BURHAN

Résumé : Suites numériques

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/suites-numeriques/resume

Chapitre	Semestre
Suites numériques	Semestre 1

Suites : définition, bornes, monotonie

Définition : Suite numérique

Une **suite numérique** (u_n) associe à chaque entier naturel n (éventuellement à partir d'un rang n_0) un réel noté u_n, appelé **terme de rang** n ou **terme général** de la suite.

Une suite peut être définie :

- **explicitement**, par une formule $u_n = f(n)$ qui donne directement chaque terme à partir de son rang ;
- **par récurrence**, par son premier terme et une relation qui donne chaque terme à partir du précédent, par exemple $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition : Suite majorée, minorée, bornée

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.

- (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; le réel M est **un majorant** de la suite.
- (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que $u_n \geq m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; le réel m est **un minorant** de la suite.
- (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Définition : Suite monotone

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.

- (u_n) est **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et **strictement croissante** si $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (u_n) est **décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et **strictement décroissante** si $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (u_n) est **constante** si $u_{n+1} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Une suite croissante ou décroissante est dite **monotone**. Étudier la monotonie d'une suite revient à étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Méthode : étudier le sens de variation

1. **Forme** la différence $u_{n+1} - u_n$, puis simplifie-la : même dénominateur, factorisation.
2. **Lis son signe** pour tout entier n. Positive : la suite croît. Négative : elle décroît.
3. **Termes strictement positifs** : tu peux aussi comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ au nombre 1.
4. **Forme explicite** $u_n = f(n)$: les variations de f sur $[0; +\infty[$ donnent le sens de variation de la suite.

Exemple

Énoncé. Une boutique fictive note sa satisfaction moyenne au mois n par $u_n = 3 - \dfrac{4}{n+2}$. Étudie le sens de variation de (u_n).

Différence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{4}{n+2} - \frac{4}{n+3} \\ &= \frac{4}{(n+2)(n+3)}. \end{aligned}$$

Conclusion. Cette différence est strictement positive pour tout $n \in \mathbb{N}$: la suite est strictement croissante. Elle est aussi majorée par 3, car $\dfrac{4}{n+2} > 0$.

Méthode : prouver un encadrement par récurrence

1. **Écris** la propriété visée au rang n, notée $P(n)$, par exemple « $1 \leq u_n \leq 4$ ».
2. **Initialisation** : contrôle $P(0)$ avec la valeur de u_0.
3. **Hérédité** : fixe un entier n pour lequel $P(n)$ est vraie. Pars de cet encadrement et applique, dans l'ordre, les opérations qui fabriquent u_{n+1}.
4. **Conclusion** : $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple

Énoncé. Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montre que $1 \leq u_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. $u_0 = 1$, et $1 \leq 1 \leq 4$.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $1 \leq u_n \leq 4$. On multiplie par $0{,}5 > 0$:

$$0{,}5 \leq 0{,}5\,u_n \leq 2.$$

On ajoute 2 : $2{,}5 \leq u_{n+1} \leq 4$, donc $1 \leq u_{n+1} \leq 4$.

Conclusion. Par récurrence, $1 \leq u_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Suites arithmétiques et géométriques

Définition : Suite arithmétique

Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Le réel r est la **raison** de la suite : la différence $u_{n+1} - u_n$ de deux termes consécutifs est constante, égale à r.

Propriété : Suite arithmétique : terme général et somme

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Pour tous entiers naturels n et p : $u_n = u_p + (n-p)\,r$; en particulier $u_n = u_0 + n\,r$.
- Pour tous entiers naturels p et n tels que $p \leq n$, la somme des termes consécutifs de u_p à u_n vaut

$$\begin{aligned} &u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n \\ &\quad = \frac{(n-p+1)\,(u_p + u_n)}{2}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire le nombre de termes multiplié par la moyenne du premier et du dernier terme.

