BURHAN

Calcul des probabilités

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/calcul-des-probabilites/cours

Chapitre	Semestre
Calcul des probabilités	Semestre 2

Le stand de la kermesse

Une urne à la kermesse

À la kermesse du lycée, un stand propose un jeu. Une urne contient 4 boules rouges et 3 boules vertes, **indiscernables au toucher**. Tu plonges la main et tu tires **trois boules d'un coup**.

Avant de payer ton ticket, une question te travaille : combien de boules rouges vas-tu sortir, le plus souvent ?

Devine : Le nombre de rouges le plus probable

Tu tires trois boules d'un coup. Quel nombre de boules rouges a le plus de chances de sortir ?

A. 0 rouge

Faux.
Pour n'avoir aucune rouge, il faut tirer les trois vertes : un seul groupe de trois boules le permet. C'est le cas le plus rare.

B. 3 rouges, car il y a plus de rouges que de vertes

Faux.
Les rouges sont majoritaires, mais il faut que les trois boules tirées soient rouges. Peu de groupes de trois boules le permettent.

C. 2 rouges

Juste.
C'est bien le cas le plus probable. Tu le démontreras en comptant les groupes de trois boules.

D. Tous les nombres de rouges ont la même chance.

Faux.
Les résultats 0, 1, 2 et 3 ne regroupent pas le même nombre de tirages : rien ne les rend équiprobables.

Correction
Le plus probable est d'obtenir 2 rouges. Pour le **démontrer**, il faut compter les groupes de trois boules qui contiennent 0, 1, 2 ou 3 rouges. Compter sans tout écrire : c'est le premier outil de ce chapitre.

Pour répondre sans deviner, il te faut trois outils :

1. **compter** les tirages possibles sans les écrire un par un ;
2. **mesurer** une chance par un nombre entre 0 et 1 : une probabilité ;
3. **résumer** un jeu par une loi et une moyenne.

Un exercice de probabilités figure dans 13 des 15 sujets de bac consultés par BURHAN. Dans ces 13 sujets, l'expérience est une urne. Ce chapitre te prépare à cet exercice.

Dénombrement : principe multiplicatif, listes et arrangements

Le principe multiplicatif

Le digicode de ton immeuble est formé d'une lettre parmi A, B et C, suivie d'un chiffre de 0 à 9. Par exemple : B7.

On peut le dessiner comme un **arbre de choix** : trois branches pour la lettre, puis dix branches au bout de chacune.

À toi : Combien de codes ?

Combien de codes différents de la forme « une lettre parmi A, B, C, puis un chiffre » existe-t-il ?

A. 13

Faux.
$3 + 10$ compte les lettres et les chiffres séparément. Or chaque code associe une lettre **et** un chiffre.

B. 3^{10}

Faux.
Ce nombre compterait des listes de dix symboles. Ici, le code n'a que deux symboles.

C. 10

Faux.
Ce sont les codes qui commencent par une même lettre. Il y a trois lettres possibles.

D. 30

Juste.
10 codes commencent par A, 10 par B et 10 par C : $3 \times 10 = 30$.

Correction
On choisit d'abord la lettre, de 3 façons, puis le chiffre, de 10 façons, quelle que soit la lettre. Il y a donc $3 \times 10 = 30$ codes, de A0 à C9.

Propriété : Principe multiplicatif

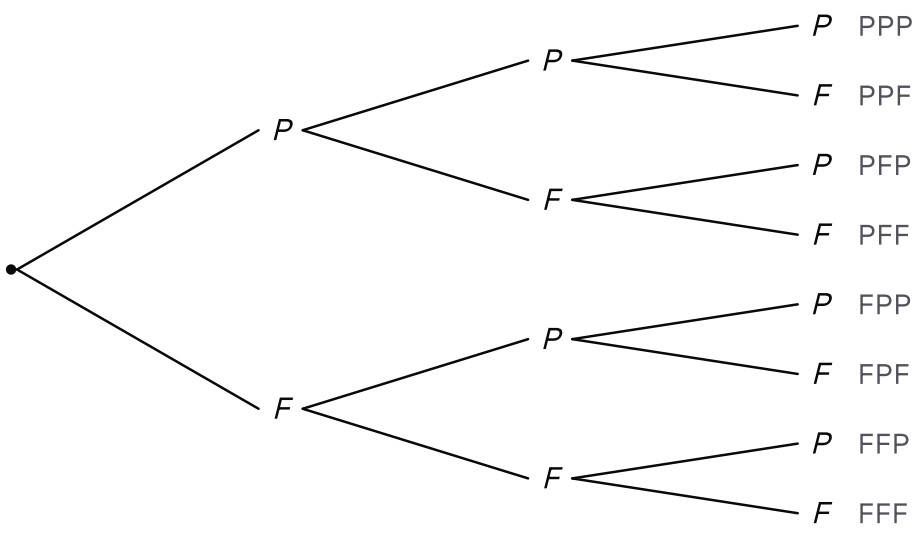
Si une situation se décompose en k choix successifs, le premier pouvant se faire de n_1 façons, puis, quel que soit ce premier choix, le deuxième de n_2 façons, et ainsi de suite jusqu'au k-ième, qui peut se faire de n_k façons, alors le nombre total de résultats possibles est

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k.$$

Des listes avec répétition

Tu lances une pièce trois fois de suite et tu notes chaque face : Pile (P) ou Face (F). Un résultat est une **liste ordonnée** de trois lettres, et une lettre peut revenir.

Chaque lancer offre 2 possibilités. Il y a donc $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ résultats.



Arbre de choix des trois lancers : deux branches à chaque lancer, et une liste de trois lettres au bout de chaque chemin.

Propriété : Arrangements avec répétition

Soit E un ensemble fini à n éléments ($n \geq 1$) et p un entier naturel non nul. Une **p-liste** d'éléments de E, ou **arrangement avec répétition**, est une suite ordonnée $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ d'éléments de E, distincts ou non. Le nombre de p-listes d'éléments de E est n^p.

Exemple : Les huit listes

Voici les 8 listes, rangées selon le premier lancer :

Premier lancer	Les quatre listes
P	$\mathrm{PPP}, \mathrm{PPF}, \mathrm{PFP}, \mathrm{PFF}$

Premier lancer	Les quatre listes
F	FPP, FPF, FFP, FFF

De même, un digicode de 4 chiffres, répétitions permises, est une 4-liste de l'ensemble des 10 chiffres. Il y en a $10^4 = 10\,000$.

Ranger dans un ordre

Ta classe a élu un comité de trois élèves : Amine, Salma et Yassir. Ils posent pour une photo, côte à côte.

À gauche, 3 élèves possibles ; au milieu, plus que 2 ; à droite, le dernier. Il y a donc $3 \times 2 \times 1 = 6$ photos différentes.

Définition : Factorielle

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, la **factorielle** de n est l'entier $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. Par convention, $0! = 1$.

Propriété : Permutations

Soit E un ensemble fini à n éléments ($n \geq 1$). Une **permutation** de E est un arrangement de ses n éléments, c'est-à-dire une façon de les ranger dans un ordre. Le nombre de permutations de E est $A_n^n = n!$.

Vérifie : Passage à l'oral

Avant l'élection, les 5 candidats au comité présentent leur programme, l'un après l'autre. Combien d'ordres de passage sont possibles ?

A. $5 \times 5 = 25$

Faux.
Un candidat ne passe pas deux fois : après le premier, il n'en reste que 4.

B. $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$

Faux.
Les choix se suivent : on **multiplie** leurs nombres, on ne les additionne pas.

C. $5! = 120$

Juste.
Un ordre de passage est une permutation des 5 candidats : $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

D. 5

Faux.
5 est le nombre de candidats qui peuvent passer en premier, pas le nombre d'ordres complets.

Correction
Un ordre de passage range les 5 candidats : c'est une permutation. Il y en a $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Choisir avec des rôles

Ta classe compte 30 élèves. On y élit un président, puis un secrétaire, puis un trésorier. Un même élève ne tient pas deux rôles.

Il y a 30 choix pour le président, puis 29 pour le secrétaire, puis 28 pour le trésorier. Le nombre de bureaux possibles est donc

$$30 \times 29 \times 28 = 24\,360.$$

Définition : Arrangements sans répétition

Soit E un ensemble fini à n éléments et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. Un **arrangement** de p éléments de E est une p-liste d'éléments de E **deux à deux distincts**. Le nombre de ces arrangements est

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Exemple : Un digicode sans chiffre répété (guidé)

Un code de 4 chiffres **tous différents** est une liste ordonnée de 4 chiffres distincts, pris parmi 10.

