BURHAN

Calcul des probabilités : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/calcul-des-probabilites/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul des probabilités	Entraînement	5

Exercice 1

Trois boules sans remise : loi et espérance

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher : 2 orange et 6 grises. On tire au hasard une boule, on la garde, puis on en tire une deuxième, puis une troisième, sans jamais remettre de boule dans l'urne. On note X le nombre de boules orange obtenues.

1.

Quel modèle de dénombrement décrit un résultat de cette expérience ? Calcule le nombre de résultats possibles et justifie qu'ils sont équiprobables.

INDICE

Les boules sortent l'une après l'autre et ne reviennent pas : l'ordre compte-t-il ? Une même boule peut-elle sortir deux fois ?

2.

Détermine la loi de probabilité de X et vérifie que la somme des probabilités vaut 1.

INDICE

Reste dans le modèle ordonné de la question 1. Pour $X = 1$, la boule orange peut sortir en premier, en deuxième ou en troisième. Combien de boules orange l'urne contient-elle ?

3.

Calcule l'espérance $E(X)$ et interprète-la. Est-ce une valeur que X peut prendre ?

INDICE

Multiplie chaque valeur par sa probabilité et additionne. Garde le dénominateur commun 336 jusqu'à la fin.

4.

La variable X suit-elle une loi binomiale ?

INDICE

Les épreuves d'un schéma de Bernoulli doivent être indépendantes. Que devient la composition de l'urne après la première boule ?

Exercice 2

Les oranges de trois vergers

Une coopérative agricole reçoit ses oranges de trois vergers, numérotés 1, 2 et 3. La moitié des oranges vient du verger 1, les $\frac{3}{10}$ du verger 2 et le reste du verger 3. Une orange est classée « extra » avec la probabilité $\frac{7}{10}$ si elle vient du verger 1, $\frac{1}{2}$ si elle vient du verger 2 et $\frac{1}{4}$ si elle vient du verger 3.

On prélève une orange au hasard dans le stock. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note V_i l'événement « l'orange vient du verger i », et E l'événement « l'orange est classée extra ».

1.

Calcule $P(V_3)$. Explique pourquoi V_1, V_2 et V_3 forment un système complet d'événements, puis présente l'arbre pondéré de la situation sous la forme d'un tableau.

INDICE

Les trois proportions ont pour somme 1. Dans le tableau, mets une ligne par verger : la probabilité de la branche, la probabilité d'être extra sachant le verger, puis leur produit.

2.

Calcule la probabilité que l'orange prélevée soit classée extra.

INDICE

Additionne les probabilités des trois chemins qui mènent à E : c'est permis parce que les vergers forment un système complet.

3.

L'orange prélevée est classée extra. Quelle est la probabilité qu'elle vienne du verger 1 ? du verger 3 ?

INDICE

On connaît maintenant E et l'on cherche la provenance : la condition est E. Divise la probabilité du chemin par $P(E)$.

4.

Les événements V_1 et E sont-ils indépendants ?

INDICE

Compare $P(V_1 \cap E)$, lu dans le tableau, au produit $P(V_1) \times P(E)$.

Exercice 3

Pair, multiple de 3 : vingt-quatre jetons

Un sac contient 24 jetons numérotés de 1 à 24, indiscernables au toucher. On tire un jeton au hasard. On considère les événements A : « le numéro est pair », B : « le numéro est un multiple de 3 » et C : « le numéro est un multiple de 4 ».

1.

Calcule $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$, puis $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

INDICE

Un numéro à la fois pair et multiple de 3 est un multiple de 6. Pour la réunion, ne compte pas deux fois les numéros communs.

2.

Les événements A et B sont-ils indépendants ? Et les événements A et C ?

INDICE

Pour chaque couple, calcule l'intersection, puis compare-la au produit des probabilités. Remarque que tout multiple de 4 est pair.

3.

Vérifie par un dénombrement que $\overline{A}$ et B sont indépendants. On remplace ensuite le sac par un sac de 25 jetons numérotés de 1 à 25 : les événements A et B sont-ils encore indépendants ?

INDICE

Compte les multiples de 3 impairs. Avec 25 jetons, recompte chaque effectif : le numéro 25 n'est ni pair ni multiple de 3.

Exercice 4

Quatre tirages avec remise

Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher : 2 rouges et 3 blanches. On tire une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la **replace** dans l'urne avant le tirage suivant. On réalise ainsi 4 tirages et l'on note X le nombre de boules rouges obtenues.

1.

Combien y a-t-il de résultats possibles, en notant dans l'ordre les quatre boules tirées ? Justifie que les quatre tirages sont des épreuves identiques et indépendantes.

INDICE

Chaque tirage se fait dans la même urne complète. Le résultat d'un tirage modifie-t-il les chances du suivant ?

2.

Justifie que X suit une loi binomiale dont tu préciseras les paramètres. Donne la loi de X dans un tableau et vérifie que la somme des probabilités vaut 1.

INDICE

Vérifie les quatre conditions, puis applique $P(X=k)=C_4^k\,p^k(1-p)^{4-k}$ pour k de 0 à 4. Garde le dénominateur 625.

3.

Calcule la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge.

INDICE

« Au moins une rouge » a un contraire très simple à décrire.

4.

Calcule $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

INDICE

Pour une loi binomiale, $E(X)=np$ et $V(X)=np(1-p)$. Tu peux contrôler avec le tableau de la question 2.

5.

On tire maintenant 4 boules l'une après l'autre **sans** les replacer. Quelles valeurs le nombre de boules rouges obtenues peut-il prendre ? Suit-il encore la loi de la question 2 ?

INDICE

Il n'y a que 3 boules blanches dans l'urne : combien de boules rouges sortent au minimum ? au maximum ?

Exercice 5

La somme de deux jetons : variance et écart-type

Pour une kermesse, un sac contient 6 jetons indiscernables au toucher : un jeton marqué 10, deux jetons marqués 5 et trois jetons marqués 0. Un joueur prend au hasard deux jetons à la fois ; son score X est la somme des deux nombres inscrits.

1.

Calcule le nombre de tirages possibles et donne les valeurs que peut prendre X.

INDICE

Les jetons sont pris ensemble : l'ordre ne compte pas. Pour les valeurs de X, combine les marques deux à deux.

2.

Détermine la loi de probabilité de X.

INDICE

La valeur 10 s'obtient de deux façons différentes : compte les deux, puis additionne.

3.

Calcule $E(X)$ et interprète ce nombre. Calcule aussi la probabilité que le score soit au moins égal à 10.

INDICE

Utilise le dénominateur commun 15. Pour la seconde probabilité, additionne deux colonnes du tableau.

4.

Calcule la variance $V(X)$ de deux façons, puis l'écart-type $\sigma(X)$.

INDICE

Première façon : la moyenne des carrés des écarts à $E(X)$. Seconde façon : $x_1^2 p_1 + \cdots + x_n^2 p_n - \big(E(X)\big)^2$. Les deux résultats doivent coïncider.