Définition : Suite géométrique

Une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un réel q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = q\,u_n.$$

Le réel q est la **raison** de la suite. Lorsque aucun terme n'est nul, le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ de deux termes consécutifs est constant, égal à q.

Propriété : Suite géométrique : terme général et somme

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

- Pour tous entiers naturels p et n tels que $p \leq n$: $u_n = u_p\,q^{\,n-p}$; en particulier $u_n = u_0\,q^n$.
- Si $q \neq 1$, pour tous entiers naturels p et n tels que $p \leq n$:

$$\begin{aligned} &u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n \\ &\quad = u_p \times \frac{1 - q^{\,n-p+1}}{1-q}. \end{aligned}$$

- Si $q = 1$, la suite est constante et cette somme vaut $(n-p+1)\,u_p$.

Méthode : reconnaître la suite, puis additionner ses termes

1. **Calcule** $u_{n+1} - u_n$. Une constante r signale une suite arithmétique. Sinon, cherche un réel q fixe tel que $u_{n+1} = q\,u_n$: la suite est géométrique.
2. **Exprime** u_n en fonction de n, en partant du premier terme connu.
3. **Compte** les termes : de u_p à u_n, il y en a $n - p + 1$.
4. **Applique** la formule de somme qui correspond, puis simplifie.

Exemple

Arithmétique. Une épargne fictive verse $u_n = 40 + 5n$ dirhams le mois n. De u_0 à u_{11}, il y a 12 termes, et $u_{11} = 95$. Le total, en dirhams, vaut :

$$\frac{12 \times (40 + 95)}{2} = 810.$$

Géométrique. Avec $v_n = 3 \times 2^n$, la raison vaut 2. De v_0 à v_7, il y a 8 termes, de somme :

$$\begin{aligned} v_0 \times \frac{1 - 2^8}{1 - 2} &= 3 \times 255 \\ &= 765. \end{aligned}$$

Attention : Compter les termes d'une somme

De u_5 à u_{20}, on compte $20 - 5 + 1 = 16$ termes, et non 15. Contrôle sur un petit cas : de u_1 à u_3, il y a bien 3 termes, u_1, u_2 et u_3.

Capital, intérêts, évolutions

Méthode : traduire une situation et chercher un seuil

1. **Nomme** la grandeur l'année n, par exemple C_n, et fixe l'année de départ $n = 0$.
2. **Traduis** le passage d'une année à la suivante. Ajouter la même somme donne une suite arithmétique : ce sont les intérêts simples. Multiplier par $1 + \dfrac{t}{100}$ donne une suite géométrique : intérêts composés ou hausse de t pour cent.
3. **Écris** le terme général, puis réponds : valeur, somme ou limite.
4. **Seuil** : cherche le plus petit n tel que $C_n \geq S$, à la calculatrice ou avec un tableau de valeurs. Contrôle ce rang et le rang précédent.

Exemple

Situation fictive. Tu places $5\,000$ dirhams au taux annuel de 3 pour cent.

Intérêts simples. Les intérêts valent 150 dirhams tous les ans : $C_n = 5\,000 + 150\,n$, suite arithmétique. Au bout de 10 ans, $C_{10} = 6\,500$ dirhams.

Intérêts composés. Le capital est multiplié par $1{,}03$ tous les ans : $K_n = 5\,000 \times 1{,}03^n$, suite géométrique. Au bout de 10 ans, $K_{10} \approx 6\,719{,}58$ dirhams.

Exemple

Situation fictive. Une ville compte $24\,000$ habitants. Sa population augmente de 2 pour cent par an : $P_n = 24\,000 \times 1{,}02^n$.

Question. À partir de quelle année dépasse-t-elle $30\,000$ habitants ?

Calculatrice. $P_{11} \approx 29\,841$ et $P_{12} \approx 30\,438$. La suite est croissante, car $1{,}02 > 1$.

Conclusion. Le seuil de $30\,000$ habitants est franchi pour la première fois en $n = 12$.

