BURHAN

Calcul des probabilités : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/calcul-des-probabilites/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul des probabilités	Application	7

Exercice 1

Menus, podiums et grilles de QCM

Les cinq questions sont indépendantes. Pour chacune, réponds par un nombre entier et nomme le modèle de dénombrement utilisé.

1.

Le restaurant d'un internat propose chaque midi 3 entrées, 4 plats et 2 desserts. Un menu se compose d'une entrée, d'un plat et d'un dessert. Combien de menus différents peut-on composer ?

INDICE

Un menu se construit en trois choix successifs. Le nombre de possibilités d'un choix dépend-il des choix déjà faits ?

CORRIGÉ

Modèle. On fait trois choix successifs : une entrée, un plat, un dessert. Le nombre de possibilités de chaque choix ne dépend pas des deux autres : c'est le **principe multiplicatif**.

$$3 \times 4 \times 2 = 24$$

Conclusion. On peut composer 24 menus différents.

2.

Huit coureurs disputent une course, sans ex æquo possible. Les trois premiers reçoivent une médaille d'or, une d'argent et une de bronze. Combien de podiums différents sont possibles ?

INDICE

Demande-toi si échanger deux médaillés donne le même podium, et si un même coureur peut recevoir deux médailles.

CORRIGÉ

Modèle. Un podium est une liste **ordonnée** de 3 coureurs **distincts** : l'or n'est pas l'argent, et personne ne monte deux fois. L'ordre compte, sans répétition : c'est un arrangement de 3 éléments parmi 8.

$$A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

Conclusion. Il y a 336 podiums différents possibles.

3.

Après l'arrivée, un journaliste tire au sort trois des huit coureurs pour une interview collective, sans tenir compte de leur classement. Combien de groupes d'interviewés sont possibles ?

INDICE

Le groupe formé de Karim, Sara et Yassine est-il différent du groupe formé de Sara, Yassine et Karim ?

CORRIGÉ

Modèle. Cette fois, le groupe $\{a, b, c\}$ est le même que le groupe $\{b, a, c\}$: l'ordre ne compte pas, et il n'y a pas de répétition. C'est une **combinaison** de 3 éléments parmi 8.

$$\begin{aligned} C_8^3 &= \frac{A_8^3}{3!} \\ &= \frac{336}{6} = 56 \end{aligned}$$

Chaque groupe correspond à $3! = 6$ podiums de la question 2 : c'est pourquoi on divise par 6.

Conclusion. Il y a 56 groupes d'interviewés possibles.

4.

Un QCM comporte 4 questions ; chacune propose 3 réponses, et l'on coche exactement une réponse par question. Combien de grilles de réponses différentes existe-t-il ?

INDICE

Pour chaque question, combien de choix as-tu ? La même réponse peut-elle être cochée à deux questions différentes ?

CORRIGÉ

Modèle. Une grille est la liste **ordonnée** des réponses (question 1, question 2, question 3, question 4), et une même réponse peut revenir d'une question à l'autre : l'ordre compte, **avec répétition**. C'est une 4-liste d'un ensemble à 3 éléments (arrangement avec répétition).

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$$

Conclusion. Il existe 81 grilles de réponses différentes.

5.

Pour la photo de fin de course, les cinq premiers arrivés s'alignent côte à côte. De combien de façons peuvent-ils se placer ?

INDICE

Tu ranges tous les éléments d'un ensemble dans un ordre : c'est un cas particulier d'arrangement.

CORRIGÉ

Modèle. On range les 5 coureurs, tous, dans un ordre : c'est une **permutation** de 5 éléments.

$$\begin{aligned} 5! &= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 120 \end{aligned}$$

Conclusion. Les cinq premiers arrivés peuvent se placer de 120 façons.

Exercice 2

Deux boules d'un sac jaune et bleu

Un sac opaque contient 10 boules indiscernables au toucher : 6 jaunes et 4 bleues. Sans regarder, on en extrait 2 d'un seul geste.

1.

Décris une issue de cette expérience et calcule $\mathrm{card}(\Omega)$. Explique pourquoi les issues sont équiprobables.

INDICE

Les boules sortent ensemble : une issue est un ensemble de boules, pas une liste. Cherche dans l'énoncé les mots qui garantissent qu'aucune boule n'est favorisée.

CORRIGÉ

Issue. Une issue est une partie de 2 boules parmi les 10 : l'ordre ne compte pas (les boules sortent ensemble) et il n'y a pas de répétition.

