BURHAN

Suites numériques : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/suites-numeriques/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques	Niveau examen	5

Exercice 1 3 pts

La population d'une ville nouvelle

Une ville nouvelle fictive compte $30\,000$ habitants l'année 0. Tous les ans, 5 pour cent des habitants partent et $2\,000$ personnes s'installent. On note P_n le nombre d'habitants l'année n : $P_0 = 30\,000$ et $P_{n+1} = 0{,}95\,P_n + 2\,000$. On pose $v_n = P_n - 40\,000$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. 0,5 pts

Montrer que $P_1 = 30\,500$.

INDICE

Outil : la relation de récurrence avec $n = 0$.

CORRIGÉ

On applique la relation de récurrence avec $n = 0$:

$$\begin{aligned} P_1 &= 0{,}95 \times 30\,000 \\ &\quad + 2\,000 \\ &= 28\,500 + 2\,000 \\ &= 30\,500. \end{aligned}$$

Conclusion. $P_1 = 30\,500$.

2. 1 pts

Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $0{,}95$ et préciser v_0.

INDICE

Début : exprime v_{n+1} en fonction de P_n. **Ensuite :** factorise par $0{,}95$.

CORRIGÉ

Relation. Soit $n \in \mathbb{N}$. On remplace P_{n+1}, puis on factorise par $0{,}95$, en utilisant $0{,}95 \times 40\,000 = 38\,000$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= P_{n+1} - 40\,000 \\ &= 0{,}95\,P_n + 2\,000 \\ &\quad - 40\,000 \\ &= 0{,}95\,P_n - 38\,000 \\ &= 0{,}95\,(P_n - 40\,000) \\ &= 0{,}95\,v_n. \end{aligned}$$

Premier terme. $v_0 = 30\,000 - 40\,000 = -10\,000$.

Conclusion. La suite (v_n) est géométrique de raison $0{,}95$, de premier terme $v_0 = -10\,000$.

3. `0,75 pts`

Montrer que $P_n = 40\,000 - 10\,000 \times 0{,}95^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Outil : le terme général d'une suite géométrique, puis $P_n = v_n + 40\,000$.

CORRIGÉ

Terme général de (v_n). D'après la question 2, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_n &= v_0 \times 0{,}95^n \\ &= -10\,000 \times 0{,}95^n. \end{aligned}$$

Retour à (P_n). De $v_n = P_n - 40\,000$, on tire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} P_n &= v_n + 40\,000 \\ &= 40\,000 - 10\,000 \times 0{,}95^n. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = 40\,000 - 10\,000 \times 0{,}95^n$.

4. `0,75 pts`

Montrer que (P_n) converge vers $40\,000$ et interpréter ce résultat.

INDICE

Outil : la limite de (q^n) pour $-1 < q < 1$.

CORRIGÉ

Limite de la puissance. Comme $-1 < 0{,}95 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}95^n = 0$.

Limite de (P_n). Par produit, la suite $(10\,000 \times 0{,}95^n)$ a pour limite 0. Par différence :

$$\lim_{n \to +\infty} P_n = 40\,000.$$

Conclusion. La suite (P_n) converge vers $40\,000$: à long terme, la population de la ville se rapproche de $40\,000$ habitants.

Exercice 2 — 4 pts

Une suite homographique étudiée par une suite auxiliaire géométrique

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 2}$.

1. — 1 pts

Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Outil : si $u_n > 0$, le numérateur et le dénominateur de u_{n+1} sont strictement positifs.

CORRIGÉ

Initialisation. $u_0 = 1 > 0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$. Alors $3u_n + 2 > 0$ et $u_n + 2 > 0$. Quotient de deux nombres strictement positifs, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 2}$ est strictement positif.

Conclusion. Par récurrence, $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, $u_n + 2 \neq 0$ et $u_n + 1 \neq 0$.

2. — 1,25 pts

On pose $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et que $v_0 = -\dfrac{1}{2}$.

INDICE

Début : calcule séparément $u_{n+1} - 2$ et $u_{n+1} + 1$ au dénominateur $u_n + 2$.