1. **Modèle** : l'ordre compte, aucune répétition : c'est un arrangement.
2. **Calcul** : $A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$.
3. **Contrôle** : $\dfrac{10!}{6!} = \dfrac{3\,628\,800}{720} = 5040$.

Choisir sans ordre

Cette fois, la classe de 30 élèves élit un comité de 3 membres, **sans rôles**. « Amine président, Salma secrétaire, Yassir trésorier » et « Salma présidente, Yassir secrétaire, Amine trésorier » donnent le même comité.

Chaque comité correspond à $3! = 6$ bureaux. Il y a donc $\dfrac{24\,360}{6} = 4060$ comités.

Définition : Combinaisons

Soit E un ensemble fini à n éléments et p un entier tel que $0 \leq p \leq n$. Une **combinaison** de p éléments de E est une partie de E qui contient exactement p éléments. Le nombre de ces combinaisons est

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

Pour $1 \leq p \leq n$, on a aussi $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$.

À toi : Deux délégués

La même classe de 30 élèves choisit 2 délégués, sans rôles. Combien de choix sont possibles ?

Indice 1
L'ordre ne compte pas, et un élève n'est pas choisi deux fois : quel modèle ?

Indice 2
C'est une combinaison de 2 élèves parmi 30 : utilise $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$.

Indice 3
Divise, puis simplifie.

Réponse
Un choix de délégués est une partie à 2 éléments de la classe de 30 élèves. Le nombre de choix est donc

$$\begin{aligned} C_{30}^2 &= \frac{A_{30}^2}{2!} \\ &= \frac{30 \times 29}{2} = 435. \end{aligned}$$

Quatre propriétés utiles

Propriété : Propriétés des nombres C_n^p

Pour tous entiers n et p tels que $0 \leq p \leq n$:

- $C_n^0 = C_n^n = 1$;
- $C_n^{n-p} = C_n^p$;
- si $n \geq 1$: $C_n^1 = n$;
- si $p \geq 1$: $C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$.

Exemple : Les propriétés en action

- **Symétrie** : choisir les 28 élèves qui ne sont **pas** délégués revient à choisir les 2 délégués. Donc $C_{30}^{28} = C_{30}^2 = 435$.

- **Cas extrêmes** : $C_7^0 = C_7^7 = 1$ et $C_7^1 = 7$.
- **Somme** : $C_6^2 + C_6^3 = 15 + 20 = 35 = C_7^3$.

Choisir le bon modèle

Méthode : Ordre ? Répétition ?

Pour tirer p objets parmi n, réponds à deux questions avant tout calcul.

Comment tire-t-on ?	L'ordre compte ?	Un objet peut revenir ?	On compte avec
l'un après l'autre, en remettant	oui	oui	n^p
l'un après l'autre, sans remettre	oui	non	A_n^p
tous d'un coup	non	non	C_n^p

Une fois le modèle choisi, garde-le jusqu'au bout, pour l'univers comme pour l'événement.

Vérifie : Quel modèle pour l'urne ?

L'urne de la kermesse contient 7 boules. On tire 3 boules **l'une après l'autre, sans remise**, en notant l'ordre. Combien de résultats sont possibles ?

A. $C_7^3 = 35$

Faux.
C_7^3 compte des tirages **d'un coup**, sans ordre. Ici, l'ordre des boules est noté.

B. $A_7^3 = 210$

Juste.
L'ordre est noté et aucune boule ne revient : c'est un arrangement, $7 \times 6 \times 5 = 210$.

C. $7^3 = 343$

Faux.
7^3 suppose qu'une boule peut ressortir : ce serait un tirage **avec** remise.

D. $7! = 5040$

Faux.
$7!$ range les 7 boules ; on n'en tire que 3.

Correction
L'ordre est noté et aucune boule ne revient : les résultats sont des listes ordonnées de 3 boules distinctes. Leur nombre est

$$A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210.$$

> Avec remise, on aurait $7^3 = 343$ résultats ; d'un coup, $C_7^3 = 35$.

Événements et probabilité

Une fréquence qui se stabilise

> **Devine : Six mille lancers**
>
> Tu lances 6000 fois un dé cubique équilibré. Combien de « 6 » obtiens-tu ?
>
> **A.** Environ 1000, sans pouvoir dire le nombre exact.
> **Juste.**
> Chaque face a la même chance : à la longue, environ un lancer sur six donne « 6 ».
>
> **B.** Exactement 1000.
> **Faux.**
> Le hasard ne se programme pas : tu peux obtenir 987 ou 1021. Exactement 1000 est possible, mais pas garanti.
>
> **C.** On ne peut rien dire : c'est le hasard.
> **Faux.**
> Sur un lancer, on ne peut rien prévoir. Sur des milliers de lancers, la fréquence du « 6 » devient au contraire très régulière.
>
> **D.** Environ 3000 : soit on a « 6 », soit on ne l'a pas.
> **Faux.**
> « 6 » et « pas 6 » ne sont pas équiprobables : « pas 6 » regroupe cinq faces.
>
> **Correction**
> On obtient **environ** 1000 fois « 6 », soit une fréquence proche de $\frac{1}{6}$. Le nombre exact change d'une série de lancers à l'autre.

Voici une série possible, obtenue en simulant les lancers à la calculatrice. On note la fréquence du « 6 » après n lancers, arrondie au millième :

n	60	600	6000
nombre de « 6 »	13	94	1012
fréquence	$0{,}217$	$0{,}157$	$0{,}169$

Plus n grandit, plus la fréquence reste près de $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$. Ce nombre stable mesure la chance d'obtenir « 6 » : c'est sa **probabilité**. Ici, on l'observe ; on ne le démontre pas.

Issues, univers, événements

Tu lances un dé cubique. Les résultats possibles sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6 : ce sont les **issues**. On les rassemble dans l'ensemble $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

« Obtenir un nombre pair » est réalisé par les issues 2, 4 et 6. On note $A = \{2, 4, 6\}$: un événement est un ensemble d'issues.

Définition : Expérience aléatoire, univers, événements

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît toutes les issues possibles, sans pouvoir prévoir laquelle se produira. L'ensemble de ses issues est l'**univers**, noté Ω ; on le suppose fini. Un **événement** est une partie de Ω ; un événement formé d'une seule issue est un **événement élémentaire**. Ω est l'**événement certain** et $\emptyset$ l'**événement impossible**. Un événement A est réalisé lorsque l'issue obtenue appartient à A.

Exemple : Deux lancers de pièce

On lance deux fois une pièce. L'univers compte 4 issues : $\Omega = \{\mathrm{PP}, \mathrm{PF}, \mathrm{FP}, \mathrm{FF}\}$.

- « Obtenir au moins un Pile » : $\{\mathrm{PP}, \mathrm{PF}, \mathrm{FP}\}$.
- « Obtenir deux faces identiques » : $\{\mathrm{PP}, \mathrm{FF}\}$.
- « Obtenir trois Pile » : $\emptyset$, l'événement impossible.

Contraire, et, ou

Définition : Opérations sur les événements

Soit A et B deux événements d'un univers Ω.

- L'événement **contraire** de A, noté $\overline{A}$, est formé des issues de Ω qui n'appartiennent pas à A.
- L'événement $A \cap B$, lu « A et B », est réalisé lorsque A et B sont réalisés tous les deux.
- L'événement $A \cup B$, lu « A ou B », est réalisé lorsque l'un au moins des deux est réalisé.
- A et B sont **incompatibles** lorsque $A \cap B = \emptyset$.

Vérifie : Avec le dé

Sur le dé, $A = \{2, 4, 6\}$ (« pair ») et $B = \{5, 6\}$ (« au moins 5 »). Quel est l'événement $A \cup B$?

A. $\{6\}$
Faux.
$\{6\}$ est $A \cap B$: les issues communes. « A ou B » demande l'un **au moins** des deux.

B. $\{1, 3, 5\}$

Faux.

C'est $\overline{A}$, le contraire de « pair ».

C. $\{2, 4, 5, 6, 6\}$

Faux.

Une issue s'écrit une seule fois dans un ensemble : 6 ne compte pas double.

D. $\{2, 4, 5, 6\}$

Juste.

On réunit les issues de A et celles de B, sans répéter 6.

