BURHAN

Calcul des probabilités : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/calcul-des-probabilites/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul des probabilités	Entraînement	5

Exercice 1

Trois boules sans remise : loi et espérance

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher : 2 orange et 6 grises. On tire au hasard une boule, on la garde, puis on en tire une deuxième, puis une troisième, sans jamais remettre de boule dans l'urne. On note X le nombre de boules orange obtenues.

1.

Quel modèle de dénombrement décrit un résultat de cette expérience ? Calcule le nombre de résultats possibles et justifie qu'ils sont équiprobables.

INDICE

Les boules sortent l'une après l'autre et ne reviennent pas : l'ordre compte-t-il ? Une même boule peut-elle sortir deux fois ?

CORRIGÉ

Modèle. Un résultat est la liste ordonnée (b_1, b_2, b_3) des boules tirées : l'ordre compte (première, deuxième, troisième) et une boule ne peut pas sortir deux fois. C'est un **arrangement** de 3 boules parmi 8.

Nombre de résultats. On a $\mathrm{card}(\Omega) = A_8^3$, avec :

$$A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

Équiprobabilité. Les boules sont indiscernables au toucher et tirées au hasard : aucun résultat n'est favorisé.

Conclusion. Un résultat est un arrangement de 3 boules parmi 8 ; il y a 336 résultats possibles, tous équiprobables.

2.

Détermine la loi de probabilité de X et vérifie que la somme des probabilités vaut 1.

INDICE

Reste dans le modèle ordonné de la question 1. Pour $X = 1$, la boule orange peut sortir en premier, en deuxième ou en troisième. Combien de boules orange l'urne contient-elle ?

CORRIGÉ

Valeurs. L'urne ne contient que 2 boules orange : X prend les valeurs 0, 1 et 2, et $X = 3$ est impossible.

Dénombrement. On compte dans le **même** modèle que l'univers, celui des listes ordonnées.

- $X = 0$: trois boules grises dans l'ordre, $A_6^3 = 120$ résultats.
- $X = 1$: la place de la boule orange (3 choix), la boule orange (2 choix), puis les deux grises dans l'ordre ($A_6^2 = 30$) : $3 \times 2 \times 30 = 180$ résultats.
- $X = 2$: la place de la boule grise (3 choix), les deux orange dans l'ordre ($A_2^2 = 2$), la grise (6 choix) : $3 \times 2 \times 6 = 36$ résultats.

Loi de X. Les résultats sont équiprobables : on divise chaque effectif par 336.

k	0	1	2
$P(X = k)$	$\frac{120}{336} = \frac{5}{14}$	$\frac{180}{336} = \frac{15}{28}$	$\frac{36}{336} = \frac{3}{28}$

Contrôle. $120 + 180 + 36 = 336$: la somme des probabilités vaut 1.

Piège. Compter « une orange et deux grises » par $2 \times A_6^2 = 60$, sans choisir la place de la boule orange, mélange deux modèles : l'univers est ordonné, l'événement doit l'être aussi.

Conclusion. $P(X = 0) = \frac{5}{14}$, $P(X = 1) = \frac{15}{28}$, $P(X = 2) = \frac{3}{28}$, et la somme de ces probabilités vaut 1.

3.

Calcule l'espérance $E(X)$ et interprète-la. Est-ce une valeur que X peut prendre ?

INDICE

Multiplie chaque valeur par sa probabilité et additionne. Garde le dénominateur commun 336 jusqu'à la fin.

CORRIGÉ

Calcul. On garde le dénominateur commun 336 :

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \frac{120}{336} + 1 \times \frac{180}{336} \\ &\quad + 2 \times \frac{36}{336} \\ &= \frac{180 + 72}{336} = \frac{252}{336} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Interprétation. Si l'on répète ce tirage un grand nombre de fois, on obtient en moyenne $\frac{3}{4} = 0{,}75$ boule orange par tirage.

Conclusion. $E(X) = \frac{3}{4}$. Ce n'est **pas** une valeur que X peut prendre, puisque X est un entier : l'espérance est une moyenne, pas un résultat possible.

4.

La variable X suit-elle une loi binomiale ?