Cardinal de l'univers. Le modèle est celui des combinaisons :

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(\Omega) &= C_{10}^{2} \\ &= \frac{10 \times 9}{2} \\ &= 45\end{aligned}$$

Équiprobabilité. Les boules sont indiscernables au toucher et extraites sans regarder : aucune paire n'a plus de chances qu'une autre.

Conclusion. Une issue est une paire de boules, $\mathrm{card}(\Omega) = 45$, et les 45 issues sont équiprobables, chacune de probabilité $\frac{1}{45}$.

2.

Calcule la probabilité de chacun des événements J : « les deux boules sont jaunes », D : « les deux boules n'ont pas la même couleur » et B : « les deux boules sont bleues ».

INDICE

Pour D, il faut une boule de chaque couleur : choisis la jaune, puis la bleue, et multiplie les nombres de choix.

CORRIGÉ

Les issues étant équiprobables, la probabilité d'un événement est le quotient de son cardinal par $\text{card}(\Omega) = 45$.

Événement J. On choisit 2 boules parmi les 6 jaunes : $\text{card}(J) = C_6^2 = 15$.

$$P(J) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

Événement D. On choisit une jaune **et** une bleue :

$$\begin{aligned} \text{card}(D) &= C_6^1 \times C_4^1 \\ &= 6 \times 4 = 24 \end{aligned}$$

$$P(D) = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$$

Événement B. On choisit 2 boules parmi les 4 bleues : $\text{card}(B) = C_4^2 = 6$.

$$P(B) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

Contrôle. À chaque tirage, exactement un des trois événements se réalise : $15 + 24 + 6 = 45$, et $\frac{1}{3} + \frac{8}{15} + \frac{2}{15} = 1$.

Conclusion. $P(J) = \frac{1}{3}$, $P(D) = \frac{8}{15}$ et $P(B) = \frac{2}{15}$.

Exercice 3

Une roue de loterie aux secteurs inégaux

Une roue de loterie est partagée en 5 secteurs numérotés de 1 à 5, de tailles différentes. Quand on la fait tourner, l'aiguille s'arrête sur le secteur k avec la probabilité p_k donnée par le tableau.

Secteur k	1	2	3	4	5
p_k	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{4}$	p_5

1.

Quel est l'univers Ω ? Les issues sont-elles équiprobables ? Calcule p_5.

INDICE

Que vaut la somme des probabilités de toutes les issues d'un univers fini ?

CORRIGÉ

Univers. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Équiprobabilité. Les secteurs n'ont pas la même taille et les p_k ne sont pas tous égaux : les issues **ne sont pas** équiprobables. On ne calculera donc pas en comptant des issues.

Calcul de p_5. La somme des probabilités des cinq issues vaut 1. Notons S la somme des quatre probabilités connues :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{2 + 4 + 6 + 5}{20} \\ &= \frac{17}{20} \end{aligned}$$

$$p_5 = 1 - \frac{17}{20} = \frac{3}{20}$$

Conclusion. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, les issues ne sont pas équiprobables et $p_5 = \dfrac{3}{20}$.

2.

On note A l'événement « le numéro obtenu est pair » et B l'événement « le numéro obtenu est au moins égal à 4 ». Écris A, B et $\overline{A}$ comme des parties de Ω, puis calcule $P(A)$, $P(B)$ et $P(\overline{A})$.

INDICE

Liste les numéros qui réalisent chaque événement, puis additionne leurs probabilités. Pour $\overline{A}$, deux chemins sont possibles : utilise l'un et contrôle avec l'autre.

CORRIGÉ

Événements comme parties de Ω. $A = \{2, 4\}$, $B = \{4, 5\}$ et $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$.

Probabilités de A et de B. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le composent :

$$\begin{aligned} P(A) &= p_2 + p_4 \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20} \\ P(B) &= p_4 + p_5 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{20} \\ &= \frac{8}{20} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Probabilité de $\overline{A}$. Par l'événement contraire :

$$P(\overline{A}) = 1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$$

Vérification directe. $p_1 + p_3 + p_5 = \dfrac{2 + 6 + 3}{20} = \dfrac{11}{20}$.

Conclusion. $P(A) = \dfrac{9}{20}$, $P(B) = \dfrac{2}{5}$ et $P(\overline{A}) = \dfrac{11}{20}$.

3.

Traduis $A \cap B$ par une phrase. Calcule ensuite $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

INDICE

A et B ont une issue en commun : dans la somme $P(A) + P(B)$, elle est comptée deux fois.