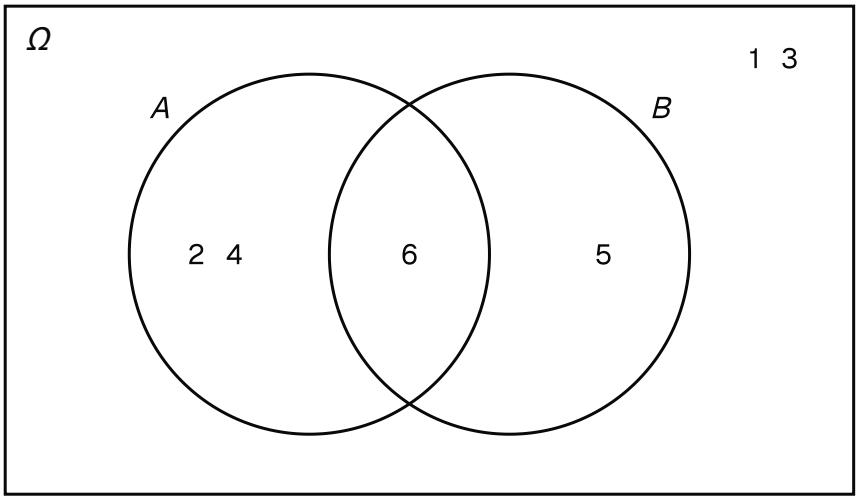
Correction

$A \cup B$ réunit les issues paires et les issues au moins égales à 5 :

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}.$$

De plus, $A \cap B = \{6\}$ et $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$.

Enfin, A et $\{1, 3\}$ sont incompatibles : ils n'ont aucune issue commune.



Les six issues du dé rangées selon les événements A (pair) et B (au moins 5) : 6 seul est dans les deux.

Une probabilité, des règles

Pour un dé équilibré, la fréquence de chaque face se stabilise près de $\frac{1}{6}$. On donne donc à chaque issue le poids $\frac{1}{6}$. Les six poids sont positifs, et leur somme vaut 1.

Définition : Probabilité sur un univers fini

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ l'univers fini d'une expérience aléatoire. Définir une **probabilité** sur Ω, c'est associer à chaque issue ω_i un réel $p_i \geq 0$, de sorte que $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$. La **probabilité** d'un événement A, notée $P(A)$, est la somme des p_i des issues qui forment A ; on pose $P(\emptyset) = 0$.

Propriété : Règles de calcul des probabilités

Pour tous événements A et B d'un univers fini Ω :

- $P(\Omega) = 1$ et $0 \leq P(A) \leq 1$;
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
- si A et B sont incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemple : Les règles sur le dé (guidé)

Avec $A = \{2, 4, 6\}$ et $B = \{5, 6\}$:

1. **Probabilités** : $P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ et $P(A \cap B) = P(\{6\}) = \dfrac{1}{6}$.
2. **Réunion** : $P(A \cup B) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$.
3. **Contrôle** : $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$ a 4 issues, et $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.
4. **Contraire** : $P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Quand toutes les issues se valent

Propriété : Hypothèse d'équiprobabilité

Lorsque toutes les issues d'un univers fini Ω ont la même probabilité (hypothèse d'**équiprobabilité**), chacune a pour probabilité $\dfrac{1}{\text{card}(\Omega)}$ et, pour tout événement A :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

Méthode : Calculer une probabilité en quatre temps

1. **Justifier** l'équiprobabilité en citant l'énoncé : « indiscernables au toucher », « équilibré », « au hasard ».
2. **Compter** l'univers : $\text{card}(\Omega)$, avec le modèle choisi.

3. **Compter** l'événement, avec le **même** modèle.
4. **Diviser**, puis simplifier jusqu'à une fraction irréductible.

Exemple : L'urne de la kermesse (guidé)

On tire **simultanément** 3 boules de l'urne : 4 rouges, 3 vertes. On cherche la probabilité de D : « obtenir exactement deux rouges ».

1. **Équiprobabilité** : les boules sont indiscernables au toucher, donc tous les groupes de 3 boules ont la même probabilité.
2. **Univers** : $\mathrm{card}(\Omega) = C_7^3 = 35$.
3. **Événement** : 2 rouges parmi 4, **et** 1 verte parmi 3 : $\mathrm{card}(D) = C_4^2 \times C_3^1 = 6 \times 3 = 18$.
4. **Conclusion** : $P(D) = \dfrac{18}{35}$.

À toi : Trois boules de même couleur

Avec le même tirage de 3 boules, calcule la probabilité de l'événement « les trois boules ont la même couleur ».

Indice 1
Même couleur : trois rouges, **ou** trois vertes. Ces deux cas sont incompatibles.
Indice 2
Trois rouges : C_4^3 groupes. Trois vertes : C_3^3 groupes.
Indice 3
Divise, puis simplifie.

Réponse
Les boules sont indiscernables au toucher : les 35 groupes de 3 boules sont équiprobables.

« Même couleur » regroupe $C_4^3 = 4$ groupes de trois rouges et $C_3^3 = 1$ groupe de trois vertes, soit 5 groupes. Donc

$$P(\text{même couleur}) = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}.$$

Au moins un : passer par le contraire

« Au moins une verte » regroupe trois cas : une, deux ou trois vertes. Son contraire n'en a qu'un : « aucune verte », c'est-à-dire « trois rouges ». On calcule le contraire, puis on le retire de 1.

Avec le tirage simultané de 3 boules, $P(\text{trois rouges}) = \dfrac{C_4^3}{35} = \dfrac{4}{35}$. Donc

$$P(\text{au moins une verte}) = 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35}.$$

À toi : Quatre lancers de pièce

Tu lances quatre fois une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir **au moins un** Pile ?

Indice 1
Les issues sont les 4-listes de lettres P ou F : combien sont-elles ? Sont-elles équiprobables ?
Indice 2
Le contraire de « au moins un Pile » est « aucun Pile » : une seule liste, FFFF.
Indice 3
Calcule $1 - P(\text{aucun Pile})$.

Réponse
La pièce est équilibrée : les $2^4 = 16$ listes sont équiprobables.

Le contraire, « aucun Pile », ne contient que FFFF : sa probabilité est $\frac{1}{16}$. Donc

$$P(\text{au moins un Pile}) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

Deux pièges à éviter

Attention : Un seul modèle, du début à la fin

On veut la probabilité de « trois rouges » quand on tire 3 boules de l'urne. Deux calculs cohérents donnent le même nombre :

- en groupes, tirage d'un coup : $\frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}$;
- en listes ordonnées, sans remise : $\frac{A_4^3}{A_7^3} = \frac{24}{210} = \frac{4}{35}$.

Le quotient mélangé $\frac{A_4^3}{C_7^3} = \frac{24}{35}$ est faux : il divise des listes par des groupes.

Trouve l'erreur : La somme de deux dés

Pour deux dés équilibrés, un camarade écrit : « La somme S prend 11 valeurs, de 2 à 12. Donc $P(S = 7) = \frac{1}{11}$. » Où est l'erreur ?

A. Il y a 12 valeurs, pas 11.

Faux.
De 2 à 12, il y a bien 11 valeurs. L'erreur est ailleurs.

B. On ne peut pas calculer de probabilité avec deux dés.

Faux.

On le peut : on travaille sur les 36 couples formés par les faces des deux dés.

C. Les 11 valeurs de S ne sont pas équiprobables.

Juste.

Ce sont les 36 couples de faces qui sont équiprobables. Six d'entre eux donnent 7, un seul donne 2.

Correction

Les dés sont équilibrés : les $6 \times 6 = 36$ couples de faces sont équiprobables. Les valeurs de S, elles, ne le sont pas.

La somme 7 vient de six couples : $(1,6)$, $(2,5)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(5,2)$ et $(6,1)$. Donc

$$P(S=7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

La somme 2 ne vient que de $(1,1)$: $P(S=2) = \frac{1}{36}$.

Probabilité conditionnelle

Quand on sait déjà quelque chose

On tire maintenant **deux** boules de l'urne, l'une après l'autre, **sans remise**. On note R_1 : « la première boule est rouge », et R_2 : « la deuxième boule est rouge ».

Tu vois la première boule : elle est rouge. Que devient la chance que la deuxième le soit aussi ?

Devine : La deuxième boule

La première boule tirée est rouge. Quelle est alors la probabilité que la deuxième soit rouge ?

A. $\frac{4}{7}$, comme pour la première

Faux.

Après le premier tirage, l'urne a changé : il reste 6 boules, dont 3 rouges.

B. $\frac{2}{7}$

Faux.

$\frac{2}{7}$ est la probabilité que les **deux** boules soient rouges, sans rien savoir de la première.

C. $\frac{3}{7}$

Faux.

Il reste bien 3 rouges, mais l'urne ne contient plus que 6 boules.

D. $\frac{1}{2}$

Juste.