INDICE

Les épreuves d'un schéma de Bernoulli doivent être indépendantes. Que devient la composition de l'urne après la première boule ?

CORRIGÉ

Dépendance des tirages. Sachant que la première boule est orange, il ne reste qu'une boule orange sur 7 : la probabilité de tirer une boule orange au deuxième tirage vaut alors $\frac{1}{7}$, et non $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Les trois tirages ne sont pas indépendants.

Contre-exemple. La loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{4}$ donnerait :

$$P(X = 3) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

Or ici $X = 3$ est impossible : $P(X = 3) = 0$.

Conclusion. Non, X ne suit pas une loi binomiale.

Exercice 2

Les oranges de trois vergers

Une coopérative agricole reçoit ses oranges de trois vergers, numérotés 1, 2 et 3. La moitié des oranges vient du verger 1, les $\dfrac{3}{10}$ du verger 2 et le reste du verger 3. Une orange est classée « extra » avec la probabilité $\dfrac{7}{10}$ si elle vient du verger 1, $\dfrac{1}{2}$ si elle vient du verger 2 et $\dfrac{1}{4}$ si elle vient du verger 3.

On prélève une orange au hasard dans le stock. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note V_i l'événement « l'orange vient du verger i », et E l'événement « l'orange est classée extra ».

1.

Calcule $P(V_3)$. Explique pourquoi V_1, V_2 et V_3 forment un système complet d'événements, puis présente l'arbre pondéré de la situation sous la forme d'un tableau.

INDICE

Les trois proportions ont pour somme 1. Dans le tableau, mets une ligne par verger : la probabilité de la branche, la probabilité d'être extra sachant le verger, puis leur produit.

CORRIGÉ

Calcul de $P(V_3)$.

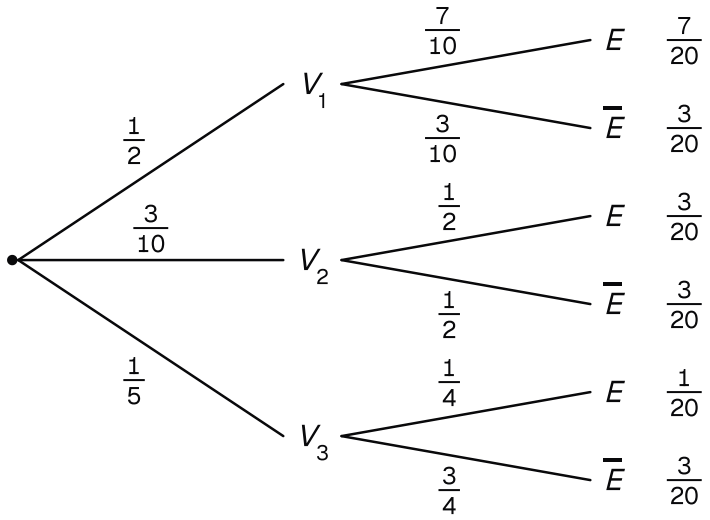
$$P(V_3) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$$

Système complet. Chaque orange vient d'un verger et d'un seul : les trois événements sont deux à deux incompatibles, et leur réunion est l'univers. De plus, aucun n'a une probabilité nulle. Ils forment donc un **système complet**.

Arbre pondéré. Les probabilités « extra » de l'énoncé sont des probabilités **sachant le verger** : ce sont $P_{V_1}(E)$, $P_{V_2}(E)$ et $P_{V_3}(E)$. La dernière colonne est le produit des deux précédentes : $P(V_i \cap E) = P(V_i) \times P_{V_i}(E)$.

Verger	$P(V_i)$	$P_{V_i}(E)$	$P(V_i \cap E)$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{20}$
2	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{20}$
3	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$

Conclusion. $P(V_3) = \frac{1}{5}$; V_1, V_2 et V_3 forment un système complet d'événements, et le tableau ci-dessus résume l'arbre pondéré.



Arbre pondéré des trois vergers, puis du classement extra sachant le verger, avec la probabilité de chaque chemin.

2.

Calcule la probabilité que l'orange prélevée soit classée extra.

