BURHAN

Calcul des probabilités : fiche de révision

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/calcul-des-probabilites/resume

Chapitre	Semestre
Calcul des probabilités	Semestre 2

L'essentiel du chapitre

> **À retenir : Six réflexes**
>
> - **Équiprobabilité justifiée** : cite le mot de l'énoncé (« au hasard », « indiscernables au toucher », « équilibré ») avant d'écrire un quotient de cardinaux.
> - **Un seul modèle de dénombrement** par quotient : l'univers et l'événement se comptent de la même façon.
> - **« Au moins un »** se traite par le contraire, « aucun ».
> - **Conditionnement** : $P_A(B)$ exige $P(A) \neq 0$, et ne se retourne pas en $P_B(A)$.
> - **Indépendance** : elle se prouve par un calcul ; l'incompatibilité est une tout autre notion.
> - **Loi binomiale** : épreuves identiques et indépendantes, deux issues, et X compte les succès.

Chaque conclusion repose sur une justification précise.

Pour écrire…	tu dois d'abord établir…
$P(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$	que les issues de Ω sont équiprobables
$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$	que $P(A) \neq 0$
$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$	que $0 < P(A) < 1$ (A et $\overline{A}$ forment un système complet)
« A et B sont indépendants »	l'égalité $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
« la loi de X est complète »	que la somme des probabilités du tableau vaut 1
« X suit une loi binomiale »	épreuves identiques, indépendantes, à deux issues ; X compte les succès

Événement contraire

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Réunion de deux événements

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilités composées, si P(A) est non nulle

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

Espérance

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

Variance, forme de calcul

$$V(X) = x_1^2\, p_1 + \cdots + x_n^2\, p_n - \big(E(X)\big)^2$$

Loi binomiale de paramètres n et p

$$P(X = k) = C_n^k\, p^k\, (1-p)^{n-k}$$

Dénombrer

Propriété : Principe multiplicatif

Si une situation se décompose en k choix successifs, le premier pouvant se faire de n_1 façons, puis, quel que soit ce premier choix, le deuxième de n_2 façons, et ainsi de suite jusqu'au k-ième, qui peut se faire de n_k façons, alors le nombre total de résultats possibles est

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k.$$

Définition : Factorielle

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, la **factorielle** de n est l'entier $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. Par convention, $0! = 1$.

Propriété : Arrangements avec répétition

Soit E un ensemble fini à n éléments ($n \geq 1$) et p un entier naturel non nul. Une **p-liste** d'éléments de E, ou **arrangement avec répétition**, est une suite ordonnée $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ d'éléments de E, distincts ou non. Le nombre de p-listes d'éléments de E est n^p.

Définition : Arrangements sans répétition

Soit E un ensemble fini à n éléments et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. Un **arrangement** de p éléments de E est une p-liste d'éléments de E **deux à deux distincts**. Le nombre de ces arrangements est

$$\begin{aligned} A_n^p &= n \times (n-1) \times \ldots \\ &\quad \times (n-p+1) \\ &= \frac{n!}{(n-p)!}. \end{aligned}$$

Propriété : Permutations

Soit E un ensemble fini à n éléments ($n \geq 1$). Une **permutation** de E est un arrangement de ses n éléments, c'est-à-dire une façon de les ranger dans un ordre. Le nombre de permutations de E est $A_n^n = n!$.

Définition : Combinaisons

Soit E un ensemble fini à n éléments et p un entier tel que $0 \leq p \leq n$. Une **combinaison** de p éléments de E est une partie de E qui contient exactement p éléments. Le nombre de ces combinaisons est

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

Pour $1 \leq p \leq n$, on a aussi $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$.

Propriété : Propriétés des nombres C_n^p

Pour tous entiers n et p tels que $0 \leq p \leq n$:

- $C_n^0 = C_n^n = 1$;
- $C_n^{n-p} = C_n^p$;
- si $n \geq 1$: $C_n^1 = n$;
- si $p \geq 1$: $C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$.

Méthode : trouver le bon modèle

Avant de compter les tirages de p objets parmi n, pose-toi deux questions.

1. **Les résultats sont-ils rangés ?** Un premier, un deuxième… : oui pour des tirages un par un, non pour une poignée tirée d'un coup.
2. **Un même objet peut-il revenir ?** Oui seulement si on le remet avant le tirage suivant.