Il reste 6 boules, dont 3 rouges, toutes indiscernables : $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Correction

Sachant que la première est rouge, l'urne contient 6 boules, dont 3 rouges. La probabilité cherchée vaut $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

On la note $P_{R_1}(R_2)$: c'est la probabilité de R_2 sachant R_1.

Définition : Probabilité conditionnelle

Soit A un événement tel que $P(A) \neq 0$. Pour tout événement B, la **probabilité de B sachant A** est le réel

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Exemple : La formule confirme (guidé)

Les tirages ordonnés sans remise sont équiprobables : $\mathrm{card}(\Omega) = A_7^2 = 42$.

1. $P(R_1) = \frac{4 \times 6}{42} = \frac{4}{7}$: 4 choix rouges pour la première boule, puis 6 pour la deuxième.
2. $P(R_1 \cap R_2) = \frac{A_4^2}{42} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$.
3. $P(R_1) \neq 0$, donc $P_{R_1}(R_2) = \frac{2/7}{4/7} = \frac{1}{2}$: la valeur trouvée en regardant l'urne.

Multiplier le long d'un chemin

Propriété : Probabilités composées

Pour tous événements A et B tels que $P(A) \neq 0$:

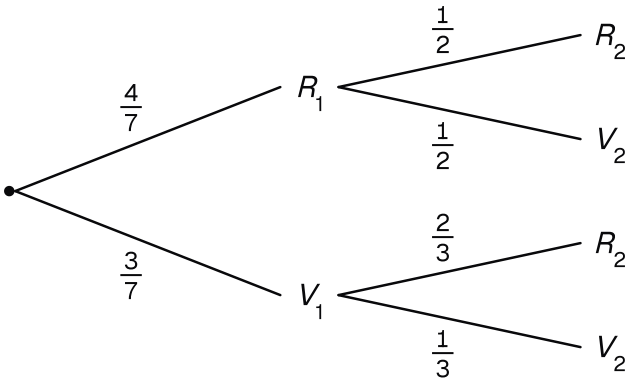
$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B).$$

Exemple : Deux boules, deux couleurs

Avec V_1 : « la première boule est verte » et V_2 : « la deuxième est verte » :

- $P(R_1 \cap V_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(V_2) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$;
- $P(V_1 \cap V_2) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$.

« Deux boules de même couleur » réunit deux cas incompatibles : $\frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$. Par comptage : $\frac{A_4^2 + A_3^2}{A_7^2} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$.



Arbre pondéré des deux tirages sans remise : la couleur de la première boule, puis celle de la deuxième sachant la première.

Un système complet, puis une somme

Une maladie touche **une personne sur vingt** dans une région. Un test de dépistage est positif chez 9 porteurs sur 10, mais aussi chez 1 non-porteur sur 10. On choisit une personne au hasard. On note M : « elle est porteuse », et T : « son test est positif ».

Ainsi $P(M) = \frac{1}{20}$, $P_M(T) = \frac{9}{10}$ et $P_{\overline{M}}(T) = \frac{1}{10}$.

Définition : Système complet d'événements

Des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n \geq 2$) d'un univers Ω forment un **système complet d'événements** lorsqu'ils sont deux à deux incompatibles et que leur réunion est Ω :

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega.$$

Pour tout événement A, les événements A et $\overline{A}$ forment un système complet.

L'arbre pondéré tient dans un tableau. Chaque ligne est un chemin ; sa probabilité est le produit des probabilités lues le long du chemin.

Chemin	Calcul	Probabilité
M puis T	$\frac{1}{20} \times \frac{9}{10}$	$\frac{9}{200}$
M puis $\overline{T}$	$\frac{1}{20} \times \frac{1}{10}$	$\frac{1}{200}$

Chemin	Calcul	Probabilité
$\overline{M}$ puis T	$\frac{19}{20} \times \frac{1}{10}$	$\frac{19}{200}$
$\overline{M}$ puis $\overline{T}$	$\frac{19}{20} \times \frac{9}{10}$	$\frac{171}{200}$

Contrôle : $9 + 1 + 19 + 171 = 200$. La somme des quatre chemins vaut 1.

Théorème : Formule des probabilités totales

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un système complet d'événements dont aucun n'a une probabilité nulle. Pour tout événement B :

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n) \times P_{A_n}(B).$$

En particulier, si $0 < P(A) < 1$: $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$.

Exemple : Probabilité d'un test positif (guidé)

1. **Système complet** : M et $\overline{M}$, avec $P(M) = \frac{1}{20} \neq 0$ et $P(\overline{M}) = \frac{19}{20} \neq 0$.
2. **Chemins utiles** : ceux qui mènent à T, soit M puis T, et $\overline{M}$ puis T.
3. **Somme** : $P(T) = \frac{9}{200} + \frac{19}{200} = \frac{28}{200} = \frac{7}{50}$.

Méthode : Lire un arbre en tableau

1. **Premier niveau** : nomme le système complet et donne ses probabilités.
2. **Second niveau** : écris les probabilités conditionnelles, sachant chaque cas.
3. **Chemins** : multiplie le long de chaque ligne du tableau.
4. **Somme** : ajoute les lignes qui aboutissent à l'événement cherché.
5. **Sens inverse** : pour $P_T(M)$, reviens à la définition, avec $P(T) \neq 0$.

Retourner le conditionnement

> **Trouve l'erreur : Le test est positif**
>
> Ton test est positif. Un ami te dit : « Le test se trompe une fois sur dix, donc tu es porteur avec la probabilité $\frac{9}{10}$. » Que vaut vraiment $P_T(M)$?
>
> **A.** $\frac{9}{10}$
> **Faux.**

$\frac{9}{10}$ est $P_M(T)$: la chance d'un test positif **chez un porteur**. La question porte sur l'inverse.

B. $\frac{9}{200}$

Faux.

$\frac{9}{200}$ est $P(M \cap T)$. Il reste à diviser par $P(T)$.

C. $\frac{9}{28}$

Juste.

$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{9/200}{28/200} = \frac{9}{28}$.

D. $\frac{1}{20}$

Faux.

$\frac{1}{20}$ est la proportion de porteurs **avant** le test. Un test positif change cette probabilité.

Correction

On revient à la définition, avec $P(T) = \frac{7}{50} \neq 0$:

$$\begin{aligned} P_T(M) &= \frac{P(M \cap T)}{P(T)} \\ &= \frac{9/200}{28/200} = \frac{9}{28}. \end{aligned}$$

C'est moins d'une chance sur trois. La plupart des tests positifs viennent des non-porteurs, bien plus nombreux.

Attention : Le conditionnement ne se retourne pas

Ici, $P_M(T) = \frac{9}{10}$, alors que $P_T(M) = \frac{9}{28}$. Les deux nombres répondent à deux questions différentes. Pour passer de l'un à l'autre, repasse toujours par $P(M \cap T)$ et $P(T)$.

À toi : La deuxième boule, sans rien savoir

Deux boules sont tirées sans remise dans l'urne. Calcule $P(R_2)$, la probabilité que la deuxième boule soit rouge, sans rien savoir de la première.

Indice 1

R_1 et V_1 forment un système complet, de probabilités non nulles.

Indice 2

Deux chemins mènent à R_2 : R_1 puis R_2, et V_1 puis R_2. Après une verte, il reste 4 rouges sur 6 boules.

Indice 3

Multiplie le long de chaque chemin, puis additionne les deux produits.

Réponse

R_1 et V_1 forment un système complet, avec $P(R_1) = \frac{4}{7}$ et $P(V_1) = \frac{3}{7}$, toutes deux non nulles.

Sachant R_1, il reste 3 rouges sur 6 boules : $P_{R_1}(R_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Sachant V_1, il reste 4 rouges sur 6 boules : $P_{V_1}(R_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} &P(R_2) \\ &= P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) \\ &\quad + P(V_1) \times P_{V_1}(R_2) \\ &= \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \\ &= \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

Sans information sur la première boule, la deuxième a la même chance d'être rouge que la première.

Indépendance

Une information qui ne change rien

Tu lances un dé équilibré. On note A : « obtenir un nombre pair », et G : « obtenir un multiple de 3 », soit $G = \{3, 6\}$. Sans information, $P(G) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Devine : Un indice sur le dé

On t'annonce que le résultat est pair. Que devient la probabilité d'avoir un multiple de 3 ?

A. Elle augmente, car 6 est pair.

Faux.

Parmi 2, 4 et 6, un seul résultat est multiple de 3 : la proportion reste $\frac{1}{3}$.

B. Elle diminue, car 3 est éliminé.

Faux.

3 disparaît, mais 1 et 5 aussi. Il reste un multiple de 3 sur trois issues.

C. Elle reste égale à $\frac{1}{3}$.

Juste.