INDICE

Additionne les probabilités des trois chemins qui mènent à E : c'est permis parce que les vergers forment un système complet.

CORRIGÉ

Comme V_1, V_2 et V_3 forment un système complet, la formule des probabilités totales s'applique : on additionne la dernière colonne du tableau.

$$\begin{aligned} P(E) &= P(V_1 \cap E) \\ &\quad + P(V_2 \cap E) \\ &\quad + P(V_3 \cap E) \\ &= \frac{7}{20} + \frac{3}{20} + \frac{1}{20} \\ &= \frac{11}{20} \end{aligned}$$

Conclusion. L'orange prélevée est classée extra avec la probabilité $\frac{11}{20}$.

3.

L'orange prélevée est classée extra. Quelle est la probabilité qu'elle vienne du verger 1 ? du verger 3 ?

INDICE

On connaît maintenant E et l'on cherche la provenance : la condition est E. Divise la probabilité du chemin par $P(E)$.

CORRIGÉ

On cherche $P_E(V_1)$ et $P_E(V_3)$; ces probabilités ont un sens car $P(E) = \dfrac{11}{20} \neq 0$.

Verger 1.

$$\begin{aligned} P_E(V_1) &= \frac{P(V_1 \cap E)}{P(E)} \\ &= \frac{7}{20} \times \frac{20}{11} \\ &= \frac{7}{11} \end{aligned}$$

Verger 3.

$$\begin{aligned} P_E(V_3) &= \frac{P(V_3 \cap E)}{P(E)} \\ &= \frac{1}{20} \times \frac{20}{11} \\ &= \frac{1}{11} \end{aligned}$$

Attention au sens de la condition. L'énoncé donnait $P_{V_1}(E) = \dfrac{7}{10}$: la probabilité d'être extra **sachant** que l'orange vient du verger 1. On vient de calculer l'inverse, la probabilité de venir du verger 1 **sachant** que l'orange est extra : $\dfrac{7}{11}$, un autre nombre.

Conclusion. Sachant que l'orange est extra, elle vient du verger 1 avec la probabilité $\dfrac{7}{11}$ et du verger 3 avec la probabilité $\dfrac{1}{11}$.

4.

Les événements V_1 et E sont-ils indépendants ?

INDICE

Compare $P(V_1 \cap E)$, lu dans le tableau, au produit $P(V_1) \times P(E)$.

CORRIGÉ

Comparaison.

$$\begin{aligned} P(V_1) \times P(E) &= \frac{1}{2} \times \frac{11}{20} \\ &= \frac{11}{40} \end{aligned}$$

alors que $P(V_1 \cap E) = \frac{7}{20} = \frac{14}{40}$. Les deux nombres diffèrent.

Interprétation. On le voit aussi sur les probabilités conditionnelles : $P_{V_1}(E) = \frac{7}{10}$ n'est pas égal à $P(E) = \frac{11}{20}$. Une orange du verger 1 a plus de chances que la moyenne d'être extra.

Conclusion. Les événements V_1 et E ne sont **pas indépendants**.

Exercice 3

Pair, multiple de 3 : vingt-quatre jetons

Un sac contient 24 jetons numérotés de 1 à 24, indiscernables au toucher. On tire un jeton au hasard. On considère les événements A : « le numéro est pair », B : « le numéro est un multiple de 3 » et C : « le numéro est un multiple de 4 ».

1.

Calcule $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$, puis $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

INDICE

Un numéro à la fois pair et multiple de 3 est un multiple de 6. Pour la réunion, ne compte pas deux fois les numéros communs.

CORRIGÉ

Univers. Le jeton est tiré au hasard parmi des jetons indiscernables : les 24 numéros sont équiprobables et $\mathrm{card}(\Omega) = 24$.

Probabilités de A, B et C.

- A contient 12 numéros : $P(A) = \dfrac{12}{24} = \dfrac{1}{2}$.
- $B = \{3, 6, \ldots, 24\}$ contient 8 numéros : $P(B) = \dfrac{8}{24} = \dfrac{1}{3}$.
- $C = \{4, 8, \ldots, 24\}$ contient 6 numéros : $P(C) = \dfrac{6}{24} = \dfrac{1}{4}$.