Les deux réponses désignent une ligne du tableau ci-dessous ; garde ensuite ce modèle pour **tout** le quotient.

Les trois modèles, illustrés par une urne de 8 jetons dont on tire 3 jetons.

Façon de tirer	Rangé ?	Retour possible ?	Nombre de résultats	Urne de 8 jetons, 3 tirés
un par un, jeton remis	oui	oui	n^p	$8^3 = 512$
un par un, jeton gardé	oui	non	A_n^p	$A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$
les p jetons d'un coup	non	non	C_n^p	$C_8^3 = \dfrac{336}{3!} = 56$

Exemple : Contrôles express

- Ranger les 4 faces d'un tétraèdre dans un ordre : $4! = 24$ façons.
- Symétrie : choisir les 3 jetons tirés revient à choisir les 5 laissés, donc $C_8^5 = C_8^3 = 56$.

- Relation entre lignes : $C_5^2 + C_5^3 = 10 + 10 = 20 = C_6^3$.
- Dans une urne de 5 jetons blancs et 3 noirs : $C_5^2 = 10$ paires de blancs, $C_5^3 = 10$ triplets de blancs, $C_3^2 = 3$ paires de noirs.

Probabilité d'un événement

Définition : Expérience aléatoire, univers, événements

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît toutes les issues possibles, sans pouvoir prévoir laquelle se produira. L'ensemble de ses issues est l'**univers**, noté Ω ; on le suppose fini.

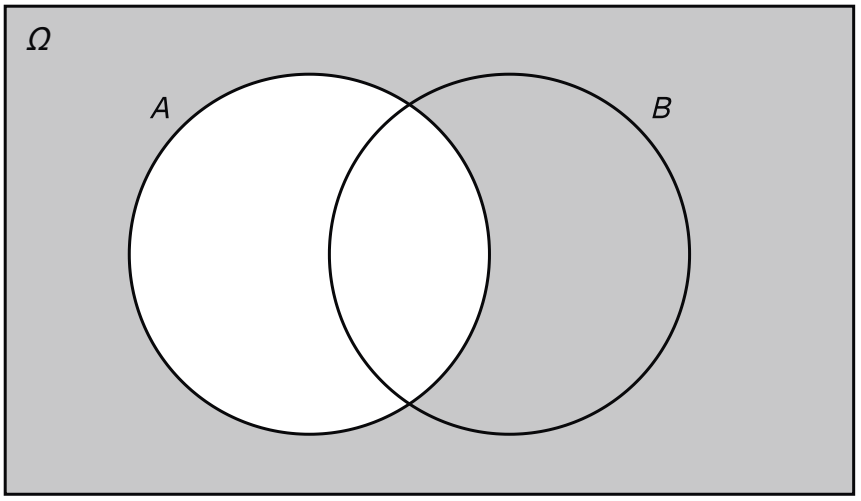
Un **événement** est une partie de Ω ; un événement formé d'une seule issue est un **événement élémentaire**. Ω est l'**événement certain** et $\emptyset$ l'**événement impossible**.

Un événement A est réalisé lorsque l'issue obtenue appartient à A.

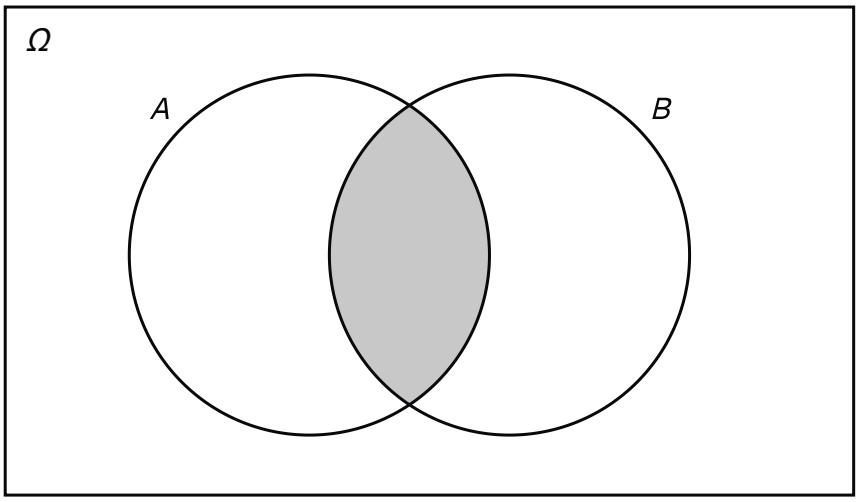
Définition : Opérations sur les événements

Soit A et B deux événements d'un univers Ω.