Sachant A, il reste $\{2, 4, 6\}$, dont un seul multiple de 3 : $\frac{1}{3}$, comme avant.

Correction

Sachant que le résultat est pair, les issues possibles sont 2, 4 et 6, équiprobables. Une seule est multiple de 3 : $P_A(G) = \frac{1}{3} = P(G)$. L'information « pair » ne change rien à la chance de G.

Définition : Indépendance de deux événements

Deux événements A et B sont **indépendants** lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Exemple : Le calcul qui le prouve (guidé)

1. **Probabilités** : $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(G) = \frac{1}{3}$ et $A \cap G = \{6\}$, donc $P(A \cap G) = \frac{1}{6}$.
2. **Produit** : $P(A) \times P(G) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
3. **Conclusion** : $P(A \cap G) = P(A) \times P(G)$, donc A et G sont indépendants.

Propriété : Indépendance et conditionnement

Soit A et B deux événements.

- Si $P(A) \neq 0$: A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.
- Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Vérifie : Pair et grand

Sur le même dé, on note H : « obtenir au moins 4 », soit $H = \{4, 5, 6\}$. Les événements A et H sont-ils indépendants ?

A. Oui, car $P(A) = P(H) = \frac{1}{2}$.

Faux.
Deux probabilités égales ne disent rien de l'indépendance. Il faut comparer $P(A \cap H)$ à $P(A) \times P(H)$.

B. Non, car $P(A \cap H) = \frac{1}{3}$ et $P(A) \times P(H) = \frac{1}{4}$.

Juste.
$A \cap H = \{4, 6\}$, donc $P(A \cap H) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, qui diffère de $\frac{1}{4}$.

C. Oui, car A et H ont des issues communes.

Faux.
Avoir des issues communes, c'est ne pas être incompatibles. Cela ne prouve pas l'indépendance.

D. On ne peut pas savoir sans lancer le dé.

Faux.
L'indépendance se démontre par le calcul, sur le modèle : aucun lancer n'est nécessaire.

Correction

$A \cap H = \{4, 6\}$, donc $P(A \cap H) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Or $P(A) = P(H) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, donc

$$P(A) \times P(H) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Comme $\dfrac{1}{3} \neq \dfrac{1}{4}$, A et H ne sont **pas** indépendants.

D'ailleurs $P_A(H) = \dfrac{1/3}{1/2} = \dfrac{2}{3}$: savoir « pair » augmente la chance de « au moins 4 ».

Incompatibles, mais pas indépendants

Attention : Incompatibles n'est pas indépendants

Sur le dé, K : « obtenir 5 » et L : « obtenir 6 » n'ont aucune issue commune. Ils sont **incompatibles**, et $P(K \cap L) = 0$.

Or $P(K) \times P(L) = \dfrac{1}{36} \neq 0$: ils ne sont **pas** indépendants. Si tu sais que K est réalisé, tu sais que L ne l'est pas. C'est tout le contraire d'une information qui ne change rien.

Dès que $P(K) \neq 0$ et $P(L) \neq 0$, deux événements incompatibles ne sont jamais indépendants.

Méthode : Prouver l'indépendance

1. **Calcule** à part $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$.
2. **Compare** $P(A \cap B)$ au produit $P(A) \times P(B)$: égaux, les événements sont indépendants ; différents, ils ne le sont pas.
3. **Variante** : si $P(A) \neq 0$, compare $P_A(B)$ à $P(B)$.

Cette question figure dans 3 des 13 sujets consultés ; dans les 2 barèmes lus, elle vaut $0{,}5$ point : $0{,}25$ pour la réponse, $0{,}25$ pour la justification. Écris donc le calcul **et** la conclusion.

Des épreuves qui ne s'influencent pas

Tu lances une pièce équilibrée, puis un dé équilibré. Le résultat de la pièce ne change rien au dé.

Les $2 \times 6 = 12$ couples sont équiprobables, et un seul est (Pile, 6). Donc $P(\text{Pile puis } 6) = \dfrac{1}{12}$: c'est aussi $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{6}$.

Propriété : Épreuves indépendantes

Lorsqu'une expérience est formée d'épreuves **indépendantes**, c'est-à-dire telles que le résultat de l'une ne modifie pas les probabilités des résultats des autres, la probabilité d'obtenir une liste donnée de résultats est le **produit** des probabilités de chacun de ces résultats.

À toi : Avec remise

On tire une boule de l'urne (4 rouges, 3 vertes), on note sa couleur et on la **remet**. Puis on tire une deuxième boule. Calcule la probabilité d'obtenir une rouge, puis une verte.

Indice 1
Avec remise, l'urne est la même au second tirage : les deux tirages sont indépendants.
Indice 2
Rouge au premier tirage : $\frac{4}{7}$. Verte au second : $\frac{3}{7}$.
Indice 3
Multiplie les deux probabilités.

Réponse
Avec remise, la composition de l'urne ne change pas : les deux tirages sont des épreuves indépendantes. Donc

$$P(\text{rouge puis verte}) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{12}{49}.$$

Sans remise, on trouvait $\frac{2}{7} = \frac{14}{49}$: le premier tirage modifiait l'urne.

Exemple : Trois lancers de dé

On lance trois fois un dé équilibré ; les lancers sont indépendants.

- $P(\text{trois } 6) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$.
- $P(\text{aucun } 6) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$.
- $P(\text{au moins un } 6) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$.

Variable aléatoire, espérance, variance

Un nombre attaché à chaque issue

Tu lances deux fois une pièce équilibrée. L'ordre des faces ne t'intéresse pas : seul compte le **nombre de Pile**, que l'on note N. À chaque issue, N associe un nombre :

Issue	PP	PF	FP	FF
Valeur de N	2	1	1	0

Devine : La valeur la plus fréquente

Quelle valeur de N a la plus grande probabilité ?

A. 0

Faux.
$N = 0$ ne correspond qu'à l'issue FF.

B. 1

Juste.
Deux issues sur quatre donnent $N = 1$: PF et FP.

C. 2

Faux.
$N = 2$ ne correspond qu'à l'issue PP.

D. Les trois valeurs ont la même probabilité.

Faux.
Les issues sont équiprobables, pas les valeurs de N : la valeur 1 en regroupe deux.

Correction
La pièce est équilibrée : les 4 issues sont équiprobables. L'événement $(N = 1)$ est $\{\mathrm{PF}, \mathrm{FP}\}$, donc $P(N = 1) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$, contre $\dfrac{1}{4}$ pour $N = 0$ et pour $N = 2$.

Définition : Variable aléatoire

Une **variable aléatoire** X définie sur un univers fini Ω est une application qui associe un nombre réel à chaque issue de Ω. On note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ l'ensemble de ses valeurs et $(X = x_i)$ l'événement formé des issues auxquelles X associe x_i.

Définition : Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. La **loi de probabilité** de X est la donnée, pour chaque valeur x_i, de la probabilité $p_i = P(X = x_i)$. On la présente dans un tableau, et $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Exemple : La loi du nombre de Pile

x_i	0	1	2
$P(N = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Contrôle : $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$.

La loi de l'urne

Méthode : Trouver une loi en quatre temps

1. **Valeurs** : écris toutes les valeurs que peut prendre la variable.
2. **Événements** : pour chaque valeur, dis en une phrase ce que signifie l'événement, puis calcule sa probabilité.
3. **Tableau** : une ligne pour les valeurs, une ligne pour les probabilités.
4. **Contrôle** : la somme des probabilités doit valoir 1.

La loi d'une variable aléatoire est demandée dans 7 des 13 sujets consultés qui ont un exercice de probabilités, souvent sous forme de tableau à compléter.

À toi : Le nombre de boules rouges

On tire simultanément 3 boules de l'urne (4 rouges, 3 vertes). Soit X le nombre de boules rouges obtenues. Détermine la loi de X.

Indice 1
X peut valoir 0, 1, 2 ou 3. Les 35 groupes de trois boules sont équiprobables.
Indice 2
$(X = 1)$: « une rouge et deux vertes », soit $C_4^1 \times C_3^2$ groupes.
Indice 3
Calcule de même C_3^3, $C_4^2 \times C_3^1$ et C_4^3, puis vérifie que la somme des groupes vaut 35.

Réponse
Les boules sont indiscernables au toucher : les $C_7^3 = 35$ groupes sont équiprobables.

x_i	0	1	2	3
groupes	$C_3^3 = 1$	$C_4^1 \times C_3^2 = 12$	$C_4^2 \times C_3^1 = 18$	$C_4^3 = 4$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

Contrôle : $1 + 12 + 18 + 4 = 35$, donc la somme des probabilités vaut 1. Le résultat le plus probable est bien 2 rouges, comme pressenti au stand de la kermesse.