CORRIGÉ

Calcul de $u_{n+1} - 2$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On réduit au dénominateur $u_n + 2$, non nul d'après la question 1 :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 2 &= \frac{3u_n + 2 - 2u_n - 4}{u_n + 2} \\ &= \frac{u_n - 2}{u_n + 2}. \end{aligned}$$

Calcul de $u_{n+1} + 1$. De même :

$$\begin{aligned} u_{n+1} + 1 &= \frac{3u_n + 2 + u_n + 2}{u_n + 2} \\ &= \frac{4(u_n + 1)}{u_n + 2}. \end{aligned}$$

Quotient. On divise le premier résultat par le second, non nul ; le facteur $u_n + 2$ se simplifie :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_n - 2}{4(u_n + 1)} \\ &= \frac{1}{4}\, v_n. \end{aligned}$$

Premier terme. $v_0 = \dfrac{1 - 2}{1 + 1} = -\dfrac{1}{2}$.

Conclusion. La suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$, et $v_0 = -\dfrac{1}{2}$.

3. 1 pts

Montrer que $u_n = \dfrac{2+v_n}{1-v_n}$, puis que $u_n = \dfrac{2-\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{1+\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Début : de $v_n\,(u_n+1) = u_n - 2$, isole u_n. **Point délicat :** $v_n \neq 1$, car $v_n < 0$.

CORRIGÉ

Expression de u_n. Soit $n \in \mathbb{N}$. On multiplie l'égalité $v_n = \dfrac{u_n-2}{u_n+1}$ par u_n+1, non nul :

$$v_n\,u_n + v_n = u_n - 2.$$

On regroupe les termes en u_n :

$$u_n\,(1-v_n) = 2 + v_n.$$

D'après la question 2, $v_n = -\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$, donc $v_n < 0$ et $1 - v_n > 0$. On peut diviser par $1-v_n$:

$$u_n = \frac{2+v_n}{1-v_n}.$$

Remplacement. On remplace v_n par son expression :

$$u_n = \frac{2-\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{1+\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}.$$

Conclusion. Les deux égalités demandées sont vraies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. 0,75 pts

Montrer que (u_n) converge vers 2.

INDICE

Outil : la limite de $\left(\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right)$, puis la limite d'un quotient.

CORRIGÉ

Limite de (v_n). Comme $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$. Par produit, la suite (v_n) converge vers 0.

Limite de (u_n). Le numérateur $2+v_n$ tend vers 2 et le dénominateur $1-v_n$ vers 1, qui est non nul. Par quotient :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2+0}{1-0} = 2.$$

Conclusion. La suite (u_n) converge vers 2.

Exercice 3 4 pts

Une suite récurrente définie par une racine carrée

Soit f la fonction définie sur $[0;5]$ par $f(x)=\sqrt{3x+10}$, et (u_n) la suite définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. 1 pts

Montrer que f est croissante sur $[0;5]$ et que $f(x)\in[0;5]$ pour tout x de $[0;5]$.

INDICE

Outil : $f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x+10}}$. **Ensuite :** calcule $f(0)$ et $f(5)$.

CORRIGÉ

Variations. Pour tout $x\in[0;5]$, $3x+10>0$. La dérivée de $\sqrt{u}$ est $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$; ici $u(x)=3x+10$ et $u'(x)=3$. Pour tout $x\in[0;5]$:

$$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+10}}>0.$$

La fonction f est donc croissante sur $[0;5]$.

Valeurs aux bornes. $f(0)=\sqrt{10}$ et $f(5)=\sqrt{25}=5$.

Stabilité. Pour $0\le x\le 5$, la croissance de f donne $f(0)\le f(x)\le f(5)$, c'est-à-dire $\sqrt{10}\le f(x)\le 5$. Comme $\sqrt{10}\ge 0$, on a $0\le f(x)\le 5$.

Conclusion. La fonction f est croissante sur $[0;5]$ et, pour tout $x\in[0;5]$, $f(x)\in[0;5]$.

2. 1 pts

Montrer par récurrence que $0\le u_n\le 5$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

INDICE

Outil : l'hérédité découle de la question 1.

CORRIGÉ

Initialisation. $u_0=0$ et $0\le 0\le 5$.

Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $0\le u_n\le 5$. D'après la question 1, $u_{n+1}=f(u_n)\in[0;5]$, c'est-à-dire $0\le u_{n+1}\le 5$.

Conclusion. Par récurrence, $0\le u_n\le 5$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

3. 1 pts

Montrer que $u_1 \geq u_0$, puis montrer par récurrence que $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire le sens de variation de (u_n).