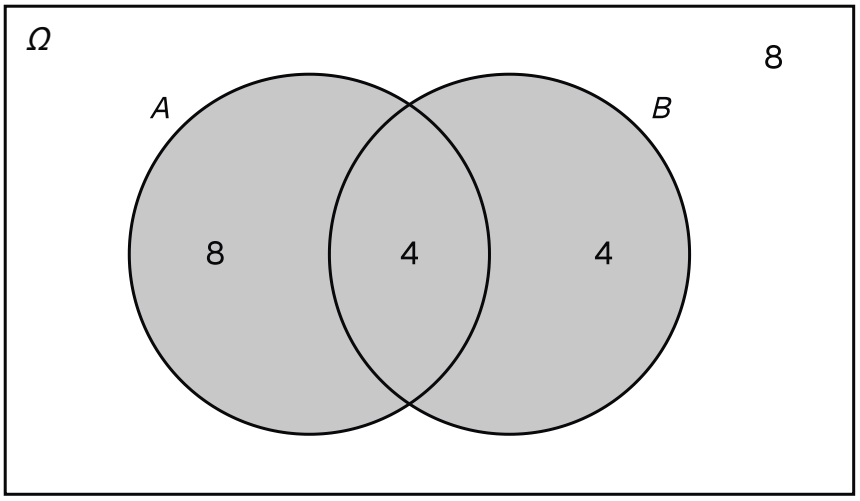
Intersection. $A \cap B$ est l'ensemble des multiples de 6, soit $\{6, 12, 18, 24\}$: $P(A \cap B) = \dfrac{4}{24} = \dfrac{1}{6}$.

Réunion.

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &\quad - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Contrôle par dénombrement. $\mathrm{card}(A \cup B) = 12 + 8 - 4 = 16$ et $\dfrac{16}{24} = \dfrac{2}{3}$.

Conclusion. $P(A) = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = \dfrac{1}{3}$, $P(C) = \dfrac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$ et $P(A \cup B) = \dfrac{2}{3}$.



Effectifs des vingt-quatre numéros selon A (pair) et B (multiple de 3) ; la réunion teintée en compte 16.

2.

Les événements A et B sont-ils indépendants ? Et les événements A et C ?

INDICE

Pour chaque couple, calcule l'intersection, puis compare-la au produit des probabilités. Remarque que tout multiple de 4 est pair.

CORRIGÉ

Événements A et B.

$$\begin{aligned} P(A) \times P(B) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Ce produit est égal à $P(A \cap B)$: A et B sont indépendants.

Événements A et C. Tout multiple de 4 est pair, donc $A \cap C = C$ et $P(A \cap C) = \frac{1}{4}$. Or :

$$\begin{aligned} P(A) \times P(C) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

qui n'est pas égal à $\frac{1}{4}$: A et C ne sont pas indépendants.

Interprétation. $P_A(C) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(A)} = \dfrac{1}{4} \times 2 = \dfrac{1}{2}$, le double de $P(C)$: savoir que le numéro est pair rend un multiple de 4 plus probable.

Conclusion. A et B sont **indépendants** ; A et C **ne sont pas indépendants**.

3.

Vérifie par un dénombrement que $\overline{A}$ et B sont indépendants. On remplace ensuite le sac par un sac de 25 jetons numérotés de 1 à 25 : les événements A et B sont-ils encore indépendants ?

INDICE

Compte les multiples de 3 impairs. Avec 25 jetons, recompte chaque effectif : le numéro 25 n'est ni pair ni multiple de 3.

CORRIGÉ

Avec 24 jetons. $\overline{A} \cap B$ est l'ensemble des multiples de 3 impairs, soit $\{3, 9, 15, 21\}$: $P(\overline{A} \cap B) = \dfrac{4}{24} = \dfrac{1}{6}$. D'autre part :

$$\begin{aligned} P(\overline{A}) \times P(B) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Les deux nombres sont égaux : $\overline{A}$ et B sont indépendants, comme on pouvait l'attendre puisque A et B le sont.