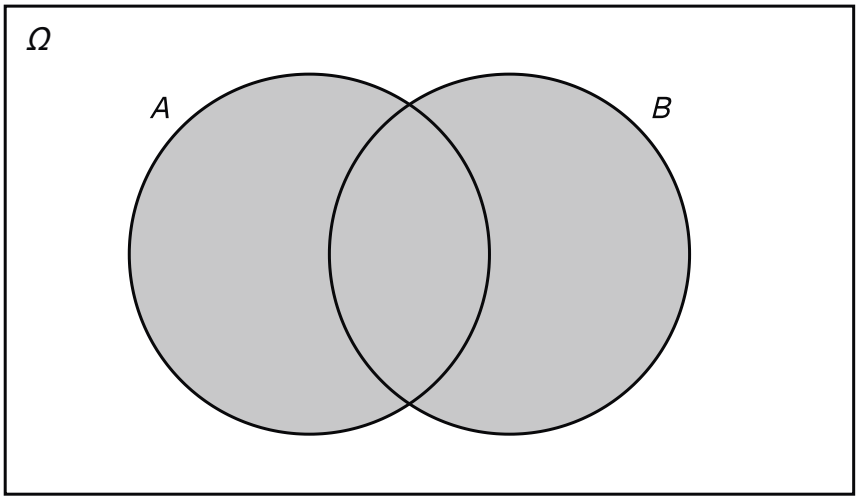
- L'événement **contraire** de A, noté $\overline{A}$, est formé des issues de Ω qui n'appartiennent pas à A.
- L'événement $A \cap B$, lu « A et B », est réalisé lorsque A et B sont réalisés tous les deux.
- L'événement $A \cup B$, lu « A ou B », est réalisé lorsque l'un au moins des deux est réalisé.
- A et B sont **incompatibles** lorsque $A \cap B = \emptyset$.



Le contraire de A, teinté : tout l'univers sauf le disque A.



L'événement « A et B », teinté : la seule partie commune aux deux disques.



L'événement « A ou B », teinté : les deux disques en entier, partie commune comprise.

Définition : Probabilité sur un univers fini

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ l'univers fini d'une expérience aléatoire. Définir une **probabilité** sur Ω, c'est associer à chaque issue ω_i un réel $p_i \geq 0$, de sorte que $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

La **probabilité** d'un événement A, notée $P(A)$, est la somme des p_i des issues qui forment A ; on pose $P(\emptyset) = 0$.

Propriété : Règles de calcul des probabilités

Pour tous événements A et B d'un univers fini Ω :

- $P(\Omega) = 1$ et $0 \leq P(A) \leq 1$;

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
- si A et B sont incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Propriété : Hypothèse d'équiprobabilité

Lorsque toutes les issues d'un univers fini Ω ont la même probabilité (hypothèse d'**équiprobabilité**), chacune a pour probabilité $\frac{1}{\text{card}(\Omega)}$ et, pour tout événement A :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

Méthode : calculer par équiprobabilité

1. **Cite** ce qui rend les issues également probables : « au hasard », « indiscernables au toucher », « équilibré ».
2. **Compte** les issues de l'univers avec le modèle retenu.
3. **Décris** l'événement par une phrase, puis compte ses issues avec ce même modèle ; le principe multiplicatif sert souvent.
4. **Divise** et simplifie : la réponse attendue est une fraction irréductible.

Méthode : « au moins un »

Le contraire de « au moins un jeton noir » est « aucun jeton noir », c'est-à-dire « uniquement des blancs » : un seul cas à compter, au lieu de plusieurs. Calcule $P(\overline{A})$, puis conclus avec $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Exemple : trois jetons d'un coup

Une urne contient 5 jetons blancs et 3 jetons noirs, indiscernables au toucher. On en tire 3 simultanément : les $C_8^3 = 56$ tirages sont équiprobables.

- G : « exactement deux blancs ». On choisit 2 blancs parmi 5, puis 1 noir parmi 3 : $\text{card}(G) = C_5^2 \times C_3^1 = 10 \times 3 = 30$, donc $P(G) = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$.
- N : « au moins un noir ». Son contraire, « trois blancs », regroupe $C_5^3 = 10$ tirages : $P(N) = 1 - \frac{10}{56} = 1 - \frac{5}{28} = \frac{23}{28}$.

