BURHAN

Calcul des probabilités : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/calcul-des-probabilites/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul des probabilités	Niveau examen	5

Exercice 1 3 pts

Une urne à trois couleurs, tirage simultané

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher : 4 boules bleues, 3 boules jaunes et 2 boules noires. On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

1. 0,25 pts

Justifie que le nombre de tirages possibles est égal à 84.

INDICE

Un tirage simultané ne tient pas compte de l'ordre.

2. 0,5 pts

On considère l'événement A : « les trois boules tirées sont de la même couleur ». Montre que $P(A) = \dfrac{5}{84}$.

INDICE

Trois boules de même couleur : elles sont toutes bleues ou toutes jaunes. Peuvent-elles être toutes noires ?

3. 0,5 pts

Calcule la probabilité de l'événement B : « on obtient une boule de chaque couleur ».

INDICE

Choisis une bleue, une jaune et une noire, puis multiplie les nombres de choix.

4. 0,5 pts

Calcule la probabilité de l'événement C : « au moins une des boules tirées est noire ».

INDICE

Décris l'événement contraire de C : il ne fait intervenir que les boules qui ne sont pas noires.

5. 1 pts

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées. Donne les valeurs prises par X, puis détermine sa loi de probabilité.

INDICE

Il n'y a que deux boules noires. Pour $X = k$, choisis les k noires, puis les autres boules parmi les 7 non noires.

6. 0,25 pts

Calcule l'espérance mathématique $E(X)$.

INDICE

Somme des produits de chaque valeur par sa probabilité.

Exercice 2 3 pts

Tirages avec remise et loi binomiale

Une urne contient 6 boules indiscernables au toucher : 2 boules rouges et 4 boules noires.

On tire au hasard une première boule, on regarde sa couleur et on la remet dans l'urne ; on tire ensuite au hasard une deuxième boule. On considère les événements R_1 : « la première boule tirée est rouge » et R_2 : « la deuxième boule tirée est rouge ».

1. 0,5 pts

Montre que $P(R_1) = P(R_2) = \dfrac{1}{3}$.

INDICE

Un résultat est un couple de boules, avec répétition possible puisque la première est remise.

2. 0,5 pts

Calcule $P(R_1 \cap R_2)$, puis montre que les événements R_1 et R_2 sont indépendants.

INDICE

$R_1 \cap R_2$: les deux boules sont rouges. Compare ensuite au produit $P(R_1) \times P(R_2)$.

3. 0,5 pts

On répète maintenant 5 fois l'épreuve « tirer une boule au hasard, noter sa couleur, la remettre dans l'urne ». Soit X le nombre de boules rouges obtenues au cours des 5 tirages. Justifie que X suit une loi binomiale et précise ses paramètres.

INDICE

Nomme les quatre conditions d'un schéma de Bernoulli et vérifie-les une à une.

4. 0,5 pts

Calcule la probabilité d'obtenir exactement deux boules rouges.

INDICE

Utilise $P(X = k) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}$ avec $k = 2$.

5. 0,75 pts

Quelle est la probabilité que l'une au moins des cinq boules tirées soit rouge ?

INDICE

Passe par l'événement contraire : aucune boule rouge en cinq tirages.

6. 0,25 pts

Calcule l'espérance $E(X)$.

INDICE

Pour une loi binomiale de paramètres n et p : $E(X) = np$.

Exercice 3 2,5 pts

Boules numérotées tirées sans remise

Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher : trois boules rouges portant les numéros 1, 1 et 2, et deux boules vertes portant les numéros 1 et 2. On tire au hasard une boule, puis une deuxième, sans remettre la première dans l'urne.

1. 0,25 pts

Calcule le nombre de résultats possibles.

INDICE

L'ordre des deux boules compte et une boule ne peut pas sortir deux fois.

2. 0,5 pts

Calcule la probabilité de chacun des événements A : « les deux boules tirées sont rouges » et B : « les deux boules tirées portent le même numéro ».

INDICE

Pour B, sépare les deux cas : deux boules numérotées 1, ou deux boules numérotées 2.

3. 0,5 pts

Calcule $P(A \cap B)$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

INDICE

$A \cap B$: deux boules rouges de même numéro. Lesquelles ? Compare ensuite au produit $P(A) \times P(B)$.

4. 0,5 pts

Sachant que les deux boules tirées sont rouges, quelle est la probabilité qu'elles portent le même numéro ?

INDICE

Tu cherches $P_A(B)$. Vérifie d'abord que $P(A) \neq 0$.

5. 0,75 pts

Soit X la variable aléatoire égale à la somme des numéros des deux boules tirées. Détermine la loi de probabilité de X.