Avec 25 jetons. Le numéro 25 n'est ni pair ni multiple de 3 : les effectifs restent $\text{card}(A) = 12$, $\text{card}(B) = 8$ et $\text{card}(A \cap B) = 4$, mais sur 25 issues équiprobables.

$$\begin{aligned} P(A) \times P(B) &= \frac{12}{25} \times \frac{8}{25} \\ &= \frac{96}{625} \end{aligned}$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{25} = \frac{100}{625}$$

Les deux nombres diffèrent. L'indépendance n'est pas une propriété des mots « pair » et « multiple de 3 » : elle dépend des effectifs, et seul le calcul permet de conclure.

Conclusion. Avec 24 jetons, $\overline{A}$ et B sont indépendants ; avec 25 jetons, A et B **ne sont plus indépendants**.

Exercice 4

Quatre tirages avec remise

Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher : 2 rouges et 3 blanches. On tire une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la **replace** dans l'urne avant le tirage suivant. On réalise ainsi 4 tirages et l'on note X le nombre de boules rouges obtenues.

1.

Combien y a-t-il de résultats possibles, en notant dans l'ordre les quatre boules tirées ? Justifie que les quatre tirages sont des épreuves identiques et indépendantes.

INDICE

Chaque tirage se fait dans la même urne complète. Le résultat d'un tirage modifie-t-il les chances du suivant ?

CORRIGÉ

Nombre de résultats. Chaque tirage choisit une boule parmi 5, et la boule est replacée : un résultat est une 4-liste de boules, avec répétition possible.

$$\mathrm{card}(\Omega) = 5^4 = 625$$

Ces résultats sont équiprobables : les boules sont indiscernables et tirées au hasard.

Épreuves identiques et indépendantes. Comme la boule est replacée, l'urne a la même composition avant chaque tirage. Chaque tirage donne donc une boule rouge avec la probabilité $\dfrac{2}{5}$, quels que soient les résultats précédents.

Conclusion. Il y a 625 résultats possibles, et les 4 tirages sont des épreuves **identiques** et **indépendantes**.

2.

Justifie que X suit une loi binomiale dont tu préciseras les paramètres. Donne la loi de X dans un tableau et vérifie que la somme des probabilités vaut 1.

INDICE

Vérifie les quatre conditions, puis applique $P(X=k)=C_4^k\,p^k(1-p)^{4-k}$ pour k de 0 à 4. Garde le dénominateur 625.

CORRIGÉ

Loi binomiale. On répète 4 fois, de façon identique et indépendante (question 1), une épreuve à deux issues : succès « la boule est rouge », de probabilité $p=\dfrac{2}{5}$, ou échec, de probabilité $\dfrac{3}{5}$. X compte les succès : X suit la **loi binomiale de paramètres** $n=4$ **et** $p=\dfrac{2}{5}$.

Formule. Pour tout $k\in\{0,1,2,3,4\}$:

$$\begin{aligned}P(X=k)&=C_4^k\left(\frac{2}{5}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{4-k}\\&=\frac{C_4^k\times 2^k\times 3^{4-k}}{625}\end{aligned}$$

Par exemple, $P(X=2)=\dfrac{6\times 4\times 9}{625}=\dfrac{216}{625}$.

Loi de X.

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	$\dfrac{81}{625}$	$\dfrac{216}{625}$	$\dfrac{216}{625}$	$\dfrac{96}{625}$	$\dfrac{16}{625}$

Contrôle. $81+216+216+96+16=625$: la somme vaut 1.

Conclusion. X suit la loi binomiale de paramètres 4 et $\dfrac{2}{5}$, dont le tableau ci-dessus donne la loi ; la somme des probabilités vaut 1.

3.

Calcule la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge.

INDICE

« Au moins une rouge » a un contraire très simple à décrire.

CORRIGÉ

Le contraire de « au moins une boule rouge » est « aucune boule rouge », c'est-à-dire $X=0$:

$$\begin{aligned}P(X\geq 1)&=1-P(X=0)\\&=1-\frac{81}{625}\\&=\frac{544}{625}\end{aligned}$$

Conclusion. On obtient au moins une boule rouge avec la probabilité $\dfrac{544}{625}$.