INDICE

Début : calcule u_1. **Ensuite :** pour l'hérédité, applique à $u_n \leq u_{n+1}$ la fonction f, croissante sur $[0;5]$ d'après la question 1.

CORRIGÉ

Initialisation. $u_1 = f(0) = \sqrt{10}$ et $\sqrt{10} \geq 0 = u_0$: l'inégalité $u_n \leq u_{n+1}$ est vraie pour $n = 0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq u_{n+1}$. D'après la question 2, ces deux termes sont dans $[0;5]$, où f est croissante d'après la question 1. Donc $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, soit $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

Conclusion. Par récurrence, $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: la suite (u_n) est croissante.

4. 1 pts

Montrer que (u_n) converge et que sa limite vaut 5.

INDICE

Outil : une suite croissante et majorée converge. **Point délicat :** élevée au carré, l'égalité $f(\ell) = \ell$ donne $\ell^2 - 3\ell - 10 = 0$, qui a deux solutions réelles ; garde celle de $[0; 5]$.

CORRIGÉ

Convergence. La suite (u_n) est croissante (question 3) et majorée par 5 (question 2). Le théorème des suites monotones s'applique : (u_n) a une limite finie, notée ℓ. On obtient $\ell \leq 5$ par passage à la limite dans $u_n \leq 5$.

Encadrement de la limite. La suite étant croissante, $u_n \geq u_0 = 0$ pour tout n. Par passage à la limite dans cette inégalité, $\ell \geq 0$. Ainsi $\ell \in [0; 5]$.

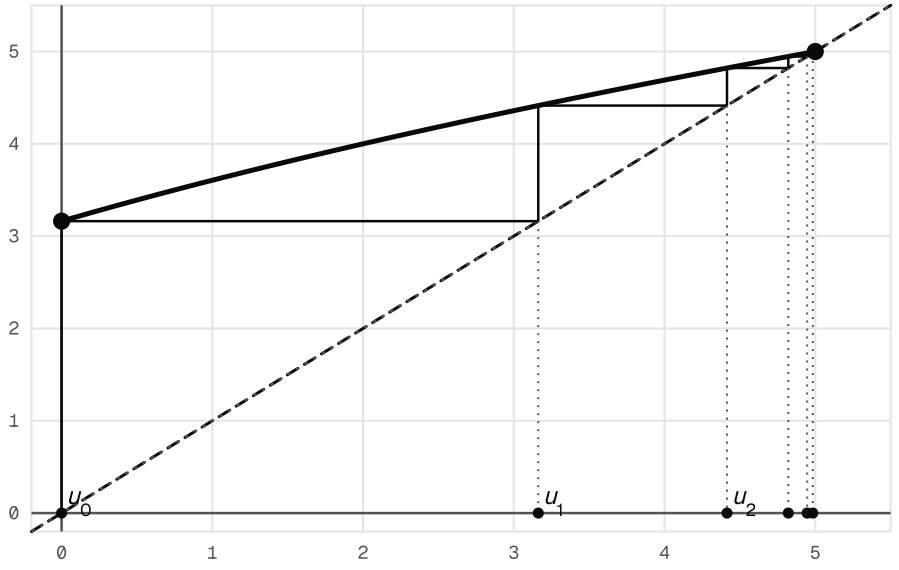
Équation de la limite. La fonction f est continue sur $[0; 5]$, qui contient ℓ et tous les termes. La suite (u_{n+1}), égale à $(f(u_n))$, converge donc vers $f(\ell)$ et vers ℓ : $f(\ell) = \ell$, soit $\sqrt{3\ell + 10} = \ell$. En élevant au carré, $3\ell + 10 = \ell^2$, soit $\ell^2 - 3\ell - 10 = 0$.

Résolution. On factorise :

$$(\ell - 5)(\ell + 2) = 0.$$

Les solutions sont 5 et -2. Comme $\ell \geq 0$, on obtient $\ell = 5$.

Conclusion. La suite (u_n) converge, et sa limite vaut 5.



Avec f(x) = √(3x + 10) et u_0 = 0, l'escalier construit entre la courbe de f et la droite d'équation y = x monte vers le point d'abscisse 5, où les deux tracés se rencontrent : la limite vaut 5.

Exercice 4 3 pts

Deux placements comparés

Une famille fictive hésite entre deux placements d'un capital de $12\,000$ dirhams.