Exemple : deux lancers d'un tétraèdre

Un tétraèdre équilibré a ses faces numérotées de 1 à 4 ; on lit le numéro de la face cachée. On le lance deux fois : Ω est formé des $4^2 = 16$ couples, équiprobables.

La somme vaut 5 pour $(1,4)$, $(2,3)$, $(3,2)$, $(4,1)$, soit une probabilité de $\dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$.

Au moins un 4**.** Soit A : « le premier lancer donne 4 » et B : « le second donne 4 ». Seul le couple $(4,4)$ réalise $A \cap B$, donc par la réunion :

$$P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16}.$$

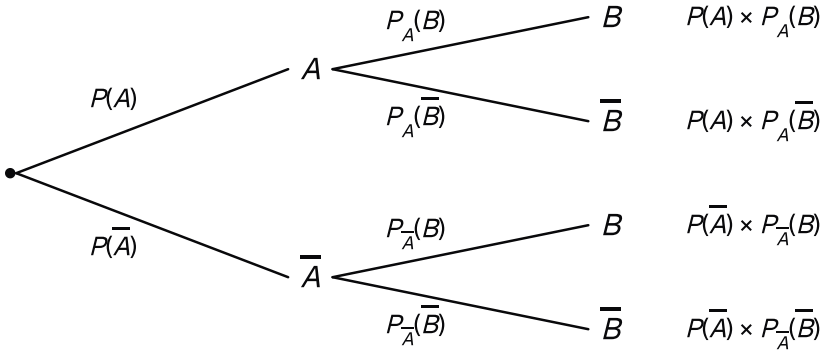
Par le contraire : aucun 4 dans $3^2 = 9$ couples, et $1 - \dfrac{9}{16} = \dfrac{7}{16}$. Les deux chemins s'accordent.

Probabilités conditionnelles

Définition : Probabilité conditionnelle

Soit A un événement tel que $P(A) \neq 0$. Pour tout événement B, la **probabilité de** B **sachant** A est le réel

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$



Arbre pondéré général : au premier niveau A et son contraire, au second les probabilités sachant la première branche, et au bout de chaque chemin le produit des deux nombres lus.

Propriété : Probabilités composées

Pour tous événements A et B tels que $P(A) \neq 0$:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B).$$

Définition : Système complet d'événements

Des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n \geq 2$) d'un univers Ω forment un **système complet d'événements** lorsqu'ils sont deux à deux incompatibles et que leur réunion est Ω :

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega.$$

Pour tout événement A, les événements A et $\overline{A}$ forment un système complet.

Théorème : Formule des probabilités totales

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un système complet d'événements dont aucun n'a une probabilité nulle. Pour tout événement B :

$$\begin{aligned} P(B) = {} & P(A_1) \times P_{A_1}(B) \\ & + P(A_2) \times P_{A_2}(B) \\ & + \ldots \\ & + P(A_n) \times P_{A_n}(B). \end{aligned}$$

En particulier, si $0 < P(A) < 1$:

$$\begin{aligned} P(B) = {} & P(A) \times P_A(B) \\ & + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B). \end{aligned}$$

Méthode : de l'arbre au tableau des chemins

1. Le premier niveau est un **système complet** : nomme-le (A et $\overline{A}$, ou $A_1, \ldots, A_n$) et donne ses probabilités.
2. Le second niveau porte des probabilités **sachant** la branche du premier.
3. Une ligne du tableau correspond à un chemin ; sa probabilité est le **produit** des deux nombres lus.
4. $P(D)$ est la **somme** des lignes qui aboutissent à D.
5. Pour remonter, $P_D(A)$, repars de la définition, avec $P(D) \neq 0$.

Exemple : deux jetons l'un après l'autre

Dans l'urne de 5 blancs et 3 noirs, on tire un jeton, on le garde, puis on en tire un second. N_1 : « le premier est noir » ; B_2 : « le second est blanc ».

$P(N_1) = \dfrac{3}{8}$. Si N_1 est réalisé, il reste 5 blancs et 2 noirs, donc $P_{N_1}(B_2) = \dfrac{5}{7}$. Par les probabilités composées :

$$P(N_1 \cap B_2) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56}.$$

Le dénombrement le confirme : $3 \times 5 = 15$ résultats sur $A_8^2 = 56$.

