BURHAN

Calcul des probabilités : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/calcul-des-probabilites/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul des probabilités	Niveau examen	5

Exercice 1 3 pts

Une urne à trois couleurs, tirage simultané

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher : 4 boules bleues, 3 boules jaunes et 2 boules noires. On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

1. 0,25 pts

Justifie que le nombre de tirages possibles est égal à 84.

INDICE

Un tirage simultané ne tient pas compte de l'ordre.

CORRIGÉ

Modèle. Un tirage simultané est une partie de 3 boules parmi 9 : ni ordre, ni répétition.

$$\begin{aligned}\text{card}(\Omega) &= C_9^3 \\ &= \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} \\ &= 84\end{aligned}$$

Équiprobabilité. Les boules sont indiscernables au toucher et tirées au hasard : les 84 tirages sont équiprobables.

Conclusion. Le nombre de tirages possibles est bien égal à 84.

2. 0,5 pts

On considère l'événement A : « les trois boules tirées sont de la même couleur ». Montre que $P(A) = \dfrac{5}{84}$.

INDICE

Trois boules de même couleur : elles sont toutes bleues ou toutes jaunes. Peuvent-elles être toutes noires ?

CORRIGÉ

Cas possibles. Il n'y a que 2 boules noires : trois boules de même couleur sont trois bleues ou trois jaunes, deux cas incompatibles. $\text{card}(A)$ est la somme des nombres de tirages de ces deux cas :

$$C_4^3 + C_3^3 = 4 + 1 = 5$$

Probabilité. Les tirages sont équiprobables :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{5}{84}$$

Conclusion. La probabilité que les trois boules soient de la même couleur est bien $P(A) = \dfrac{5}{84}$.

3. 0,5 pts

Calcule la probabilité de l'événement B : « on obtient une boule de chaque couleur ».

INDICE

Choisis une bleue, une jaune et une noire, puis multiplie les nombres de choix.

CORRIGÉ

On choisit une boule bleue parmi 4, une jaune parmi 3 et une noire parmi 2 :

$$\begin{aligned}\text{card}(B) &= C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1 \\ &= 4 \times 3 \times 2 = 24\end{aligned}$$

$$P(B) = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$$

Conclusion. On obtient une boule de chaque couleur avec la probabilité $\frac{2}{7}$.

4. 0,5 pts

Calcule la probabilité de l'événement C : « au moins une des boules tirées est noire ».

INDICE

Décris l'événement contraire de C : il ne fait intervenir que les boules qui ne sont pas noires.

CORRIGÉ

Événement contraire. $\overline{C}$ est l'événement « aucune boule noire » : les 3 boules sont prises parmi les 7 boules bleues ou jaunes, donc $\text{card}(\overline{C}) = C_7^3 = 35$.

$$\begin{aligned}P(C) &= 1 - P(\overline{C}) \\ &= 1 - \frac{35}{84} \\ &= \frac{49}{84} = \frac{7}{12}\end{aligned}$$

Conclusion. Au moins une des boules tirées est noire avec la probabilité $\frac{7}{12}$.

5. 1 pts

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées. Donne les valeurs prises par X, puis détermine sa loi de probabilité.

INDICE

Il n'y a que deux boules noires. Pour $X = k$, choisis les k noires, puis les autres boules parmi les 7 non noires.

CORRIGÉ

Valeurs. Il n'y a que 2 boules noires : X prend les valeurs 0, 1 et 2.

Dénombrement.

- $X = 0$: $C_7^3 = 35$ tirages (question 4).
- $X = 1$: une noire parmi 2 et deux boules parmi les 7 autres, $C_2^1 \times C_7^2 = 2 \times 21 = 42$ tirages.
- $X = 2$: les deux noires et une boule parmi les 7 autres, $C_2^2 \times C_7^1 = 7$ tirages.

Loi de X. Les 84 tirages sont équiprobables :

k	0	1	2
$P(X = k)$	$\frac{35}{84} = \frac{5}{12}$	$\frac{42}{84} = \frac{1}{2}$	$\frac{7}{84} = \frac{1}{12}$

Contrôle. $35 + 42 + 7 = 84$: la somme des probabilités vaut 1.