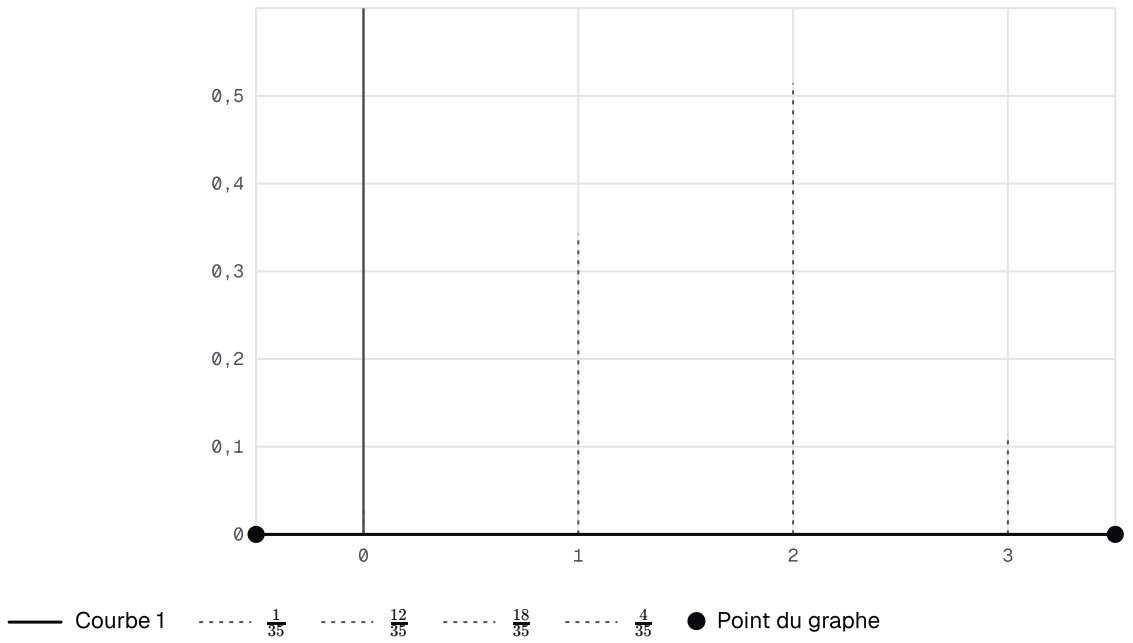


Diagramme en bâtons de la loi de X : un bâton par valeur k, de hauteur P(X = k). Les hauteurs valent 1/35, 12/35, 18/35 et 4/35 ; le bâton le plus haut est en 2.

Une moyenne pondérée

Imagine que tu répètes les deux lancers de pièce un très grand nombre de fois. Environ un quart des fois, $N = 0$; environ la moitié des fois, $N = 1$; environ un quart des fois, $N = 2$.

En moyenne, le nombre de Pile par série de deux lancers vaut donc

$$0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1.$$

Définition : Espérance mathématique

Soit X une variable aléatoire de loi $p_i = P(X = x_i)$, pour i de 1 à n. L'**espérance mathématique** de X est le réel

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n.$$

À toi : L'espérance du nombre de rouges

Avec la loi de X trouvée plus haut, que vaut $E(X)$?

A. $\dfrac{12}{7}$

Juste.
$\dfrac{0 \times 1 + 1 \times 12 + 2 \times 18 + 3 \times 4}{35} = \dfrac{60}{35} = \dfrac{12}{7}.$

B. $\dfrac{0 + 1 + 2 + 3}{4} = \dfrac{3}{2}$

Faux.
Cette moyenne donne le même poids à chaque valeur. Or $X = 2$ est bien plus probable que $X = 0$.

C. 2, la valeur la plus probable

Faux.
La valeur la plus probable n'est pas la moyenne : les autres valeurs comptent aussi, avec leur poids.

D. 1

Faux.
1 est la somme des probabilités, pas l'espérance. Il faut multiplier chaque valeur par sa probabilité.

Correction
On multiplie chaque valeur par sa probabilité, puis on additionne :

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \frac{1}{35} + 1 \times \frac{12}{35} \\ &\quad + 2 \times \frac{18}{35} + 3 \times \frac{4}{35} \\ &= \frac{60}{35} = \frac{12}{7}. \end{aligned}$$

Sur un grand nombre de tirages, on sort en moyenne environ $1{,}71$ boule rouge.

Attention : Une espérance n'est pas forcément une valeur prise

$E(X) = \dfrac{12}{7}$, et pourtant X ne vaut jamais $\dfrac{12}{7}$: on tire 0, 1, 2 ou 3 boules rouges, jamais un morceau de boule. L'espérance est une **moyenne pondérée** des valeurs, pas un résultat possible du tirage.

Variance et écart-type

Définition : Variance et écart-type

Avec les mêmes notations, la **variance** de X est le réel positif

$$V(X) = p_1\big(x_1 - E(X)\big)^2 + p_2\big(x_2 - E(X)\big)^2 + \cdots + p_n\big(x_n - E(X)\big)^2,$$

et l'**écart-type** de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriété : Calcul pratique de la variance

Avec les mêmes notations :

$$V(X) = x_1^2\, p_1 + x_2^2\, p_2 + \cdots + x_n^2\, p_n - \big(E(X)\big)^2.$$

Exemple : Variance du nombre de Pile (guidé)

Par la définition. Avec $E(N) = 1$:

$$\begin{aligned} V(N) &= \frac{1}{4}(0-1)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(1-1)^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}(2-1)^2 \\ &= \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Par le calcul pratique.

$$\begin{aligned} V(N) &= 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{2} \\ &\quad + 2^2 \times \frac{1}{4} - 1^2 \\ &= \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Écart-type. $\sigma(N) = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Les deux formules donnent le même résultat. La variance et l'écart-type ne sont demandés dans aucun des 15 sujets consultés : ils servent ici à comprendre la dispersion.

Méthode : Espérance, variance, écart-type

1. **Espérance** : additionne les produits de chaque valeur par sa probabilité.
2. **Variance** : additionne les $x_i^2\, p_i$, puis retire le carré de $E(X)$.
3. **Écart-type** : vérifie que $V(X) \geq 0$, puis prends sa racine carrée, sous forme exacte.

À toi : Variance et écart-type du nombre de rouges

Calcule $V(X)$ puis $\sigma(X)$ pour le nombre X de boules rouges.

Indice 1
Utilise le calcul pratique : commence par la somme des $x_i^2\, p_i$.
Indice 2
Les carrés des valeurs sont 0, 1, 4 et 9 : multiplie chacun par sa probabilité, puis additionne.
Indice 3
Retranche $\big(E(X)\big)^2$, puis prends la racine carrée.

Réponse
Somme des $x_i^2\, p_i$. Avec la loi de X :

$$\begin{aligned} &0^2 \times \frac{1}{35} + 1^2 \times \frac{12}{35} \\ &\quad + 2^2 \times \frac{18}{35} + 3^2 \times \frac{4}{35} \\ &= \frac{0 + 12 + 72 + 36}{35} \\ &= \frac{120}{35} = \frac{24}{7}. \end{aligned}$$

Variance. On retire le carré de $E(X) = \frac{12}{7}$:

$$\begin{aligned} &V(X) \\ &= \frac{24}{7} - \left(\frac{12}{7}\right)^2 \\ &= \frac{168}{49} - \frac{144}{49} = \frac{24}{49}. \end{aligned}$$

Écart-type. La variance est bien positive, donc

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= \sqrt{\frac{24}{49}} \\ &= \frac{\sqrt{24}}{7} = \frac{2\sqrt{6}}{7}. \end{aligned}$$

Loi binomiale

Succès ou échec

Tu lances un dé équilibré et tu ne regardes qu'une chose : as-tu obtenu « 6 » ? Il n'y a que deux issues : le **succès** (« 6 »), de probabilité $\frac{1}{6}$, ou l'**échec**, de probabilité $\frac{5}{6}$.

Tu recommences 4 fois, dans les mêmes conditions. Les lancers ne s'influencent pas.

Définition : Épreuve de Bernoulli et schéma de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** est une épreuve à deux issues : le **succès**, de probabilité p, et l'**échec**, de probabilité $1 - p$. Répéter n fois une épreuve de Bernoulli, dans des conditions **identiques** et de façon **indépendante**, c'est réaliser un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p.

Devine : Où sont les deux succès ?

Sur les 4 lancers, on note seulement « succès » ou « échec » à chaque lancer. Combien de listes contiennent exactement deux succès ?