Exemple : contrôle de qualité

Une usine fabrique des pièces dans deux ateliers. On prend une pièce au hasard. A : « elle vient du premier atelier », avec $P(A) = \frac{3}{5}$; D : « elle est défectueuse ».

On sait que $P_A(D) = \frac{1}{40}$ et $P_{\overline{A}}(D) = \frac{1}{16}$. Le système complet est formé de A et $\overline{A}$.

Chemin	Probabilité
$A \cap D$	$\frac{3}{5} \times \frac{1}{40} = \frac{3}{200}$
$A \cap \overline{D}$	$\frac{3}{5} \times \frac{39}{40} = \frac{117}{200}$
$\overline{A} \cap D$	$\frac{2}{5} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{40}$
$\overline{A} \cap \overline{D}$	$\frac{2}{5} \times \frac{15}{16} = \frac{3}{8}$

Total des chemins : 1. Par les probabilités totales :

$$P(D) = \frac{3}{200} + \frac{1}{40} = \frac{8}{200} = \frac{1}{25}.$$

Comme $P(D) \neq 0$:

$$P_D(A) = \frac{3/200}{8/200} = \frac{3}{8}.$$

Indépendance

Définition : Indépendance de deux événements

Deux événements A et B sont **indépendants** lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Propriété : Indépendance et conditionnement

Soit A et B deux événements.

- Si $P(A) \neq 0$: A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.
- Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Propriété : Épreuves indépendantes

Lorsqu'une expérience est formée d'épreuves **indépendantes**, c'est-à-dire telles que le résultat de l'une ne modifie pas les probabilités des résultats des autres, la probabilité d'obtenir une liste donnée de résultats est le **produit** des probabilités de chacun de ces résultats.

Méthode : trancher sur l'indépendance

Calcule séparément trois nombres : $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$. Si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, les événements sont indépendants ; sinon, ils ne le sont pas. Quand $P(A) \neq 0$, comparer $P_A(B)$ à $P(B)$ revient au même. Ne conclus jamais sans ce calcul : ni l'intuition ni l'incompatibilité ne le remplacent.

Exemple : Exemples

- **Un lancer du tétraèdre** : $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, chaque issue de probabilité $\frac{1}{4}$. Soit $A = \{2, 4\}$ (« pair ») et $B = \{1, 2\}$ (« au plus 2 »), de probabilités $\frac{1}{2}$. Comme $A \cap B = \{2\}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$: A et B sont indépendants.
- **Contrôle de qualité** : $P(A \cap D) = \frac{3}{200}$ alors que $P(A) \times P(D) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{25} = \frac{3}{125}$. L'atelier d'origine et le défaut ne sont pas indépendants.
- **Épreuves indépendantes** : deux lancers du tétraèdre donnent « 4 puis un impair » avec la probabilité $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, soit 2 couples sur 16.

Variable aléatoire

Définition : Variable aléatoire

Une **variable aléatoire** X définie sur un univers fini Ω est une application qui associe un nombre réel à chaque issue de Ω. On note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ l'ensemble de ses valeurs et $(X = x_i)$ l'événement formé des issues auxquelles X associe x_i.

Définition : Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. La **loi de probabilité** de X est la donnée, pour chaque valeur x_i, de la probabilité $p_i = P(X = x_i)$. On la présente dans un tableau, et $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Définition : Espérance mathématique

Soit X une variable aléatoire de loi $p_i = P(X = x_i)$, pour i de 1 à n. L'**espérance mathématique** de X est le réel

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n.$$

Définition : Variance et écart-type

Avec les mêmes notations, la **variance** de X est le réel positif

$$\begin{aligned} V(X) = {} & p_1\big(x_1 - E(X)\big)^2 \\ & + p_2\big(x_2 - E(X)\big)^2 \\ & + \dots \\ & + p_n\big(x_n - E(X)\big)^2, \end{aligned}$$

et l'**écart-type** de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriété : Calcul pratique de la variance

Avec les mêmes notations :

$$\begin{aligned} V(X) = {} & x_1^2\,p_1 + x_2^2\,p_2 \\ & + \dots + x_n^2\,p_n \\ & - \big(E(X)\big)^2. \end{aligned}$$

Méthode : la loi, puis E, V et σ

1. Écris **toutes** les valeurs que peut prendre X.
2. Pour chacune, traduis $(X = x_i)$ par une phrase, puis calcule sa probabilité.
3. Range le tout dans un tableau à deux lignes et **vérifie que la somme fait** 1.
4. $E(X)$: somme des produits $x_i\,p_i$. Ensuite, somme des $x_i^2\,p_i$, dont tu retranches $\big(E(X)\big)^2$: c'est $V(X)$.
5. Une variance négative trahit une erreur ; sinon, $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$, en valeur exacte.