Conclusion. X prend les valeurs $0, 1, 2$, avec $P(X = 0) = \frac{5}{12}$, $P(X = 1) = \frac{1}{2}$ et $P(X = 2) = \frac{1}{12}$.

6. 0,25 pts

Calcule l'espérance mathématique $E(X)$.

INDICE

Somme des produits de chaque valeur par sa probabilité.

CORRIGÉ

On multiplie chaque valeur par sa probabilité, sur le dénominateur 12 :

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \frac{5}{12} + 1 \times \frac{6}{12} \\ &\quad + 2 \times \frac{1}{12} \\ &= \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Conclusion. $E(X) = \frac{2}{3}$.

Exercice 2 3 pts

Tirages avec remise et loi binomiale

Une urne contient 6 boules indiscernables au toucher : 2 boules rouges et 4 boules noires.

On tire au hasard une première boule, on regarde sa couleur et on la remet dans l'urne ; on tire ensuite au hasard une deuxième boule. On considère les événements R_1 : « la première boule tirée est rouge » et R_2 : « la deuxième boule tirée est rouge ».

1. 0,5 pts

Montre que $P(R_1) = P(R_2) = \dfrac{1}{3}$.

INDICE

Un résultat est un couple de boules, avec répétition possible puisque la première est remise.

CORRIGÉ

Univers. Un résultat est un couple (première boule, deuxième boule). La première boule est remise, donc une même boule peut sortir deux fois :

$$\mathrm{card}(\Omega) = 6^2 = 36$$

Les boules sont indiscernables au toucher et tirées au hasard : ces 36 résultats sont équiprobables.

Événements R_1 et R_2.

- R_1 : la première boule est l'une des 2 rouges, la deuxième est quelconque. Donc $\mathrm{card}(R_1) = 2 \times 6 = 12$ et $P(R_1) = \dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$.
- R_2 : de même, $\mathrm{card}(R_2) = 6 \times 2 = 12$ et $P(R_2) = \dfrac{1}{3}$.

Conclusion. $P(R_1) = P(R_2) = \dfrac{1}{3}$.

2. 0,5 pts

Calcule $P(R_1 \cap R_2)$, puis montre que les événements R_1 et R_2 sont indépendants.

INDICE

$R_1 \cap R_2$: les deux boules sont rouges. Compare ensuite au produit $P(R_1) \times P(R_2)$.

CORRIGÉ

Intersection. $R_1 \cap R_2$: les deux boules sont rouges, soit $2 \times 2 = 4$ résultats.

$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Comparaison.

$$\begin{aligned} P(R_1) \times P(R_2) &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

On a donc $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P(R_2)$.

Conclusion. $P(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{9}$, et les événements R_1 et R_2 sont **indépendants**.

3. 0,5 pts

On répète maintenant 5 fois l'épreuve « tirer une boule au hasard, noter sa couleur, la remettre dans l'urne ». Soit X le nombre de boules rouges obtenues au cours des 5 tirages. Justifie que X suit une loi binomiale et précise ses paramètres.

INDICE

Nomme les quatre conditions d'un schéma de Bernoulli et vérifie-les une à une.

CORRIGÉ

On vérifie les quatre conditions d'un schéma de Bernoulli.

- La même épreuve est répétée 5 fois, dans la même urne complète : les épreuves sont **identiques**.
- Grâce à la remise, le résultat d'un tirage ne change pas la composition de l'urne : les épreuves sont **indépendantes**.
- Chaque épreuve a **deux issues** : succès « boule rouge », de probabilité $\frac{1}{3}$, ou échec.
- X **compte les succès**.

Conclusion. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{3}$.

4. 0,5 pts

Calcule la probabilité d'obtenir exactement deux boules rouges.

INDICE

Utilise $P(X=k)=C_n^k\,p^k(1-p)^{n-k}$ avec $k=2$.

CORRIGÉ

On applique la formule de la loi binomiale avec $n=5$, $p=\dfrac{1}{3}$ et $k=2$:

$$\begin{aligned} P(X=2) &= C_5^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ &= 10\times\frac{1}{9}\times\frac{8}{27} \\ &= \frac{80}{243} \end{aligned}$$

Conclusion. On obtient exactement deux boules rouges avec la probabilité $\dfrac{80}{243}$.