4.

Calcule $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

INDICE

Pour une loi binomiale, $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$. Tu peux contrôler avec le tableau de la question 2.

CORRIGÉ

Formules de la loi binomiale. Avec $n = 4$ et $p = \dfrac{2}{5}$:

$$\begin{aligned} E(X) &= np = 4 \times \frac{2}{5} = \frac{8}{5} \\ V(X) &= np(1-p) \\ &= 4 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{24}{25} \\ \sigma(X) &= \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \end{aligned}$$

Contrôle avec le tableau. D'une part, $E(X) = \dfrac{0 + 216 + 432 + 288 + 64}{625} = \dfrac{1000}{625} = \dfrac{8}{5}$. D'autre part, notons $M = x_1^2 p_1 + \cdots + x_n^2 p_n$:

$$\begin{aligned} M &= \frac{0 + 216 + 864}{625} \\ &\quad + \frac{864 + 256}{625} \\ &= \frac{2200}{625} = \frac{88}{25} \\ V(X) &= M - \big(E(X)\big)^2 \\ &= \frac{88}{25} - \frac{64}{25} = \frac{24}{25} \end{aligned}$$

Conclusion. $E(X) = \dfrac{8}{5}$, $V(X) = \dfrac{24}{25}$ et $\sigma(X) = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.

5.

On tire maintenant 4 boules l'une après l'autre **sans** les replacer. Quelles valeurs le nombre de boules rouges obtenues peut-il prendre ? Suit-il encore la loi de la question 2 ?

INDICE

Il n'y a que 3 boules blanches dans l'urne : combien de boules rouges sortent au minimum ? au maximum ?

CORRIGÉ

Valeurs possibles. Sans remise, on retire 4 des 5 boules : il en reste une seule dans l'urne.

- Si la boule restante est rouge, on a tiré 1 rouge.
- Si la boule restante est blanche, on a tiré 2 rouges.

La boule restante est l'une des 5, au hasard : le nombre de rouges vaut 1 avec la probabilité $\frac{2}{5}$ et 2 avec la probabilité $\frac{3}{5}$.

Comparaison avec la question 2. La loi binomiale de la question 2 donne par exemple $P(X=0)=\frac{81}{625}$, alors que 0 rouge est ici impossible. Sans remise, la composition de l'urne change d'un tirage à l'autre : les épreuves ne sont plus indépendantes.

Conclusion. Le nombre de boules rouges ne prend que les valeurs 1 et 2 ; il ne suit **pas** la loi de la question 2.

Exercice 5

La somme de deux jetons : variance et écart-type

Pour une kermesse, un sac contient 6 jetons indiscernables au toucher : un jeton marqué 10, deux jetons marqués 5 et trois jetons marqués 0. Un joueur prend au hasard deux jetons à la fois ; son score X est la somme des deux nombres inscrits.

1.

Calcule le nombre de tirages possibles et donne les valeurs que peut prendre X.

INDICE

Les jetons sont pris ensemble : l'ordre ne compte pas. Pour les valeurs de X, combine les marques deux à deux.

CORRIGÉ

Nombre de tirages. Un tirage est une partie de 2 jetons parmi 6 :

$$\text{card}(\Omega) = C_6^2 = 15$$

Ces tirages sont équiprobables : les jetons sont indiscernables et pris au hasard.

Valeurs de X. Les sommes possibles sont $0+0=0$, $5+0=5$, $5+5=10$, $10+0=10$ et $10+5=15$.

Conclusion. Il y a 15 tirages possibles, et X prend les valeurs 0, 5, 10 et 15.

2.

Détermine la loi de probabilité de X.

INDICE

La valeur 10 s'obtient de deux façons différentes : compte les deux, puis additionne.

CORRIGÉ

Dénombrement.

- $X = 0$: deux jetons 0, $C_3^2 = 3$ tirages.
- $X = 5$: un jeton 5 et un jeton 0, $2 \times 3 = 6$ tirages.
- $X = 10$: soit le 10 et un 0 ($1 \times 3 = 3$ tirages), soit les deux jetons 5 ($C_2^2 = 1$ tirage), en tout 4 tirages.
- $X = 15$: le 10 et un 5, $1 \times 2 = 2$ tirages.