CORRIGÉ

Traduction. $A \cap B$ est l'événement « le numéro est pair **et** au moins égal à 4 ». Donc $A \cap B = \{4\}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{20}$.

Probabilité de la réunion. L'issue 4 appartient à A et à B : on la retranche pour ne pas la compter deux fois.

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &\quad - P(A \cap B) \\ &= \frac{9}{20} + \frac{8}{20} - \frac{5}{20} \\ &= \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Contrôle. $A \cup B = \{2, 4, 5\}$ et $\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{20} = \dfrac{4 + 5 + 3}{20} = \dfrac{3}{5}$.

Conclusion. $A \cap B$: « le numéro est pair et au moins égal à 4 » ; $P(A \cap B) = \dfrac{1}{4}$ et $P(A \cup B) = \dfrac{3}{5}$.

Exercice 4

Romans et bandes dessinées

Le fonds d'une petite médiathèque compte 120 ouvrages : 70 romans et 50 bandes dessinées. Parmi les romans, 28 sont écrits en arabe ; parmi les bandes dessinées, 15 le sont. Un lecteur emprunte un ouvrage choisi au hasard dans tout le fonds. On note R l'événement « l'ouvrage est un roman » et L l'événement « l'ouvrage est écrit en arabe ».

1.

Calcule $P(R)$, $P(L)$ et $P(R \cap L)$.

INDICE

« Au hasard » : chaque probabilité est un quotient d'effectifs par 120. L'événement $R \cap L$ désigne les romans écrits en arabe.

CORRIGÉ

L'ouvrage est choisi au hasard : les 120 ouvrages ont la même probabilité d'être empruntés. Chaque probabilité est donc un quotient d'effectifs par 120.

$$P(R) = \frac{70}{120} = \frac{7}{12}$$

$$P(L) = \frac{28 + 15}{120} = \frac{43}{120}$$

$$P(R \cap L) = \frac{28}{120} = \frac{7}{30}$$

Conclusion. $P(R) = \dfrac{7}{12}$, $P(L) = \dfrac{43}{120}$ et $P(R \cap L) = \dfrac{7}{30}$.

2.

L'ouvrage emprunté est un roman. Quelle est alors la probabilité qu'il soit écrit en arabe ? Calcule-la de deux façons.

INDICE

La condition est R. Vérifie que $P(R) \neq 0$, puis divise $P(R \cap L)$ par $P(R)$. Autre voie : ne garde que les romans.

CORRIGÉ

On cherche $P_R(L)$, qui a un sens car $P(R) = \dfrac{7}{12} \neq 0$.

Par la définition.

$$\begin{aligned} P_R(L) &= \frac{P(R \cap L)}{P(R)} \\ &= \frac{7}{30} \times \frac{12}{7} \\ &= \frac{12}{30} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

En restreignant l'univers aux romans. Sachant R, l'ouvrage est l'un des 70 romans, dont 28 sont en arabe :

$$\frac{28}{70} = \frac{2}{5}$$

Probabilités composées. $P(R) \times P_R(L) = \dfrac{7}{12} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{14}{60} = \dfrac{7}{30}$: on retrouve bien $P(R \cap L)$.

Conclusion. Sachant que l'ouvrage est un roman, la probabilité qu'il soit écrit en arabe est $P_R(L) = \dfrac{2}{5}$.

3.

L'ouvrage emprunté est écrit en arabe. Quelle est alors la probabilité que ce soit un roman ? Compare avec le résultat de la question 2.

INDICE

La condition est maintenant L : c'est par $P(L)$ que tu divises.

CORRIGÉ

On cherche $P_L(R)$, qui existe car $P(L) = \dfrac{43}{120} \neq 0$.

$$\begin{aligned} P_L(R) &= \frac{P(R \cap L)}{P(L)} \\ &= \frac{28}{120} \times \frac{120}{43} \\ &= \frac{28}{43} \end{aligned}$$

Comparaison. $P_L(R) = \dfrac{28}{43}$ et $P_R(L) = \dfrac{2}{5}$ sont **deux nombres différents**. Le numérateur $P(R \cap L)$ est le même, mais on ne divise pas par la même probabilité : échanger la condition et l'événement, c'est poser une autre question.

Conclusion. Sachant que l'ouvrage est écrit en arabe, la probabilité que ce soit un roman est $\dfrac{28}{43}$, différente de la probabilité $\dfrac{2}{5}$ de la question 2.

Exercice 5

Ateliers du lycée : indépendants ou incompatibles ?