5. 0,75 pts

Quelle est la probabilité que l'une au moins des cinq boules tirées soit rouge ?

INDICE

Passe par l'événement contraire : aucune boule rouge en cinq tirages.

CORRIGÉ

Le contraire de « au moins une boule rouge » est « aucune boule rouge », c'est-à-dire $X=0$:

$$\begin{aligned} P(X\geq 1) &= 1-P(X=0) \\ &= 1-\left(\frac{2}{3}\right)^5 \\ &= 1-\frac{32}{243}=\frac{211}{243} \end{aligned}$$

Conclusion. L'une au moins des cinq boules tirées est rouge avec la probabilité $\dfrac{211}{243}$.

6. 0,25 pts

Calcule l'espérance $E(X)$.

INDICE

Pour une loi binomiale de paramètres n et p : $E(X)=np$.

CORRIGÉ

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, $E(X)=np$:

$$E(X)=5\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$

Interprétation. Sur un grand nombre de séries de cinq tirages, on obtient en moyenne $\dfrac{5}{3}$ boule rouge par série.

Conclusion. $E(X)=\dfrac{5}{3}$.

Exercice 3 2,5 pts

Boules numérotées tirées sans remise

Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher : trois boules rouges portant les numéros 1, 1 et 2, et deux boules vertes portant les numéros 1 et 2. On tire au hasard une boule, puis une deuxième, sans remettre la première dans l'urne.

1. 0,25 pts

Calcule le nombre de résultats possibles.

INDICE

L'ordre des deux boules compte et une boule ne peut pas sortir deux fois.

CORRIGÉ

Modèle. Un résultat est un couple de deux boules distinctes, dans l'ordre de sortie : c'est un arrangement de 2 boules parmi 5.

$$\text{card}(\Omega) = A_5^2 = 5 \times 4 = 20$$

Équiprobabilité. Les boules sont indiscernables au toucher et tirées au hasard : les 20 résultats sont équiprobables. Les deux boules rouges numérotées 1 sont des boules différentes : on les compte séparément.

Conclusion. Il y a 20 résultats possibles.

2. 0,5 pts

Calcule la probabilité de chacun des événements A : « les deux boules tirées sont rouges » et B : « les deux boules tirées portent le même numéro ».

INDICE

Pour B, sépare les deux cas : deux boules numérotées 1, ou deux boules numérotées 2.

CORRIGÉ

Événement A. Deux boules rouges dans l'ordre, parmi 3 : $\text{card}(A) = A_3^2 = 6$.

$$P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

Événement B. Trois boules portent le numéro 1 et deux le numéro 2. Les deux cas « deux boules numérotées 1 » et « deux boules numérotées 2 » sont incompatibles, donc $\text{card}(B)$ est la somme :

$$A_3^2 + A_2^2 = 6 + 2 = 8$$

$$P(B) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

Conclusion. $P(A) = \frac{3}{10}$ et $P(B) = \frac{2}{5}$.

3. 0,5 pts

Calcule $P(A \cap B)$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

INDICE

$A \cap B$: deux boules rouges de même numéro. Lesquelles ? Compare ensuite au produit $P(A) \times P(B)$.

CORRIGÉ

Intersection. Les deux boules rouges de même numéro sont les deux rouges numérotées 1 : $\text{card}(A \cap B) = A_2^2 = 2$.

$$P(A \cap B) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

Comparaison.

$$\begin{aligned} P(A) \times P(B) &= \frac{3}{10} \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{3}{25} \end{aligned}$$

Ce produit n'est pas égal à $\frac{1}{10}$.

Conclusion. $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$, et les événements A et B **ne sont pas indépendants**.

4. 0,5 pts

Sachant que les deux boules tirées sont rouges, quelle est la probabilité qu'elles portent le même numéro ?

INDICE

Tu cherches $P_A(B)$. Vérifie d'abord que $P(A) \neq 0$.

CORRIGÉ

On cherche $P_A(B)$, qui existe car $P(A) = \frac{3}{10} \neq 0$:

$$\begin{aligned} P_A(B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{1}{10} \times \frac{10}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Contrôle. Parmi les 6 résultats formés de deux rouges, 2 ont deux boules de même numéro : $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Comme $P_A(B) \neq P(B)$, on retrouve que A et B ne sont pas indépendants.