Ni la variance ni l'écart-type ne sont demandés dans les 15 sujets consultés (voir « Au bac ») ; ils restent utiles pour mesurer la dispersion de X.

Exemple : nombre de jetons noirs

On reprend les 3 jetons tirés d'un coup dans l'urne de 5 blancs et 3 noirs. X : nombre de noirs tirés ; $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. Les cardinaux sont $C_5^3 = 10$, $C_3^1 \times C_5^2 = 30$, $C_3^2 \times C_5^1 = 15$ et $C_3^3 = 1$, de total 56.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\dfrac{5}{28}$	$\dfrac{15}{28}$	$\dfrac{15}{56}$	$\dfrac{1}{56}$

Espérance.

$$E(X) = \frac{30 + 30 + 3}{56} = \frac{63}{56} = \frac{9}{8}.$$

Variance. La somme des $x_i^2\,p_i$ vaut $\dfrac{30 + 60 + 9}{56} = \dfrac{99}{56}$; on en retranche $\left(\dfrac{9}{8}\right)^2 = \dfrac{81}{64}$:

$$V(X) = \frac{99}{56} - \frac{81}{64} = \frac{225}{448}.$$

Écart-type.

$$\sigma(X) = \frac{15}{8\sqrt{7}} = \frac{15\sqrt{7}}{56}.$$

Schéma de Bernoulli et loi binomiale

Définition : Épreuve de Bernoulli et schéma de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** est une épreuve à deux issues : le **succès**, de probabilité p, et l'**échec**, de probabilité $1-p$.

Répéter n fois une épreuve de Bernoulli, dans des conditions **identiques** et de façon **indépendante**, c'est réaliser un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p.

Théorème : Loi binomiale

Soit X le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, avec $n \geq 1$ et $0 < p < 1$. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$:

$$P(X = k) = C_n^k \, p^k \, (1-p)^{n-k}.$$

On dit que X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p.

Propriété : Espérance et variance d'une loi binomiale

Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors

$$E(X) = np,$$
$$V(X) = np(1-p).$$

Méthode : reconnaître une loi binomiale

1. **L'épreuve** : décris ce qui est répété et ses deux issues ; appelle « succès » l'une d'elles et donne sa probabilité p.
2. **Les répétitions** : explique pourquoi les n épreuves sont identiques et indépendantes (jeton remis, lancers successifs…).
3. **La variable** : X doit **compter** les succès. Conclus : X suit la loi binomiale de paramètres n et p.
4. **Les calculs** : $P(X = k) = C_n^k \, p^k \, (1-p)^{n-k}$; pour « au moins un succès », passe par $P(X = 0) = (1-p)^n$.

Exemple : trois lancers du tétraèdre

On lance 3 fois le tétraèdre équilibré. Succès : « le 4 sort », de probabilité $\frac{1}{4}$. Les lancers sont identiques et indépendants, et X compte les succès : X suit la loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{4}$.

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

Par exemple, $P(X=1) = C_3^1 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64}$.

Par le contraire, $P(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{37}{64}$.

Enfin, $E(X) = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ et $V(X) = 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$.

Six pièges classiques

Attention : Incompatibles ne signifie pas indépendants

Un lancer du tétraèdre : $C = \{1\}$ et $D = \{3\}$ sont **incompatibles**, donc $P(C \cap D) = 0$, alors que $P(C) \times P(D) = \frac{1}{16}$: ils ne sont **pas** indépendants.

Avec deux probabilités non nulles, l'incompatibilité **interdit** l'indépendance : savoir que C est réalisé rend D impossible.

À l'inverse, $\{2, 4\}$ et $\{1, 2\}$ sont indépendants sans être incompatibles.

Attention : Le conditionnement ne se retourne pas

Au contrôle de qualité, $P_A(D) = \frac{1}{40}$: une pièce du premier atelier est rarement défectueuse. Pourtant $P_D(A) = \frac{3}{8}$: parmi les pièces défectueuses, plus d'une sur trois vient de cet atelier.