Attention **: Deux évolutions de sens contraire ne se compensent pas**

Un prix fictif de 250 dirhams augmente de 20 pour cent, puis baisse de 20 pour cent. Il passe à 300, puis à 240 dirhams, et non à 250.

En effet, $1{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}96$: c'est une baisse de 4 pour cent au total. Les évolutions successives se multiplient, elles ne s'ajoutent pas.

Limite d'une suite, suites de référence, opérations

Définition **: Limite d'une suite**

Soit (u_n) une suite et ℓ un réel.

- On dit que (u_n) **converge vers** ℓ, ou a pour limite ℓ, si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. On écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et on admet que ce réel ℓ est unique.
- On dit que (u_n) a pour limite $+\infty$ si tout intervalle $]A ; +\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang ; on définit de même la limite $-\infty$ avec les intervalles $]-\infty ; A[$.
- Une suite qui ne converge pas est dite **divergente** : soit elle a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$, soit elle n'a pas de limite.

Propriété **: Limites des suites de référence**

Pour tout entier naturel $k \geq 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} n^k = +\infty,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Propriété : Limite des puissances d'un réel q

Soit q un réel.

- Si $q > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$, alors $q^n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la limite vaut 1.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$, la suite (q^n) n'a pas de limite.

Exemple

Raison entre -1 et 1. On a $\lim_{n\to+\infty} 0{,}7^n = 0$. Donc $u_n = 5 \times 0{,}7^n + 2$ converge vers 2, par produit et somme.

Raison supérieure à 1. On a $\lim_{n\to+\infty} 1{,}4^n = +\infty$. Un capital fictif multiplié par $1{,}4$ tous les ans finit par dépasser n'importe quelle valeur fixée.

Attention : Une raison négative mérite un regard attentif

Avec $q = -1$, les termes $1, -1, 1, -1$ alternent : la suite $((-1)^n)$ n'a pas de limite. Avec $q = -0{,}5$, en revanche, la suite $((-0{,}5)^n)$ converge vers 0. Place donc q par rapport à -1 et à 1 avant de conclure.

Propriété : Opérations sur les limites de suites

Les limites d'une somme, d'un produit et d'un quotient de suites se calculent avec les mêmes règles que les limites de fonctions en $+\infty$. Soit (u_n) et (v_n) deux suites, ℓ et ℓ' deux réels ; toutes les limites sont prises quand n tend vers $+\infty$.

- Si (u_n) converge vers ℓ et (v_n) vers ℓ', alors $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$, $(u_n v_n)$ vers $\ell\,\ell'$ et, si $\ell' \neq 0$, $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ vers $\frac{\ell}{\ell'}$.
- Si (u_n) a pour limite $+\infty$ et si (v_n) converge ou a pour limite $+\infty$, alors $(u_n + v_n)$ a pour limite $+\infty$.
- Si (u_n) a pour limite $+\infty$ et si (v_n) converge vers $\ell' > 0$ ou a pour limite $+\infty$, alors $(u_n v_n)$ a pour limite $+\infty$; si $\ell' < 0$, la limite est $-\infty$.

- Si (u_n) converge et si (v_n) a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$, alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 0.
- Les règles pour $-\infty$ s'obtiennent par la règle des signes. Les cas $(+\infty)-(+\infty)$, $0\times(+\infty)$, $\frac{+\infty}{+\infty}$ et $\frac{0}{0}$ sont des **formes indéterminées** : on transforme alors l'écriture.

Méthode : calculer une limite

1. **Repère** les briques connues : suites de référence, puissances q^n, écriture $u_n = f(n)$.
2. **Combine** leurs limites par somme, produit ou quotient.
3. **Forme indéterminée** : factorise par le terme qui domine, la plus haute puissance de n, puis simplifie et recommence.
4. **Rédige** en citant chaque limite de référence et chaque opération.

Exemple

Énoncé. Cherche la limite de $u_n = \dfrac{3n^2 - 5n}{n^2 + 4}$.

Obstacle. Le numérateur et le dénominateur grandissent sans fin : on ne peut pas conclure directement.