Conclusion. Sachant que les deux boules sont rouges, elles portent le même numéro avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

5. `0,75 pts`

Soit X la variable aléatoire égale à la somme des numéros des deux boules tirées. Détermine la loi de probabilité de X.

INDICE

X ne peut valoir que 2, 3 ou 4. Pour $X = 3$, une boule porte 1 et l'autre 2, dans un ordre ou dans l'autre.

CORRIGÉ

Valeurs. Les numéros valent 1 ou 2, donc X prend les valeurs 2, 3 et 4.

Dénombrement.

- $X = 2$: deux boules numérotées 1, $A_3^2 = 6$ résultats.
- $X = 4$: deux boules numérotées 2, $A_2^2 = 2$ résultats.
- $X = 3$: une boule numérotée 1 (3 choix) et une numérotée 2 (2 choix), dans l'un des deux ordres : $2 \times 3 \times 2 = 12$ résultats.

Loi de X. Les 20 résultats sont équiprobables :

k	2	3	4
$P(X = k)$	$\dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10}$	$\dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}$	$\dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10}$

Contrôle. $6 + 12 + 2 = 20$: la somme des probabilités vaut 1.

Conclusion. $P(X = 2) = \dfrac{3}{10}$, $P(X = 3) = \dfrac{3}{5}$ et $P(X = 4) = \dfrac{1}{10}$.

Exercice 4 3 pts

Transfert d'une boule entre deux urnes

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher. L'urne U_1 contient 3 boules jaunes et 2 boules vertes ; l'urne U_2 contient 1 boule jaune et 3 boules vertes.

On tire au hasard une boule de U_1 et on la place dans U_2, sans regarder sa couleur ; on tire ensuite au hasard une boule de U_2. On considère les événements J_1 : « la boule placée dans U_2 est jaune », V_1 : « la boule placée dans U_2 est verte » et J_2 : « la boule tirée de U_2 est jaune ».

1. 0,25 pts

Calcule $P(J_1)$ et $P(V_1)$, puis justifie que J_1 et V_1 forment un système complet d'événements.

INDICE

Un système complet est formé d'événements deux à deux incompatibles dont la réunion est l'univers.

CORRIGÉ

Probabilités. Les 5 boules de U_1 sont indiscernables au toucher et la boule est tirée au hasard : elles ont la même probabilité d'être tirées. U_1 contient 3 jaunes et 2 vertes, donc :

$$P(J_1) = \frac{3}{5}$$

$$P(V_1) = \frac{2}{5}$$

Système complet. La boule placée dans U_2 est jaune ou verte, et pas les deux : J_1 et V_1 sont incompatibles et $J_1 \cup V_1 = \Omega$ (autrement dit $V_1 = \overline{J_1}$). De plus, leurs probabilités sont non nulles.

Conclusion. $P(J_1) = \frac{3}{5}$, $P(V_1) = \frac{2}{5}$, et J_1, V_1 forment un système complet d'événements.

2. 0,5 pts

Calcule $P_{J_1}(J_2)$ et $P_{V_1}(J_2)$, puis présente l'arbre pondéré de l'expérience sous la forme d'un tableau.

INDICE

Après le transfert, U_2 contient 5 boules. Compte ses boules jaunes dans chacun des deux cas.

CORRIGÉ

Probabilités conditionnelles. Après le transfert, U_2 contient 5 boules.

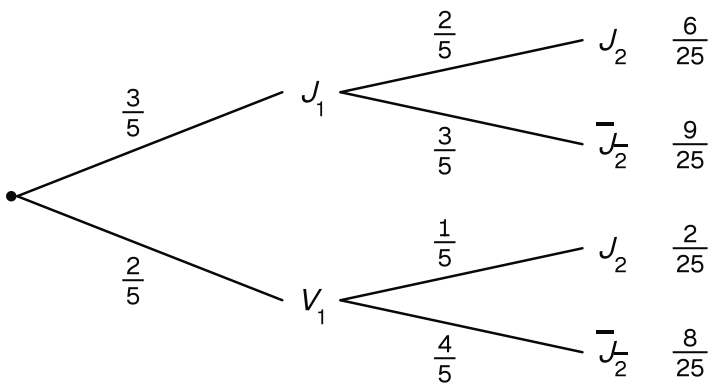
- Si J_1 est réalisé, U_2 contient 2 boules jaunes et 3 vertes : $P_{J_1}(J_2) = \dfrac{2}{5}$.
- Si V_1 est réalisé, U_2 contient 1 boule jaune et 4 vertes : $P_{V_1}(J_2) = \dfrac{1}{5}$.

