Soit (D) la droite d'équation $y = 2x + 1$.

1. Vérifier que $H : x \mapsto (x + 1)\ln(x + 1) - x$ est une primitive de $h : x \mapsto \ln(x + 1)$ sur $]-1, +\infty[$.
2. En déduire $\displaystyle\int_0^1 \ln(x + 1)\,\mathrm{d}x$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x + 1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$. On pourra prendre $v(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2}$.
4. Calculer, en cm², l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Questions 1 et 2

Méthode : Rédaction : questions 1 et 2

1. H est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et, pour tout $x > -1$:

$$\begin{aligned} H'(x) &= 1 \times \ln(x + 1) \\ &\quad + (x + 1) \times \frac{1}{x + 1} - 1 \\ &= \ln(x + 1) + 1 - 1 \\ &= \ln(x + 1). \end{aligned}$$

Donc H est une primitive de h sur $]-1,+\infty[$.

2. Par suite, $\displaystyle\int_0^1 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = H(1) - H(0) = \ldots$

Vérifie : La valeur de la question 2

Avec $H(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$, que vaut $H(1) - H(0)$?

A. $2\ln 2$

Faux.

C'est $2\ln 2$ seul : le terme $-x$ de H, qui vaut -1 en $x = 1$, a été oublié.

B. $\ln 2 - 1$

Faux.

Ce nombre est négatif, alors que $\ln(x+1) \geq 0$ sur $[0,1]$. En $x = 1$, le facteur $x+1$ de H vaut 2, pas 1.

C. $1 - 2\ln 2$

Faux.

C'est $H(0) - H(1)$: les bornes sont inversées. Or $\ln(x+1) \geq 0$ sur $[0,1]$.

D. $2\ln 2 - 1$

Juste.

$H(1) = 2\ln 2 - 1$ et $H(0) = 0$.

Correction

$H(1) = 2\ln 2 - 1$ et $H(0) = 1 \times \ln 1 - 0 = 0$. Donc $\displaystyle\int_0^1 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1$.

Question 3

Méthode : Rédaction : question 3

3. On pose $u(x) = \ln(x+1),\ v'(x) = x$. Alors $u'(x) = \dfrac{1}{x+1}$, et on prend la primitive $v(x) = \dfrac{x^2-1}{2}$. Comme $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, on a $u'(x)v(x) = \dfrac{x-1}{2}$ pour tout $x \in [0,1]$. Les fonctions u' et v' sont continues sur $[0,1]$. Donc :

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2-1}{2}\ln(x+1)\right]_0^1 \\
&\quad - \int_0^1 \frac{x-1}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= 0 - \left[\frac{(x-1)^2}{4}\right]_0^1 \\
&= 0 - \left(0 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Vérifie : Le crochet de la question 3

Que vaut le crochet $\left[\dfrac{x^2-1}{2}\ln(x+1)\right]_0^1$?

A. $\dfrac{\ln 2}{2}$

Faux.

C'est le crochet obtenu en prenant pour v la primitive $\dfrac{x^2}{2}$. Ici, $v(1) = \dfrac{1-1}{2} = 0$.

B. $-\dfrac{1}{2}$

Faux.

$v(0) = -\dfrac{1}{2}$, mais il est multiplié par $\ln 1 = 0$.

C. $\ln 2$

Faux.

En $x = 1$, le facteur $\dfrac{x^2-1}{2}$ vaut 0 : le produit est nul.

D. 0

Juste.

En $x = 1$, $v(1) = 0$; en $x = 0$, $\ln 1 = 0$. Les deux termes sont nuls.

Correction

En 1 : $\dfrac{1-1}{2}\ln 2 = 0$. En 0 : $-\dfrac{1}{2}\ln 1 = 0$.

Le crochet vaut $0 - 0 = 0$: c'est tout l'intérêt de ce choix de v.

Question 4

Vérifie : Qui est au-dessus ?

Pour la question 4, on étudie le signe de $f(x) - (2x+1) = (3-x)\ln(x+1)$ sur $[0,1]$. Que conclure ?

A. $f(x) - (2x+1) \geq 0$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D).

Juste.
Sur ce segment, $\ln(x+1) \geq 0$ et $3-x>0$: le produit est positif ou nul.

B. $f(x)-(2x+1) \leq 0$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de (D).
Faux.
Pour $x \geq 0$, $\ln(x+1) \geq 0$; et $3-x>0$ car $x \leq 1<3$.

C. Le signe change en $x=3$, où $3-x$ s'annule.
Faux.
Le réel 3 n'est pas dans $[0,1]$.

D. Le signe change en $x=0$, où $\ln(x+1)$ s'annule.
Faux.
0 est une borne du segment. Sur $[0,1]$, $\ln(x+1)$ reste positif ou nul.