Factorisation. Pour $n \geq 1$, on divise en haut et en bas par n^2 :

$$u_n = \frac{3 - \dfrac{5}{n}}{1 + \dfrac{4}{n^2}}.$$

Or $\frac{5}{n}$ et $\frac{4}{n^2}$ ont pour limite 0.

Conclusion. Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Suites définies par une fonction, comparaison, suites monotones

Propriété : Suite de terme général f(n)

Soit f une fonction définie sur $[0;+\infty[$ et (u_n) la suite définie par $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Si f a pour limite L en $+\infty$ (L réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$), alors (u_n) a pour limite L.
- Si f est croissante sur $[0;+\infty[$, alors (u_n) est croissante ; si f est décroissante sur $[0;+\infty[$, alors (u_n) est décroissante.

Exemple

Énoncé. Soit $u_n = \dfrac{n+3}{n+1}$, c'est-à-dire $u_n = f(n)$ avec $f : x \mapsto \dfrac{x+3}{x+1}$.

Fonction. Pour tout $x \geq 0$:

$$f'(x) = -\frac{2}{(x+1)^2} < 0.$$

Donc f est décroissante sur $[0; +\infty[$. En $+\infty$, f a pour limite 1.

Conclusion. La suite (u_n) est décroissante et converge vers 1.

Théorème : Comparaison et encadrement

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites et ℓ un réel. Les inégalités ci-dessous sont supposées vraies à partir d'un certain rang ; les limites sont prises quand n tend vers $+\infty$.

- Si $u_n \geq v_n$ et si (v_n) a pour limite $+\infty$, alors (u_n) a pour limite $+\infty$.
- Si $u_n \leq v_n$ et si (v_n) a pour limite $-\infty$, alors (u_n) a pour limite $-\infty$.
- **Encadrement** : si $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si (v_n) et (w_n) convergent toutes deux vers ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ.
- Si $|u_n - \ell| \leq v_n$ et si (v_n) converge vers 0, alors (u_n) converge vers ℓ.
- Si (u_n) et (v_n) convergent et si $u_n \leq v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Méthode : conclure par comparaison ou par encadrement

1. **Trouve** une inégalité simple, vraie à partir d'un certain rang. Un bon départ : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$.
2. **Choisis l'outil.** Pour une limite $+\infty$, minore u_n. Pour une limite $-\infty$, majore-la. Pour une limite réelle, encadre-la entre deux suites qui ont la même limite.
3. **Calcule** les limites de ces suites plus simples.
4. **Conclus** en nommant le théorème de comparaison ou d'encadrement.

Exemple

Encadrement. Pour $w_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 2 - \frac{1}{n+1} &\leq w_n \\ &\leq 2 + \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Les deux bornes convergent vers 2 : par encadrement, (w_n) converge vers 2.

Comparaison. Pour $z_n = 3n + (-1)^n$, on a $z_n \geq 3n - 1$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (3n - 1) = +\infty$. Par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = +\infty$.

Théorème : Suites monotones et convergence

- Toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Toute suite croissante et non majorée a pour limite $+\infty$; toute suite décroissante et non minorée a pour limite $-\infty$.
- Si (u_n) est croissante, majorée par M et converge vers ℓ, alors $\ell \leq M$; si (u_n) est décroissante, minorée par m et converge vers ℓ, alors $\ell \geq m$.

Attention : Monotone et bornée : une limite existe, sa valeur reste à trouver

La suite $u_n = 4 - \dfrac{3}{n+1}$ est croissante, mais elle converge vers 4. Croissante ne veut donc pas dire « de limite $+\infty$ ».

Elle est aussi majorée par 10, et pourtant 10 n'est pas sa limite. Le théorème des suites monotones garantit qu'une limite existe ; il n'en donne pas la valeur.

Suites affines et homographiques : la suite auxiliaire

Théorème : Suite auxiliaire d'une suite récurrente affine

Soit a et b deux réels avec $a \neq 1$, et (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a\,u_n + b$. On pose $\ell = \dfrac{b}{1-a}$: c'est l'unique réel tel que $\ell = a\,\ell + b$.