Loi de X. Les 15 tirages sont équiprobables :

k	0	5	10	15
$P(X = k)$	$\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$	$\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$

Contrôle. $3 + 6 + 4 + 2 = 15$: la somme des probabilités vaut 1.

Conclusion. $P(X = 0) = \frac{1}{5}$, $P(X = 5) = \frac{2}{5}$, $P(X = 10) = \frac{4}{15}$ et $P(X = 15) = \frac{2}{15}$.

3.

Calcule $E(X)$ et interprète ce nombre. Calcule aussi la probabilité que le score soit au moins égal à 10.

INDICE

Utilise le dénominateur commun 15. Pour la seconde probabilité, additionne deux colonnes du tableau.

CORRIGÉ

Espérance. On utilise le dénominateur commun 15 :

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \frac{3}{15} + 5 \times \frac{6}{15} \\ &\quad + 10 \times \frac{4}{15} + 15 \times \frac{2}{15} \\ &= \frac{0 + 30 + 40 + 30}{15} \\ &= \frac{100}{15} = \frac{20}{3} \end{aligned}$$

Interprétation. Sur un grand nombre de parties, le score moyen est proche de $\frac{20}{3}$, environ $6{,}67$ points. Aucune partie ne donne ce score : l'espérance est une moyenne, pas une valeur prise par X.

Score au moins égal à 10. Les événements $(X = 10)$ et $(X = 15)$ sont incompatibles :

$$\begin{aligned} P(X \geq 10) &= \frac{4}{15} + \frac{2}{15} \\ &= \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Conclusion. $E(X) = \frac{20}{3}$, et le score est au moins égal à 10 avec la probabilité $\frac{2}{5}$.

4.

Calcule la variance $V(X)$ de deux façons, puis l'écart-type $\sigma(X)$.

INDICE

Première façon : la moyenne des carrés des écarts à $E(X)$. Seconde façon : $x_1^2 p_1 + \cdots + x_n^2 p_n - \big(E(X)\big)^2$. Les deux résultats doivent coïncider.

CORRIGÉ

Par la définition. Les écarts à $E(X) = \dfrac{20}{3}$ valent $-\dfrac{20}{3}$, $-\dfrac{5}{3}$, $\dfrac{10}{3}$ et $\dfrac{25}{3}$; leurs carrés valent $\dfrac{400}{9}$, $\dfrac{25}{9}$, $\dfrac{100}{9}$ et $\dfrac{625}{9}$. On les pondère par $\dfrac{3}{15}$, $\dfrac{6}{15}$, $\dfrac{4}{15}$ et $\dfrac{2}{15}$, sur le dénominateur $9 \times 15 = 135$:

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{3 \times 400 + 6 \times 25}{135} \\ &\quad + \frac{4 \times 100 + 2 \times 625}{135} \\ &= \frac{1350 + 1650}{135} \\ &= \frac{3000}{135} = \frac{200}{9} \end{aligned}$$

Par la formule de calcul pratique. Notons $M = x_1^2 p_1 + \cdots + x_n^2 p_n$:

$$\begin{aligned} M &= \frac{0 \times 3 + 25 \times 6}{15} \\ &\quad + \frac{100 \times 4 + 225 \times 2}{15} \\ &= \frac{1000}{15} = \frac{200}{3} \end{aligned}$$

Avec $\big(E(X)\big)^2 = \dfrac{400}{9}$:

$$\begin{aligned} V(X) &= M - \big(E(X)\big)^2 \\ &= \frac{200}{3} - \frac{400}{9} \\ &= \frac{600 - 400}{9} = \frac{200}{9} \end{aligned}$$

Les deux méthodes donnent le même résultat.

Écart-type.

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{200}{9}} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$$

soit environ $4{,}71$ points : les scores s'écartent nettement de leur moyenne.

Conclusion. $V(X) = \dfrac{200}{9}$ et $\sigma(X) = \dfrac{10\sqrt{2}}{3}$.