Les 80 élèves inscrits aux ateliers d'un lycée suivent chacun **un seul** atelier : théâtre ou musique. Le tableau donne leur répartition selon leur régime.

	Internes	Externes	Total
Théâtre	12	20	32
Musique	18	30	48
Total	30	50	80

On interroge un élève choisi au hasard parmi ces 80. On note T : « l'élève suit l'atelier théâtre », M : « l'élève suit l'atelier musique » et I : « l'élève est interne ».

1.

Calcule $P(T)$, $P(I)$ et $P(T \cap I)$. Les événements T et I sont-ils indépendants ?

INDICE

L'indépendance se démontre par un calcul : compare $P(T \cap I)$ au produit $P(T) \times P(I)$.

CORRIGÉ

Probabilités. L'élève est choisi au hasard : les 80 élèves sont équiprobables.

$$P(T) = \frac{32}{80} = \frac{2}{5}$$
$$P(I) = \frac{30}{80} = \frac{3}{8}$$
$$P(T \cap I) = \frac{12}{80} = \frac{3}{20}$$

Comparaison.

$$\begin{aligned} P(T) \times P(I) &= \frac{2}{5} \times \frac{3}{8} \\ &= \frac{6}{40} = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

Ce produit est égal à $P(T \cap I)$.

Interprétation. $P_I(T) = \dfrac{12}{30} = \dfrac{2}{5} = P(T)$: savoir que l'élève est interne ne change pas la probabilité qu'il fasse du théâtre.

Conclusion. $P(T) = \dfrac{2}{5}$, $P(I) = \dfrac{3}{8}$, $P(T \cap I) = \dfrac{3}{20}$, et les événements T et I sont **indépendants**.

2.

Les événements T et M sont-ils incompatibles ? Sont-ils indépendants ?

INDICE

Incompatibles : ils ne peuvent pas se produire en même temps. Indépendants : une égalité entre probabilités. Teste les deux définitions l'une après l'autre.

CORRIGÉ

Incompatibilité. Chaque élève suit un seul atelier : $T \cap M = \varnothing$. Les événements T et M sont **incompatibles**, et $P(T \cap M) = 0$.

Indépendance. On a $P(M) = \dfrac{48}{80} = \dfrac{3}{5}$, donc :

$$\begin{aligned} P(T) \times P(M) &= \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{6}{25} \end{aligned}$$

Ce produit n'est pas nul, alors que $P(T \cap M) = 0$: l'égalité $P(T \cap M) = P(T) \times P(M)$ est fausse.

Interprétation. Savoir que l'élève fait de la musique rend même le théâtre impossible. Quand deux événements de probabilités non nulles s'excluent, leur intersection a une probabilité nulle alors que le produit ne l'est pas : ils sont toujours dépendants.

Conclusion. T et M sont incompatibles, et ils ne sont **pas indépendants**.

Exercice 6

Le plus grand de deux numéros

Une boîte contient 5 cartons numérotés de 1 à 5, de même format et indiscernables au toucher. On en prend 2 au hasard, simultanément, et l'on note X le plus grand des deux numéros obtenus.

1.

Combien y a-t-il de tirages possibles ? Quelles valeurs la variable aléatoire X peut-elle prendre ?

INDICE

Le plus petit maximum possible s'obtient avec les deux plus petits numéros ; le plus grand, dès que le carton 5 est tiré.

CORRIGÉ

Nombre de tirages. Un tirage est une partie de 2 cartons parmi 5 :

$$\mathrm{card}(\Omega) = C_5^2 = 10$$

Ces 10 tirages sont équiprobables : les cartons sont indiscernables et pris au hasard.

Valeurs de X. Les deux cartons sont distincts, donc le plus grand numéro vaut au moins 2 ; il vaut au plus 5. La valeur 1 est impossible.

Conclusion. Il y a 10 tirages possibles, et X prend les valeurs 2, 3, 4 et 5.

2.

Détermine la loi de probabilité de X et présente-la dans un tableau.

INDICE

Pour que $X = k$, le carton k doit être tiré. Combien de choix reste-t-il alors pour l'autre carton ?

CORRIGÉ

Cas général. Soit $k \in \{2, 3, 4, 5\}$. L'événement $(X = k)$ signifie : l'un des cartons porte k et l'autre un numéro **strictement plus petit**, choisi parmi les $k - 1$ numéros de 1 à $k - 1$. Il est donc réalisé par $k - 1$ tirages :

$$P(X = k) = \frac{k - 1}{10}$$

Vérification sur les premières valeurs.