Pour inverser, repasse toujours par la définition :

$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)}.$$

Attention : L'équiprobabilité ne se décrète pas

Deux lancers du tétraèdre : la somme S prend 7 valeurs, de 2 à 8, qui ne sont pas également probables.

Sur les 16 couples équiprobables, un seul donne 2 et quatre donnent 5 : $P(S=2) = \frac{1}{16}$ et $P(S=5) = \frac{1}{4}$, et non $\frac{1}{7}$.

Le mot « équilibré » rend équiprobables les couples, pas les sommes.

Attention : Un seul modèle par quotient

On tire 2 jetons de l'urne (5 blancs, 3 noirs) ; on cherche la probabilité de deux blancs.

- D'un coup : $\frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$.
- Un par un, sans remise : $\frac{A_5^2}{A_8^2} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$.

Les deux modèles s'accordent. Le quotient hybride $\frac{A_5^2}{C_8^2} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7}$ est faux : il range l'événement mais pas l'univers.

Attention : Sans remise, pas de loi binomiale

On tire 2 jetons un par un dans la même urne ; Y compte les blancs.

Sans remise, le second tirage dépend du premier : « un seul blanc » regroupe $5 \times 3 + 3 \times 5 = 30$ résultats sur $A_8^2 = 56$, donc $P(Y = 1) = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$.

La loi binomiale de paramètres 2 et $\frac{5}{8}$ annoncerait $C_2^1 \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{15}{32}$, valeur exacte seulement **avec** remise. Avant d'écrire « binomiale », vérifie l'indépendance des épreuves.

Attention : L'espérance n'est pas forcément une valeur de X

Pour le nombre de jetons noirs, $E(X) = \frac{9}{8}$, alors que X ne prend que les valeurs 0, 1, 2 et 3. L'espérance est la **moyenne** des valeurs, chacune pondérée par sa probabilité ; rien n'oblige ce nombre à être une valeur de X.

Au bac

Constats sur **15 sujets nationaux** 2BAC SE (option française, 2016 à 2020 et 2023 à 2025) : **13** contiennent un exercice de probabilités, et **11** barèmes de cet exercice ont été lus. Ces fréquences décrivent ces sujets-là, pas le prochain examen.

Question	Sujets, sur 13	Points
probabilité d'un événement par équiprobabilité	13	0,5 à 1 par probabilité
loi d'une variable aléatoire	7	0,5 à 2
répétition d'épreuves, loi binomiale	4	0,5 à 2
« au moins… »	3	0,5 à 1
indépendance de deux événements	3	0,5
probabilité conditionnelle	2	0,5 à 0,75
espérance	2	0,25

Remarque : La forme de l'exercice

- Un exercice indépendant de 3 points dans 10 des 13 sujets.
- L'expérience est **toujours une urne** : tirage simultané dans 9 sujets, successif sans remise dans 3, successif avec remise dans 1, transfert entre deux urnes dans 1.
- Non relevé dans ces 15 sujets, ce qui ne veut pas dire « jamais demandé » : variance et écart-type, réunion $P(A \cup B)$ demandée explicitement, formule des probabilités totales demandée explicitement, dés.

Méthode : Rédiger pour ne perdre aucun point

1. **Sépare la formule et le résultat** : les barèmes lus notent le plus souvent à part le cardinal (ou la formule) et la valeur finale.
2. Donne de préférence une fraction irréductible : c'est la forme de tous les résultats des barèmes lus.
3. **Indépendance** : réponse et justification valent chacune $0{,}25$ dans les barèmes lus ; écris le calcul.
4. **« Au moins… »** : annonce le passage au contraire ; il est noté à part dans un barème.

Checklist avant le devoir

À retenir : Je sais…

- choisir entre n^p, A_n^p et C_n^p selon le tirage, et garder ce modèle pour tout le quotient ;
- justifier l'équiprobabilité par l'énoncé, puis calculer $P(A)$ en fraction irréductible ;
- passer par l'événement contraire pour « au moins un » ;
- lire un arbre en tableau des chemins : produits, puis somme sur un système complet nommé ;
- calculer $P_A(B)$ seulement quand $P(A) \neq 0$, sans le confondre avec $P_B(A)$;
- prouver ou réfuter une indépendance par le calcul ;
- dresser la loi de X, contrôler la somme 1, puis calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$;
- reconnaître une loi binomiale en nommant ses hypothèses et ses paramètres.