A. 6

Juste.
Placer les deux succès, c'est choisir 2 lancers parmi 4 : $C_4^2 = 6$.

B. 4

Faux.
Il y a 4 lancers, mais on choisit **deux** places parmi les quatre pour les succès.

C. 12

Faux.
$A_4^2 = 12$ compte les places dans un ordre. Or échanger les deux succès donne la même liste.

D. 16

Faux.
$2^4 = 16$ compte toutes les listes de succès et d'échecs, quel que soit le nombre de succès.

Correction
Une liste est fixée dès qu'on choisit les 2 lancers réussis parmi les 4 : il y a $C_4^2 = 6$ listes. Avec S pour succès et E pour échec : SSEE, SESE, SEES, ESSE, ESES, EESS.

La formule de la loi binomiale

Les lancers sont indépendants : chaque liste à deux succès et deux échecs a pour probabilité

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{1296}.$$

Ces 6 listes sont incompatibles. Si Y désigne le nombre de « 6 » obtenus :

$$\begin{aligned} &P(Y = 2) \\ &= 6 \times \frac{25}{1296} = \frac{150}{1296} = \frac{25}{216}. \end{aligned}$$

Théorème : Loi binomiale

Soit X le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, avec $n \geq 1$ et $0 < p < 1$. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$:

$$P(X = k) = C_n^k \, p^k \, (1-p)^{n-k}.$$

On dit que X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p.

Exemple : La loi complète (guidé)

Y suit la loi binomiale de paramètres 4 et $\dfrac{1}{6}$. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 4$:

$$P(Y = k) = C_4^k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{4-k}.$$

k	0	1	2	3	4
C_4^k	1	4	6	4	1
$P(Y = k)$	$\dfrac{625}{1296}$	$\dfrac{125}{324}$	$\dfrac{25}{216}$	$\dfrac{5}{324}$	$\dfrac{1}{1296}$

Sur 1296, les numérateurs sont 625, 500, 150, 20 et 1. Leur somme vaut 1296 : la somme des probabilités vaut 1.

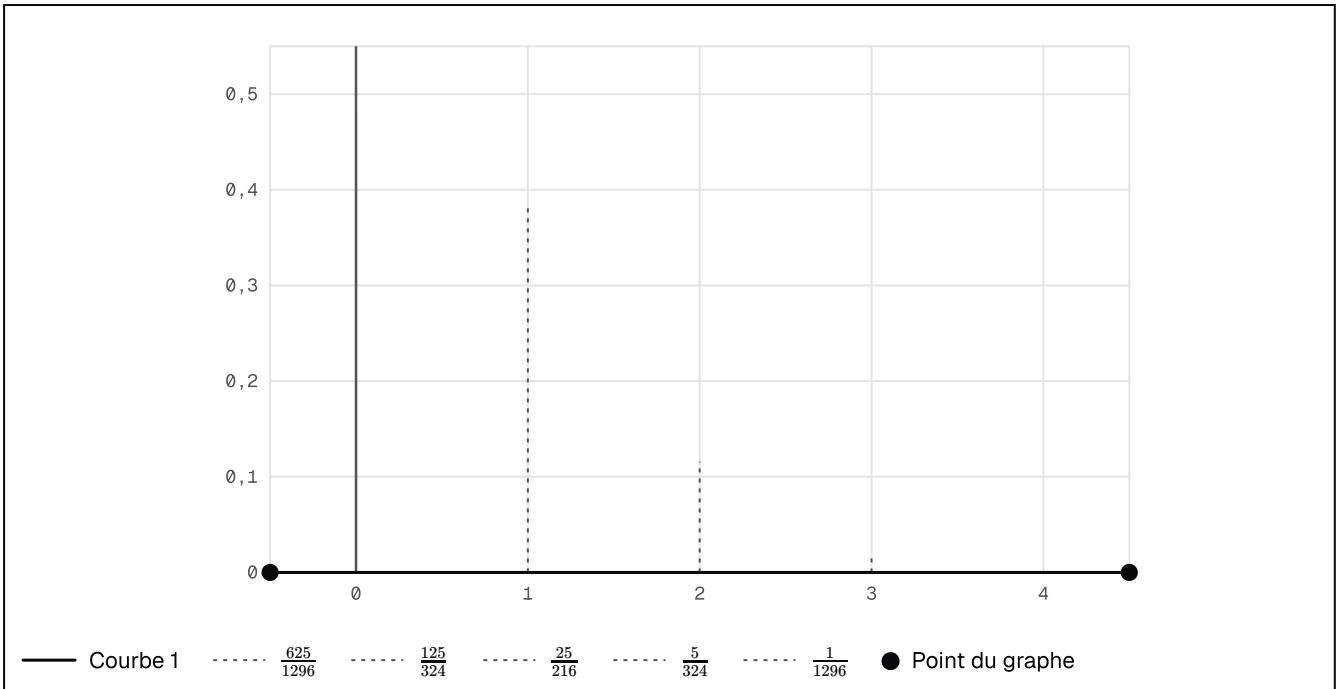


Diagramme en bâtons de la loi de Y, nombre de « 6 » en quatre lancers. Sur 1296, les hauteurs valent 625, 500, 150, 20 et 1 : plus k grandit, plus le bâton est court.

À toi : Au moins un six

Calcule la probabilité d'obtenir au moins un « 6 » en 4 lancers.

Indice 1

« Au moins un succès » : pense à l'événement contraire.

Indice 2

Le contraire est $(Y = 0)$: aucun « 6 » en 4 lancers.

Indice 3

$P(Y = 0) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^4 = \dfrac{625}{1296}$.

Réponse

Le contraire de « au moins un 6 » est « aucun 6 », c'est-à-dire l'événement $(Y = 0)$. Donc

$$\begin{aligned} &P(Y \geq 1) \\ &= 1 - P(Y = 0) \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \\ &= 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}. \end{aligned}$$

C'est un peu plus d'une chance sur deux, car $\dfrac{671}{1296} > \dfrac{648}{1296} = \dfrac{1}{2}$.

Espérance et variance sans tableau

Propriété : Espérance et variance d'une loi binomiale

Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p).$$

Exemple : Deux chemins, un même résultat

Par la propriété. $E(Y) = 4 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$ et $V(Y) = 4 \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{9}$, donc $\sigma(Y) = \sqrt{\dfrac{5}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Par le tableau. Les numérateurs sur 1296 sont $625, 500, 150, 20$ et 1 :

$$\begin{aligned} 1296\,E(Y) &= 0 \times 625 + 1 \times 500 \\ &\quad + 2 \times 150 + 3 \times 20 \\ &\quad + 4 \times 1 \\ &= 864. \end{aligned}$$

Donc $E(Y) = \dfrac{864}{1296} = \dfrac{2}{3}$. La propriété évite tout le tableau : un seul produit suffit.

Vérifier les hypothèses

Méthode : Reconnaître une loi binomiale

1. **L'épreuve** : décris l'épreuve répétée, nomme le succès et donne sa probabilité p.
2. **La répétition** : justifie que les n épreuves sont identiques et indépendantes, par exemple des lancers successifs ou des tirages **avec** remise.
3. **Le comptage** : vérifie que la variable compte les succès.
4. **La conclusion** : écris « X suit la loi binomiale de paramètres n et p », puis applique la formule. Pour « au moins un succès », passe par $1 - (1-p)^n$.

Une répétition d'épreuves figure dans 4 des 13 sujets consultés qui ont un exercice de probabilités.

Trouve l'erreur : Deux boules et une loi binomiale

On tire successivement **sans remise** 2 boules de l'urne (4 rouges, 3 vertes). Z compte les rouges. Un camarade écrit : « Z suit la loi binomiale de paramètres 2 et $\dfrac{4}{7}$, donc $P(Z=2) = \dfrac{16}{49}$. » Qu'en penses-tu ?

A. Il se trompe : sans remise, les deux tirages ne sont pas indépendants.

Juste.

La deuxième boule dépend de la première. En réalité, $P(Z=2)=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{2}{7}=\frac{14}{49}$.

B. Le modèle est bon, mais le calcul est faux : $\left(\frac{4}{7}\right)^2=\frac{8}{49}$.

Faux.

$\left(\frac{4}{7}\right)^2=\frac{16}{49}$: le calcul est juste. C'est le modèle qui ne convient pas.

C. Il a raison : chaque tirage a bien deux issues, rouge ou verte.

Faux.

Deux issues ne suffisent pas : il faut aussi des épreuves identiques et indépendantes.

D. Il se trompe de paramètre : il faut $p=\frac{1}{2}$.

Faux.