INDICE

X ne peut valoir que 2, 3 ou 4. Pour $X = 3$, une boule porte 1 et l'autre 2, dans un ordre ou dans l'autre.

Exercice 4 3 pts

Transfert d'une boule entre deux urnes

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher. L'urne U_1 contient 3 boules jaunes et 2 boules vertes ; l'urne U_2 contient 1 boule jaune et 3 boules vertes.

On tire au hasard une boule de U_1 et on la place dans U_2, sans regarder sa couleur ; on tire ensuite au hasard une boule de U_2. On considère les événements J_1 : « la boule placée dans U_2 est jaune », V_1 : « la boule placée dans U_2 est verte » et J_2 : « la boule tirée de U_2 est jaune ».

1. 0,25 pts

Calcule $P(J_1)$ et $P(V_1)$, puis justifie que J_1 et V_1 forment un système complet d'événements.

INDICE

Un système complet est formé d'événements deux à deux incompatibles dont la réunion est l'univers.

2. 0,5 pts

Calcule $P_{J_1}(J_2)$ et $P_{V_1}(J_2)$, puis présente l'arbre pondéré de l'expérience sous la forme d'un tableau.

INDICE

Après le transfert, U_2 contient 5 boules. Compte ses boules jaunes dans chacun des deux cas.

3. 0,75 pts

Déduis-en que $P(J_2) = \dfrac{8}{25}$.

INDICE

Applique la formule des probabilités totales au système complet formé de J_1 et V_1 : deux chemins mènent à J_2.

4. 0,5 pts

La boule tirée de U_2 est jaune. Quelle est la probabilité que la boule placée dans U_2 ait été jaune ?

INDICE

Tu cherches $P_{J_2}(J_1)$: le conditionnement est dans le sens contraire de l'arbre. Calcule d'abord $P(J_1 \cap J_2)$.

5. 0,5 pts

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules jaunes parmi les deux boules manipulées (la boule placée dans U_2 et la boule tirée de U_2). Détermine la loi de probabilité de X.

INDICE

Chaque valeur de X correspond à un ou plusieurs chemins du tableau de la question 2. Pour $X = 1$, il y a deux chemins.

6. `0,5 pts`

Déduis-en la probabilité que l'urne U_2 ait, à la fin de l'expérience, la même composition qu'au départ.

INDICE

Une boule entre dans U_2, puis une boule en sort. À quelle condition sur leurs couleurs U_2 retrouve-t-elle 1 boule jaune et 3 vertes ?

Exercice 5 3 pts

Rang de la première carte marquée, tirages sans remise

Une boîte contient 5 cartes indiscernables au toucher : 2 cartes marquées d'une étoile et 3 cartes vierges. Un joueur tire au hasard les cartes une à une, sans remettre dans la boîte les cartes déjà tirées, jusqu'à ce que la boîte soit vide.

Pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, on note E_k l'événement « la k-ième carte tirée est marquée d'une étoile ». On note X la variable aléatoire égale au rang de la première carte marquée d'une étoile.

1. 0,5 pts

Calcule $P(X = 1)$, puis écris l'événement $(X = 2)$ à l'aide des événements E_1 et E_2.

INDICE

$X = 2$: la première carte n'est pas marquée et la deuxième l'est.

2. 0,5 pts

Montre que $P(X = 2) = \dfrac{3}{10}$.

INDICE

Utilise les probabilités composées : $P(\overline{E_1} \cap E_2) = P(\overline{E_1}) \times P_{\overline{E_1}}(E_2)$. Combien de cartes reste-t-il après le premier tirage, et combien sont marquées ?

3. 0,75 pts

Justifie que X ne prend que les valeurs 1, 2, 3 et 4, puis détermine la loi de probabilité de X.

INDICE

Il n'y a que 3 cartes vierges. Pour $X = 3$ et $X = 4$, multiplie les probabilités tirage après tirage, en tenant compte des cartes qui restent.

4. 0,5 pts

Sachant que la première carte tirée est vierge, quelle est la probabilité que le joueur tire sa première carte marquée au plus tard au troisième tirage ?

INDICE

Tu cherches $P_{\overline{E_1}}(X \leq 3)$. Si la première carte est vierge, l'événement $X \leq 3$ est réalisé lorsque $X = 2$ ou $X = 3$.

5. 0,25 pts

Calcule l'espérance $E(X)$ et interprète le résultat.

INDICE

Somme des produits de chaque valeur par sa probabilité ; écris toutes les probabilités sur le dénominateur 10.

6. `0,5 pts`

Calcule la variance $V(X)$, puis l'écart-type $\sigma(X)$.

INDICE

Calcul pratique : additionne les produits $k^2\,P(X=k)$, puis retranche $\big(E(X)\big)^2$.