Arbre pondéré. La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités lues le long de ce chemin : probabilité de la première étape, puis probabilité conditionnelle de la seconde.

Chemin	Probabilité du chemin
J_1 puis J_2	$\dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{6}{25}$
J_1 puis $\overline{J_2}$	$\dfrac{3}{5} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{9}{25}$
V_1 puis J_2	$\dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{25}$
V_1 puis $\overline{J_2}$	$\dfrac{2}{5} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{8}{25}$

Contrôle. $6 + 9 + 2 + 8 = 25$: la somme des probabilités des quatre chemins vaut 1.

Conclusion. $P_{J_1}(J_2) = \dfrac{2}{5}$ et $P_{V_1}(J_2) = \dfrac{1}{5}$; le tableau ci-dessus résume l'arbre pondéré.



Arbre pondéré du transfert : la couleur de la boule placée dans U2, puis celle de la boule tirée de U2, avec la probabilité de chaque chemin.

3. 0,75 pts

Déduis-en que $P(J_2) = \dfrac{8}{25}$.

INDICE

Applique la formule des probabilités totales au système complet formé de J_1 et V_1 : deux chemins mènent à J_2.

CORRIGÉ

J_1 et V_1 forment un système complet d'événements de probabilités non nulles (question 1). D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(J_2) &= P(J_1) \times P_{J_1}(J_2) \\ &\quad + P(V_1) \times P_{V_1}(J_2) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{6}{25} + \frac{2}{25} = \frac{8}{25} \end{aligned}$$

Conclusion. $P(J_2) = \dfrac{8}{25}$.

4. 0,5 pts

La boule tirée de U_2 est jaune. Quelle est la probabilité que la boule placée dans U_2 ait été jaune ?

INDICE

Tu cherches $P_{J_2}(J_1)$: le conditionnement est dans le sens contraire de l'arbre. Calcule d'abord $P(J_1 \cap J_2)$.

CORRIGÉ

On cherche $P_{J_2}(J_1)$, qui existe car $P(J_2) = \dfrac{8}{25} \neq 0$. Le conditionnement est dans le sens contraire de l'arbre.

Probabilité du chemin. Par les probabilités composées :

$$\begin{aligned} &P(J_1 \cap J_2) \\ &= P(J_1) \times P_{J_1}(J_2) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25} \end{aligned}$$

Probabilité cherchée.

$$\begin{aligned} P_{J_2}(J_1) &= \frac{P(J_1 \cap J_2)}{P(J_2)} \\ &= \frac{6}{25} \times \frac{25}{8} \\ &= \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

On remarque que $P_{J_2}(J_1) = \dfrac{3}{4}$ est différent de $P_{J_1}(J_2) = \dfrac{2}{5}$: un conditionnement ne se retourne pas.

Conclusion. Sachant que la boule tirée de U_2 est jaune, la boule placée dans U_2 était jaune avec la probabilité $\dfrac{3}{4}$.

5. 0,5 pts

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules jaunes parmi les deux boules manipulées (la boule placée dans U_2 et la boule tirée de U_2). Détermine la loi de probabilité de X.

INDICE

Chaque valeur de X correspond à un ou plusieurs chemins du tableau de la question 2. Pour $X = 1$, il y a deux chemins.

CORRIGÉ

Valeurs. X prend les valeurs 0, 1 et 2. Chaque valeur correspond à un ou plusieurs chemins du tableau de la question 2.

- $X = 2$: chemin J_1 puis J_2, donc $P(X = 2) = \dfrac{6}{25}$.
- $X = 0$: chemin V_1 puis $\overline{J_2}$, donc $P(X = 0) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{8}{25}$.
- $X = 1$: chemins J_1 puis $\overline{J_2}$, et V_1 puis J_2, incompatibles, donc $P(X = 1) = \dfrac{9}{25} + \dfrac{2}{25} = \dfrac{11}{25}$.