La première boule est rouge avec la probabilité $\frac{4}{7}$. Le défaut n'est pas le paramètre, c'est l'absence d'indépendance.

Correction

Sans remise, la composition de l'urne change après le premier tirage : les tirages ne sont **pas** indépendants, et la loi binomiale ne s'applique pas.

Par les probabilités composées :

$$P(Z=2)=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{2}{7}=\frac{14}{49},$$

et non $\frac{16}{49}$.

Avec remise, les tirages deviendraient indépendants, et la loi binomiale de paramètres 2 et $\frac{4}{7}$ donnerait bien $\frac{16}{49}$.

Attention : Sans remise, pas de loi binomiale

Avant d'écrire « loi binomiale », vérifie l'indépendance des épreuves. Un tirage sans remise la détruit : chaque boule tirée modifie l'urne. Les tirages **avec** remise et les lancers successifs donnent, eux, des épreuves identiques et indépendantes.

Vérifie : Trois tirages avec remise

On tire 3 fois une boule de l'urne (4 rouges, 3 vertes), indiscernables au toucher, en la remettant après chaque tirage ; J compte les rouges. Que vaut $P(J=2)$?

A. $\frac{48}{343}$

Faux.
$\left(\frac{4}{7}\right)^2 \times \frac{3}{7} = \frac{48}{343}$ est la probabilité d'**une** liste précise, par exemple rouge, rouge, verte. La verte peut sortir au premier, au deuxième ou au troisième tirage : il manque le facteur $C_3^2 = 3$.

B. $\frac{18}{35}$
Faux.
$\frac{18}{35}$ est la probabilité d'avoir deux rouges quand on tire 3 boules **d'un coup**. Ici, chaque boule est remise : l'urne ne change pas, et les tirages sont indépendants.

C. $\frac{16}{49}$
Faux.
$\left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{16}{49}$ ne tient compte que des deux rouges. Le tirage restant doit donner une verte, de probabilité $\frac{3}{7}$, et cette verte a trois places possibles.

D. $\frac{144}{343}$
Juste.
$C_3^2 \left(\frac{4}{7}\right)^2 \frac{3}{7} = 3 \times \frac{48}{343} = \frac{144}{343}$.

Correction
Vérifions les conditions de la loi binomiale :

- chaque boule est remise : les 3 tirages sont identiques et indépendants ;
- chaque tirage a deux issues ; le succès est « rouge », de probabilité $p = \frac{4}{7}$;
- J compte les succès.

Donc J suit la loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{4}{7}$, et

$$\begin{aligned} &P(J = 2) \\ &= C_3^2 \left(\frac{4}{7}\right)^2 \left(\frac{3}{7}\right) = \frac{144}{343}. \end{aligned}$$

Au bac : l'exercice d'urne, rédigé

Le sujet type

Dans 10 des 13 sujets consultés qui ont un exercice de probabilités, cet exercice vaut 3 points. Le tirage y est simultané dans 9 des 13 sujets. Voici un sujet construit sur ce modèle, avec un barème indicatif proposé par BURHAN d'après les barèmes lus.

> Une urne contient 4 boules rouges et 3 boules vertes, indiscernables au toucher. On tire simultanément 3 boules.
>
> 1. Calculer la probabilité de l'événement U : « obtenir au moins une boule rouge ». ($0{,}75$ pt)
> 2. Calculer la probabilité de l'événement Q : « obtenir des boules des deux couleurs ». ($0{,}75$ pt)
> 3. Soit W le nombre de boules vertes tirées. a) Donner les valeurs de W. ($0{,}25$ pt) b) Déterminer la loi de W. (1 pt) c) Calculer $E(W)$. ($0{,}25$ pt)

Question 1 : au moins une rouge

À toi : Question 1

Rédige la réponse à la question 1, comme sur ta copie.

Indice 1
Commence par justifier l'équiprobabilité et par calculer $\mathrm{card}(\Omega)$.
Indice 2
« Au moins une rouge » : son contraire est « trois vertes ».
Indice 3
$\mathrm{card}(\overline{U}) = C_3^3 = 1$.

Réponse
Les boules sont indiscernables au toucher : tous les tirages sont équiprobables, et $\mathrm{card}(\Omega) = C_7^3 = 35$.

L'événement contraire $\overline{U}$ est « obtenir trois boules vertes » : $\mathrm{card}(\overline{U}) = C_3^3 = 1$. Donc

$$\begin{aligned} P(U) &= 1 - P(\overline{U}) \\ &= 1 - \frac{1}{35} = \frac{34}{35}. \end{aligned}$$

Dans les barèmes consultés, le cardinal ou la formule, puis le résultat, sont souvent notés à part, à $0{,}25$ point chacun. Écris donc toujours $\mathrm{card}(\Omega)$ **avant** la probabilité. Dans un sujet de 2024, le seul passage au contraire valait $0{,}25$ point.

Question 2 : deux couleurs

À toi : Deux couleurs

Quelle rédaction de la question 2 est juste et complète ?

A. « $\overline{Q}$: les trois boules ont la même couleur. $\mathrm{card}(\overline{Q}) = C_4^3 + C_3^3 = 5$, donc $P(Q) = 1 - \frac{5}{35} = \frac{6}{7}$. »
Juste.
Le contraire est décrit, compté avec le même modèle, et la fraction est irréductible.

B. « $\text{card}(Q) = C_4^2 \times C_3^1 = 18$, donc $P(Q) = \dfrac{18}{35}$. »

Faux.

Ce calcul oublie le cas « une rouge et deux vertes ». Il faut ajouter $C_4^1 \times C_3^2 = 12$ tirages.

C. « $P(Q) = 1 - \dfrac{5}{35} = \dfrac{30}{35}$. »

Faux.

Le contraire n'est pas décrit, et la fraction n'est pas irréductible. Le résultat attendu est $\dfrac{6}{7}$.

D. « $P(Q) = \dfrac{A_4^2 \times 3}{C_7^3} = \dfrac{36}{35}$. »

Faux.

Une probabilité ne dépasse jamais 1. Le numérateur compte des listes ordonnées, le dénominateur des groupes.

Correction

Le contraire de « deux couleurs » est « une seule couleur » : trois rouges ou trois vertes. Ces deux cas sont incompatibles, donc

$$\begin{aligned}&\text{card}(\overline{Q})\\&= C_4^3 + C_3^3 = 4 + 1 = 5.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}P(Q) &= 1 - \frac{5}{35}\\&= \frac{30}{35} = \frac{6}{7}.\end{aligned}$$

Vérification directe : $C_4^2 \times C_3^1 + C_4^1 \times C_3^2 = 18 + 12 = 30$ tirages ont deux couleurs.

Question 3 : la loi

Méthode : Question 3, rédigée

a) On tire 3 boules, donc W est compris entre 0 et 3. L'urne contient 4 rouges, assez pour un tirage sans verte : $W = 0$ est possible. Elle contient 3 vertes, assez pour un tirage de trois vertes : $W = 3$ est possible. Ainsi W prend les valeurs 0, 1, 2 et 3.

b) Pour chaque valeur, un événement et un cardinal :

k	0	1	2	3
tirages	$C_4^3 = 4$	$C_3^1 \times C_4^2 = 18$	$C_3^2 \times C_4^1 = 12$	$C_3^3 = 1$
$P(W = k)$	$\dfrac{4}{35}$	$\dfrac{18}{35}$	$\dfrac{12}{35}$	$\dfrac{1}{35}$

Contrôle : $4 + 18 + 12 + 1 = 35$.

c) Avec la loi de W :

$$\begin{aligned} E(W) &= 0 \times \frac{4}{35} + 1 \times \frac{18}{35} \\ &\quad + 2 \times \frac{12}{35} + 3 \times \frac{1}{35} \\ &= \frac{45}{35} = \frac{9}{7}. \end{aligned}$$

Ta copie en cinq réflexes

> **À retenir : Cinq réflexes**
>
> 1. **Justifie** l'équiprobabilité avec les mots de l'énoncé.
> 2. **Écris** $\mathrm{card}(\Omega)$ avec le modèle du tirage : simultané, C_n^p ; successif sans remise, A_n^p ; avec remise, n^p.
> 3. **Décris** l'événement en une phrase avant de le compter.
> 4. **Simplifie** chaque probabilité en fraction irréductible.
> 5. **Contrôle** qu'une loi a une somme égale à 1.

Tu sais maintenant traiter un exercice d'urne de bout en bout : compter, calculer, dresser une loi. Une urne figure dans les 13 sujets consultés qui ont un exercice de probabilités. Cet exercice se prépare comme une recette.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Calcul des probabilités » (2bac · sciences-experimentales · mathematiques)