- La suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison a.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ell + (u_0 - \ell)\,a^n$.
- Si $-1 < a < 1$, alors (u_n) converge vers ℓ.

Méthode : suite affine et suite auxiliaire

1. **Repère** a et b, vérifie que $a \neq 1$, puis calcule $\ell = \dfrac{b}{1-a}$. Si l'énoncé impose une suite auxiliaire, garde-la.
2. **Calcule** $v_{n+1} = u_{n+1} - \ell$ en remplaçant u_{n+1} par $a\,u_n + b$, jusqu'à lire $v_{n+1} = a\,v_n$.
3. **Déduis** $v_n = v_0\,a^n$, puis $u_n = v_n + \ell$.
4. **Limite** : pour $-1 < a < 1$, la puissance a^n tend vers 0 et (u_n) converge vers ℓ.

Exemple

Situation fictive. Un journal garde tous les ans 90 pour cent de ses abonnés et en gagne 400 nouveaux. Avec $A_0 = 1\,000$: $A_{n+1} = 0{,}9\,A_n + 400$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Suite auxiliaire. $\ell = \dfrac{400}{1 - 0{,}9} = 4\,000$. Avec $v_n = A_n - 4\,000$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 0{,}9\,A_n - 3\,600 \\ &= 0{,}9\,v_n. \end{aligned}$$

Terme général. $v_0 = -3\,000$, donc $A_n = 4\,000 - 3\,000 \times 0{,}9^n$.

Limite. Comme $0 < 0{,}9 < 1$, le nombre d'abonnés converge vers $4\,000$.

Attention : Retrancher la limite, pas la constante ajoutée

Pour $A_{n+1} = 0{,}9\,A_n + 400$, la suite $A_n - 400$ n'est pas géométrique. On retranche $\ell = 4\,000$, le réel qui vérifie $\ell = 0{,}9\,\ell + 400$.

Et si $a = 1$, la suite est arithmétique de raison b : aucune suite auxiliaire n'est utile.

Méthode : suite homographique avec une suite auxiliaire donnée

1. **Vérifie** que la suite existe : par récurrence, montre que le dénominateur ne s'annule jamais, par exemple avec $u_n > 1$.
2. **Calcule** v_{n+1} avec la formule donnée par l'énoncé : remplace u_{n+1}, puis réduis au même dénominateur.
3. **Reconnais** une relation $v_{n+1} = q\,v_n$ ou $v_{n+1} = v_n + r$.
4. **Reviens** à u_n : exprime u_n en fonction de v_n, puis conclus sur la limite.

Exemple

Énoncé. $u_0 = 3$, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$, et la suite auxiliaire donnée $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$.

Existence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - 1 = \frac{3(u_n - 1)}{u_n + 1}.$$

Avec $u_0 = 3$, une récurrence donne $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Calcul. De même :

$$u_{n+1} - 2 = \frac{2(u_n - 2)}{u_n + 1}.$$

Le quotient de ces deux égalités donne $v_{n+1} = \dfrac{2}{3}\,v_n$.

Retour. $v_0 = \dfrac{1}{2}$, donc $v_n = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Enfin $u_n = \dfrac{2 - v_n}{1 - v_n}$, qui converge vers 2.

Suites récurrentes et point fixe

Théorème : Limite de (f(uₙ)) par continuité

Soit (u_n) une suite qui converge vers un réel ℓ, et f une fonction définie sur un intervalle I qui contient ℓ et tous les termes u_n. Si f est continue en ℓ, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Théorème : Suite récurrente : limite et point fixe

Soit f une fonction continue sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$, et (u_n) la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
- Si (u_n) converge vers un réel ℓ qui appartient à I, alors $f(\ell) = \ell$: la limite est une solution, dans I, de l'équation $f(x) = x$.