Correction
Pour $x \in [0,1]$, $x+1 \geq 1$, donc $\ln(x+1) \geq 0$. De plus, $x \leq 1<3$, donc $3-x>0$.

Le produit $(3-x)\ln(x+1)$ est positif ou nul : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D) sur $[0,1]$. On intégrera $f(x)-(2x+1)$.

Vérifie : La valeur de l'aire

Avec les questions 2 et 3, que vaut l'aire de la question 4, au centième ?

A. $0{,}25$ cm²
Faux.
C'est $\dfrac{1}{4}$, le résultat de la question 3 seul. Il manque $3\displaystyle\int_0^1 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$, et le signe moins.

B. $0{,}91$ cm²
Juste.
$3(2\ln 2-1)-\dfrac{1}{4}=6\ln 2-\dfrac{13}{4}\approx 0{,}91$.

C. $1{,}41$ cm²
Faux.
C'est $3(2\ln 2-1)+\dfrac{1}{4}$: l'intégrale de la question 3 a été ajoutée au lieu d'être retranchée.

D. $-0{,}91$ cm²
Faux.
Une aire est positive : la différence a été prise dans le mauvais ordre.

Correction
Pour $x \in [0,1]$, $f(x)-(2x+1)=3\ln(x+1)-x\ln(x+1)$. Par linéarité, avec les questions 2 et 3, l'aire vaut, en unités d'aire :

$$3(2\ln 2 - 1) - \frac{1}{4}$$
$$= 6\ln 2 - \frac{13}{4}.$$

Ici, une unité d'aire vaut 1 cm², et $6\ln 2 - \dfrac{13}{4} \approx 0{,}91$.

Méthode : Rédaction : question 4

4. Position. Pour $x \in [0,1]$, $f(x) - (2x+1) = (3-x)\ln(x+1)$.

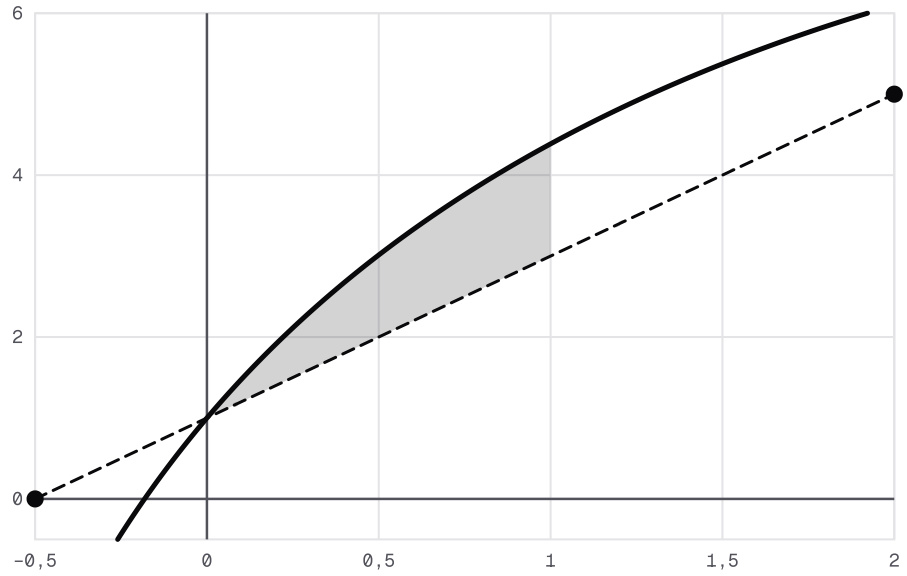
Or $x+1 \geq 1$, donc $\ln(x+1) \geq 0$; et $x \leq 1 < 3$, donc $3 - x > 0$. Ainsi $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D) sur $[0,1]$.

Unité. L'unité est 1 cm : une unité d'aire vaut 1 cm².

Calcul. Par linéarité, puis avec les questions 2 et 3 :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^1 (f(x) - (2x+1))\,\mathrm{d}x \\ &= 3\int_0^1 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x \\ &\quad - \int_0^1 x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x \\ &= 3(2\ln 2 - 1) - \frac{1}{4} \\ &= 6\ln 2 - \frac{13}{4}.\end{aligned}$$

Conclusion. L'aire vaut $6\ln 2 - \dfrac{13}{4}$ cm², soit environ $0{,}91$ cm².



Le domaine de la question 4 : entre la courbe de f, au-dessus, et la droite (D), de x = 0 à x = 1.

> **À retenir : Le mot du prof**
>
> Dériver H, intégrer, poser u et v', placer les courbes, convertir en cm² : cinq gestes, le plus souvent dans cet ordre. D'un sujet consulté à l'autre, la fonction change ; la rédaction attendue reste la même.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Calcul intégral » (2bac · sciences-experimentales · mathematiques)