Loi de X.

k	0	1	2
$P(X = k)$	$\dfrac{8}{25}$	$\dfrac{11}{25}$	$\dfrac{6}{25}$

Contrôle. $8 + 11 + 6 = 25$: la somme des probabilités vaut 1.

Conclusion. $P(X = 0) = \dfrac{8}{25}$, $P(X = 1) = \dfrac{11}{25}$ et $P(X = 2) = \dfrac{6}{25}$.

6. 0,5 pts

Déduis-en la probabilité que l'urne U_2 ait, à la fin de l'expérience, la même composition qu'au départ.

INDICE

Une boule entre dans U_2, puis une boule en sort. À quelle condition sur leurs couleurs U_2 retrouve-t-elle 1 boule jaune et 3 vertes ?

CORRIGÉ

Traduction. Une boule entre dans U_2, puis une boule en sort. U_2 retrouve 1 boule jaune et 3 boules vertes exactement lorsque la boule tirée a la couleur de la boule placée : deux jaunes ($X = 2$) ou deux vertes ($X = 0$).

Si les couleurs diffèrent ($X = 1$), U_2 contient à la fin 2 jaunes et 2 vertes, ou 0 jaune et 4 vertes.

Calcul. Notons F l'événement « U_2 a, à la fin, sa composition de départ ». Alors $F = (X = 0) \cup (X = 2)$, réunion de deux événements incompatibles. D'après la loi de la question 5 :

$$\begin{aligned} P(F) &= P(X = 0) \\ &\quad + P(X = 2) \\ &= \frac{8}{25} + \frac{6}{25} \\ &= \frac{14}{25} \end{aligned}$$

Contrôle. F est l'événement contraire de $(X = 1)$: $1 - P(X = 1) = 1 - \frac{11}{25} = \frac{14}{25}$.

Conclusion. L'urne U_2 retrouve à la fin sa composition de départ avec la probabilité $\frac{14}{25}$.

Exercice 5 3 pts

Rang de la première carte marquée, tirages sans remise

Une boîte contient 5 cartes indiscernables au toucher : 2 cartes marquées d'une étoile et 3 cartes vierges. Un joueur tire au hasard les cartes une à une, sans remettre dans la boîte les cartes déjà tirées, jusqu'à ce que la boîte soit vide.

Pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, on note E_k l'événement « la k-ième carte tirée est marquée d'une étoile ». On note X la variable aléatoire égale au rang de la première carte marquée d'une étoile.

1. 0,5 pts

Calcule $P(X = 1)$, puis écris l'événement $(X = 2)$ à l'aide des événements E_1 et E_2.

INDICE

$X = 2$: la première carte n'est pas marquée et la deuxième l'est.

CORRIGÉ

Calcul de $P(X = 1)$. Les 5 cartes ont la même probabilité d'être tirées en premier. L'événement $(X = 1)$ signifie que la première carte tirée est marquée :

$$P(X = 1) = P(E_1) = \frac{2}{5}$$

Écriture de $(X = 2)$. $X = 2$ signifie que la première carte est vierge et que la deuxième est marquée.

Conclusion. $P(X = 1) = \dfrac{2}{5}$ et $(X = 2) = \overline{E_1} \cap E_2$.

2. 0,5 pts

Montre que $P(X = 2) = \dfrac{3}{10}$.

INDICE

Utilise les probabilités composées : $P(\overline{E_1} \cap E_2) = P(\overline{E_1}) \times P_{\overline{E_1}}(E_2)$. Combien de cartes reste-t-il après le premier tirage, et combien sont marquées ?

CORRIGÉ

Probabilité conditionnelle. On a $P(\overline{E_1}) = \dfrac{3}{5} \neq 0$. Si la première carte est vierge, il reste 4 cartes dont 2 marquées :

$$P_{\overline{E_1}}(E_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Probabilités composées.

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= P(\overline{E_1} \cap E_2) \\ &= P(\overline{E_1}) \times P_{\overline{E_1}}(E_2) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

Conclusion. On a bien $P(X = 2) = \dfrac{3}{10}$.

3. 0,75 pts

Justifie que X ne prend que les valeurs 1, 2, 3 et 4, puis détermine la loi de probabilité de X.