Méthode : étudier une suite récurrente jusqu'à sa limite

1. **Intervalle stable** : avec les variations de f, trouve I tel que $f(I) \subset I$. Une récurrence donne alors $u_n \in I$ pour tout n.
2. **Sens de variation** : étudie le signe de $f(u_n) - u_n$ sur I. Si f est croissante sur I, compare plutôt u_0 et u_1, puis raisonne par récurrence.
3. **Convergence** : croissante et majorée, ou décroissante et minorée.
4. **Valeur** : si $I = [\alpha ; \beta]$, l'encadrement $\alpha \leq u_n \leq \beta$ passe à la limite : $\alpha \leq \ell \leq \beta$, donc $\ell \in I$. Comme f est continue sur I, on a $f(\ell) = \ell$. Garde la solution qui appartient à I.

Exemple

Énoncé. $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$, soit $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto \sqrt{x + 6}$.

Stabilité. f est croissante sur $I = [0 ; 3]$, avec $f(0) = \sqrt{6}$ et $f(3) = 3$. Donc $f(I) \subset I$, et $u_n \in [0 ; 3]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Sens de variation. $u_1 = \sqrt{6} > u_0$ et f est croissante : par récurrence, (u_n) est croissante.

Convergence. Croissante et majorée par 3, elle converge vers un réel ℓ, et $\ell \leq 3$. De plus $u_n \geq u_0 = 0$ pour tout n, donc $\ell \geq 0$: $\ell \in [0 ; 3]$.

Limite. Comme f est continue sur $[0 ; 3]$, on a $f(\ell) = \ell$, soit $\sqrt{\ell + 6} = \ell$. Alors $\ell^2 - \ell - 6 = 0$, de solutions 3 et -2. Seule 3 appartient à $[0 ; 3]$: $\ell = 3$.

Attention : Résoudre f(x) = x ne prouve pas la convergence

Prends $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n^2$. L'équation $x^2 = x$ a pour solutions 0 et 1.

Pourtant $u_1 = 9$ et $u_2 = 81$: la suite a pour limite $+\infty$. L'équation ne sert qu'après la preuve de la convergence.

Quelle méthode pour quelle question ?

Méthode : Quelle méthode pour quelle question ?

- **Sens de variation** : signe de $u_{n+1} - u_n$, quotient comparé à 1, ou variations de f si $u_n = f(n)$.
- **Encadrement, appartenance à un intervalle** : récurrence.
- **Somme de termes** : nature de la suite, nombre de termes, formule.
- **Situation économique** : coefficient multiplicateur, terme général, seuil à la calculatrice.
- **Limite** : références, puissances q^n, opérations, factorisation, comparaison ou encadrement.
- **Convergence sans valeur** : suite monotone et bornée.
- **Suite affine** : suite auxiliaire $u_n - \ell$, géométrique de raison a.
- **Suite homographique** : suite auxiliaire donnée, géométrique ou arithmétique.
- **Suite récurrente** $u_{n+1} = f(u_n)$: intervalle stable, monotonie, convergence, puis $f(\ell) = \ell$.

Terme général arithmétique

$$u_n = u_0 + n\,r$$

Somme arithmétique de u(p) à u(n)

$$\frac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2}$$

Terme général géométrique

$$u_n = u_0\,q^n$$

Somme géométrique, q différent de 1

$$u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q}$$

Hausse de t pour cent

$$C_{n+1} = \left(1 + \frac{t}{100}\right) C_n$$

Puissances, q strictement entre -1 et 1

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$$

Suite affine, a différent de 1

$$u_n = \ell + (u_0 - \ell)\,a^n$$

Réel fixe de la suite affine

$$\ell = \frac{b}{1-a}$$

À retenir : Rédiger à l'examen

> Annonce chaque récurrence : initialisation, hérédité, conclusion. Pour une limite, cite la limite de référence ou l'opération utilisée. Avant de passer à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, nomme la continuité de f et l'intervalle stable. Termine chaque question par une phrase qui répond.