BURHAN

Suites numériques : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/suites-numeriques/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques	Niveau examen	5

Exercice 1 — 3 pts

La population d'une ville nouvelle

Une ville nouvelle fictive compte $30\,000$ habitants l'année 0. Tous les ans, 5 pour cent des habitants partent et $2\,000$ personnes s'installent. On note P_n le nombre d'habitants l'année n : $P_0 = 30\,000$ et $P_{n+1} = 0{,}95\,P_n + 2\,000$. On pose $v_n = P_n - 40\,000$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. — 0,5 pts

Montrer que $P_1 = 30\,500$.

INDICE

Outil : la relation de récurrence avec $n = 0$.

2. — 1 pts

Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $0{,}95$ et préciser v_0.

INDICE

Début : exprime v_{n+1} en fonction de P_n. **Ensuite :** factorise par $0{,}95$.

3. — 0,75 pts

Montrer que $P_n = 40\,000 - 10\,000 \times 0{,}95^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Outil : le terme général d'une suite géométrique, puis $P_n = v_n + 40\,000$.

4. — 0,75 pts

Montrer que (P_n) converge vers $40\,000$ et interpréter ce résultat.

INDICE

Outil : la limite de (q^n) pour $-1 < q < 1$.

Exercice 2 — 4 pts

Une suite homographique étudiée par une suite auxiliaire géométrique

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 2}$.

1. — 1 pts

Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Outil : si $u_n > 0$, le numérateur et le dénominateur de u_{n+1} sont strictement positifs.

2. — 1,25 pts

On pose $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et que $v_0 = -\dfrac{1}{2}$.

INDICE

Début : calcule séparément $u_{n+1} - 2$ et $u_{n+1} + 1$ au dénominateur $u_n + 2$.

3. — 1 pts

Montrer que $u_n = \dfrac{2 + v_n}{1 - v_n}$, puis que $u_n = \dfrac{2 - \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{1 + \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Début : de $v_n\,(u_n + 1) = u_n - 2$, isole u_n. **Point délicat :** $v_n \neq 1$, car $v_n < 0$.

4. — 0,75 pts

Montrer que (u_n) converge vers 2.

INDICE

Outil : la limite de $\left(\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right)$, puis la limite d'un quotient.

Exercice 3 4 pts

Une suite récurrente définie par une racine carrée

Soit f la fonction définie sur $[0;5]$ par $f(x)=\sqrt{3x+10}$, et (u_n) la suite définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. 1 pts

Montrer que f est croissante sur $[0;5]$ et que $f(x)\in[0;5]$ pour tout x de $[0;5]$.

INDICE

Outil : $f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x+10}}$. **Ensuite :** calcule $f(0)$ et $f(5)$.

2. 1 pts

Montrer par récurrence que $0\leq u_n\leq 5$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

INDICE

Outil : l'hérédité découle de la question 1.

3. 1 pts

Montrer que $u_1\geq u_0$, puis montrer par récurrence que $u_n\leq u_{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. En déduire le sens de variation de (u_n).

INDICE

Début : calcule u_1. **Ensuite :** pour l'hérédité, applique à $u_n\leq u_{n+1}$ la fonction f, croissante sur $[0;5]$ d'après la question 1.

4. 1 pts

Montrer que (u_n) converge et que sa limite vaut 5.

INDICE

Outil : une suite croissante et majorée converge. **Point délicat :** élevée au carré, l'égalité $f(\ell)=\ell$ donne $\ell^2-3\ell-10=0$, qui a deux solutions réelles ; garde celle de $[0;5]$.

Exercice 4 3 pts

Deux placements comparés

Une famille fictive hésite entre deux placements d'un capital de $12\,000$ dirhams.

- Placement A : intérêts composés au taux annuel de 4 pour cent. On note C_n le capital au bout de n années.
- Placement B : intérêts simples au taux annuel de 5 pour cent. On note D_n le capital au bout de n années.

1. 0,75 pts

Montrer que (C_n) est géométrique de raison $1{,}04$ et que $C_n = 12\,000 \times 1{,}04^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Outil : une hausse de 4 pour cent revient à multiplier par $1{,}04$.

2. 0,75 pts

Montrer que $D_n = 12\,000 + 600\,n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Outil : avec des intérêts simples, l'intérêt de l'année est calculé sur le capital de départ.

3. 1,5 pts

Montrer, à l'aide de la calculatrice, que $C_{11} < D_{11}$ et que $C_{12} > D_{12}$. Interpréter.

INDICE

Début : calcule les quatre valeurs, arrondies au centime. **Point délicat :** l'écart au rang 12 est faible ; garde deux décimales.

Exercice 5 3 pts

Une suite définie par une fonction, puis encadrée

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{5x+2}{x+3}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=f(n)$ et $w_n=u_n+\dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

1. 1 pts

Montrer que $f'(x)=\dfrac{13}{(x+3)^2}$ pour tout $x\geq 0$, puis que la suite (u_n) est croissante.

INDICE

Outil : la dérivée d'un quotient $\dfrac{u}{v}$ est $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

2. 0,75 pts

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=5$.

INDICE

Début : pour $n\geq 1$, divise le numérateur et le dénominateur par n.

3. 1,25 pts

Montrer que $u_n-\dfrac{1}{n+1}\leq w_n\leq u_n+\dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, puis que (w_n) converge vers 5.

INDICE

Début : pars de $-1\leq(-1)^n\leq 1$ et divise par $n+1>0$. **Ensuite :** le théorème d'encadrement.