INDICE

Il n'y a que 3 cartes vierges. Pour $X = 3$ et $X = 4$, multiplie les probabilités tirage après tirage, en tenant compte des cartes qui restent.

CORRIGÉ

Valeurs. Il n'y a que 3 cartes vierges : au plus tard, la quatrième carte tirée est marquée. X prend donc les valeurs 1, 2, 3 et 4.

Cas $X = 3$. Deux cartes vierges, puis une carte marquée parmi les 3 restantes :

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{12}{60} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Cas $X = 4$. Les trois cartes vierges, puis forcément une carte marquée :

$$\begin{aligned} P(X = 4) &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} \\ &= \frac{12}{120} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Loi de X. Avec les questions 1 et 2 :

k	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

Contrôle. $\frac{4}{10} + \frac{3}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = 1$: la somme des probabilités vaut 1.

Conclusion. X ne prend que les valeurs 1, 2, 3 et 4, et sa loi est donnée par le tableau ci-dessus.

4. 0,5 pts

Sachant que la première carte tirée est vierge, quelle est la probabilité que le joueur tire sa première carte marquée au plus tard au troisième tirage ?

INDICE

Tu cherches $P_{\overline{E_1}}(X \leq 3)$. Si la première carte est vierge, l'événement $X \leq 3$ est réalisé lorsque $X = 2$ ou $X = 3$.

CORRIGÉ

On cherche $P_{\overline{E_1}}(X \leq 3)$, qui existe car $P(\overline{E_1}) = \dfrac{3}{5} \neq 0$.

Traduction. Si la première carte est vierge, alors $X \geq 2$. Donc l'événement $(X \leq 3) \cap \overline{E_1}$ est égal à $(X = 2) \cup (X = 3)$, réunion de deux événements incompatibles.

Calcul.

$$\begin{aligned} & P_{\overline{E_1}}(X \leq 3) \\ &= \frac{P(X = 2) + P(X = 3)}{P(\overline{E_1})} \\ &= \left(\frac{3}{10} + \frac{2}{10}\right) \times \frac{5}{3} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Contrôle. Après une première carte vierge, il reste 2 cartes marquées et 2 vierges. L'événement contraire est « les deux cartes suivantes sont vierges », de probabilité $\dfrac{2}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$, et $1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$.

Conclusion. Sachant que la première carte est vierge, le joueur tire sa première carte marquée au plus tard au troisième tirage avec la probabilité $\dfrac{5}{6}$.

5. 0,25 pts

Calcule l'espérance $E(X)$ et interprète le résultat.

INDICE

Somme des produits de chaque valeur par sa probabilité ; écris toutes les probabilités sur le dénominateur 10.

CORRIGÉ

On écrit toutes les probabilités sur le dénominateur 10 :

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{4}{10} + 2 \times \frac{3}{10} \\ &\quad + 3 \times \frac{2}{10} + 4 \times \frac{1}{10} \\ &= \frac{4+6+6+4}{10} \\ &= \frac{20}{10} = 2 \end{aligned}$$

Interprétation. Sur un grand nombre de parties, la première carte marquée apparaît en moyenne au deuxième tirage.

Conclusion. $E(X) = 2$.

6. 0,5 pts

Calcule la variance $V(X)$, puis l'écart-type $\sigma(X)$.

INDICE

Calcul pratique : additionne les produits $k^2\,P(X=k)$, puis retranche $\big(E(X)\big)^2$.

CORRIGÉ

Calcul pratique de la variance. Notons M la somme des produits $k^2\,P(X=k)$:

$$\begin{aligned} M &= 1 \times \frac{4}{10} + 4 \times \frac{3}{10} \\ &\quad + 9 \times \frac{2}{10} + 16 \times \frac{1}{10} \\ &= \frac{4+12+18+16}{10} \\ &= \frac{50}{10} = 5 \end{aligned}$$

Avec $E(X) = 2$ (question 5) :

$$\begin{aligned} V(X) &= M - \big(E(X)\big)^2 \\ &= 5 - 2^2 \\ &= 5 - 4 = 1 \end{aligned}$$

Écart-type.

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1$$

Conclusion. $V(X) = 1$ et $\sigma(X) = 1$.