- $X = 2$: seulement $\{1, 2\}$, soit 1 tirage.
- $X = 3$: $\{1, 3\}$ et $\{2, 3\}$, soit 2 tirages.
- $X = 4$: 3 tirages ; $X = 5$: 4 tirages.

Loi de X.

k	2	3	4	5
$P(X = k)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$

Contrôle. $1 + 2 + 3 + 4 = 10$: la somme des probabilités vaut $\frac{10}{10} = 1$.

Conclusion. Pour $k \in \{2, 3, 4, 5\}$, $P(X = k) = \frac{k - 1}{10}$; le tableau ci-dessus donne la loi de X.

3.

Calcule $P(X \geq 4)$.

INDICE

Additionne les probabilités des valeurs concernées, lues dans le tableau.

CORRIGÉ

Les événements $(X = 4)$ et $(X = 5)$ sont incompatibles :

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= P(X = 4) \\ &\quad + P(X = 5) \\ &= \frac{3}{10} + \frac{4}{10} \\ &= \frac{7}{10} \end{aligned}$$

Contrôle par le contraire. $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \frac{1 + 2}{10} = \frac{7}{10}$.

Conclusion. $P(X \geq 4) = \frac{7}{10}$.

Exercice 7

Cinq graines semées

Un sachet de graines de tomate indique que chaque graine germe avec la probabilité $\frac{4}{5}$. On sème 5 graines du sachet, et l'on admet que la germination de l'une n'a aucune influence sur celle des autres. On note X le nombre de graines qui germent.

1.

Justifie que X suit une loi binomiale et donne ses paramètres.

INDICE

Retrouve dans l'énoncé chacune des quatre conditions : épreuves identiques, indépendantes, à deux issues, et X compte les succès.

CORRIGÉ

On vérifie les quatre conditions d'un schéma de Bernoulli.

- On répète 5 fois la **même** épreuve : semer une graine du sachet.
- Chaque épreuve a **deux issues** : succès « la graine germe », de probabilité $p = \frac{4}{5}$, ou échec.
- Les épreuves sont **indépendantes** : l'énoncé l'admet.
- X **compte les succès**.

Conclusion. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{4}{5}$.

2.

Calcule la probabilité que les cinq graines germent, puis celle qu'exactement quatre graines germent.

INDICE

Applique la formule de la loi binomiale avec $k = 5$, puis avec $k = 4$, sans oublier le coefficient C_5^k.

CORRIGÉ

Formule. Pour tout entier k de 0 à 5 :

$$\begin{aligned} &P(X = k) \\ &= C_5^k \left(\frac{4}{5}\right)^k \left(\frac{1}{5}\right)^{5-k} \end{aligned}$$

Cinq graines germent. Avec $k = 5$, on a $C_5^5 = 1$:

$$P(X = 5) = \left(\frac{4}{5}\right)^5 = \frac{1024}{3125}$$

Exactement quatre graines germent. Avec $k = 4$:

$$\begin{aligned} &P(X = 4) \\ &= C_5^4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^4 \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{5 \times 256}{3125} \\ &= \frac{1280}{3125} = \frac{256}{625} \end{aligned}$$

Le coefficient $C_5^4 = 5$ compte les places possibles de la seule graine qui ne germe pas.

Conclusion. Les cinq graines germent avec la probabilité $\frac{1024}{3125}$, et exactement quatre germent avec la probabilité $\frac{256}{625}$.

3.

Calcule la probabilité qu'au plus trois graines germent. Calcule ensuite $E(X)$ et interprète ce nombre.

INDICE

« Au plus 3 » est le contraire de « 4 ou 5 ». Pour l'espérance d'une loi binomiale, une formule directe existe.

CORRIGÉ

Au plus trois graines. L'événement $(X \leq 3)$ est le contraire de « $X = 4$ ou $X = 5$ », deux événements incompatibles :

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= 1 - P(X = 4) \\ &\quad - P(X = 5) \\ &= 1 - \frac{1280}{3125} \\ &\quad - \frac{1024}{3125} \\ &= \frac{821}{3125} \end{aligned}$$

Espérance. Pour une loi binomiale de paramètres n et p, $E(X) = np$:

$$E(X) = 5 \times \frac{4}{5} = 4$$

Interprétation. Si l'on sème de nombreuses séries de cinq graines, il en germe en moyenne 4 par série.

Conclusion. Au plus trois graines germent avec la probabilité $\frac{821}{3125}$, et $E(X) = 4$.