- Placement A : intérêts composés au taux annuel de 4 pour cent. On note C_n le capital au bout de n années.
- Placement B : intérêts simples au taux annuel de 5 pour cent. On note D_n le capital au bout de n années.

1. 0,75 pts

Montrer que (C_n) est géométrique de raison $1{,}04$ et que $C_n = 12\,000 \times 1{,}04^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Outil : une hausse de 4 pour cent revient à multiplier par $1{,}04$.

CORRIGÉ

Relation. Tous les ans, le capital A augmente de 4 pour cent. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= C_n + 0{,}04\, C_n \\ &= 1{,}04\, C_n. \end{aligned}$$

Conclusion. La suite (C_n) est géométrique de raison $1{,}04$, de premier terme $C_0 = 12\,000$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = 12\,000 \times 1{,}04^n$.

2. 0,75 pts

Montrer que $D_n = 12\,000 + 600\, n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Outil : avec des intérêts simples, l'intérêt de l'année est calculé sur le capital de départ.

CORRIGÉ

Intérêt annuel. Avec des intérêts simples, l'intérêt annuel est toujours calculé sur le capital de départ :

$$\frac{5}{100} \times 12\,000 = 600.$$

Relation. Le capital B gagne donc 600 dirhams tous les ans : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_{n+1} = D_n + 600$. La suite (D_n) est arithmétique de raison 600, de premier terme $D_0 = 12\,000$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_n = 12\,000 + 600\, n$.

3. 1,5 pts

Montrer, à l'aide de la calculatrice, que $C_{11} < D_{11}$ et que $C_{12} > D_{12}$. Interpréter.

INDICE

Début : calcule les quatre valeurs, arrondies au centime. **Point délicat :** l'écart au rang 12 est faible ; garde deux décimales.

CORRIGÉ

Rang 11. La calculatrice donne :

$$\begin{aligned} C_{11} &= 12\,000 \times 1{,}04^{11} \\ &\approx 18\,473{,}45. \end{aligned}$$

De plus, $D_{11} = 18\,600$, car $600 \times 11 = 6\,600$. Donc $C_{11} < D_{11}$.

Rang 12. De même :

$$\begin{aligned} C_{12} &= 12\,000 \times 1{,}04^{12} \\ &\approx 19\,212{,}39. \end{aligned}$$

De plus, $D_{12} = 19\,200$, car $600 \times 12 = 7\,200$. Donc $C_{12} > D_{12}$.

Conclusion. $C_{11} < D_{11}$ et $C_{12} > D_{12}$: au bout de 11 ans, le placement B rapporte davantage ; au bout de 12 ans, le placement A le dépasse.

Exercice 5 3 pts

Une suite définie par une fonction, puis encadrée

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{5x+2}{x+3}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=f(n)$ et $w_n=u_n+\dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

1. 1 pts

Montrer que $f'(x)=\dfrac{13}{(x+3)^2}$ pour tout $x\geq 0$, puis que la suite (u_n) est croissante.

INDICE

Outil : la dérivée d'un quotient $\dfrac{u}{v}$ est $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

CORRIGÉ

Dérivée. La fonction f est un quotient de fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$, dont le dénominateur $x+3$ ne s'annule pas. Pour tout $x\geq 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{5(x+3)-(5x+2)}{(x+3)^2} \\ &= \frac{13}{(x+3)^2} > 0. \end{aligned}$$

Variations de f. La dérivée est strictement positive : f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Conclusion. Soit $n\in\mathbb{N}$. Comme $0\leq n<n+1$, on a $f(n)<f(n+1)$, soit $u_n<u_{n+1}$. La suite (u_n) est croissante.

2. 0,75 pts

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=5$.

INDICE

Début : pour $n\geq 1$, divise le numérateur et le dénominateur par n.

CORRIGÉ

Factorisation. Soit $n\geq 1$. On divise le numérateur et le dénominateur par n :

$$u_n=\frac{5+\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{3}{n}}.$$

Limites. Les suites $\left(\dfrac{2}{n}\right)$ et $\left(\dfrac{3}{n}\right)$ ont pour limite 0 : le numérateur tend vers 5 et le dénominateur vers 1, qui est non nul.

Conclusion. Par quotient :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\frac{5}{1}=5.$$

3. 1,25 pts

Montrer que $u_n - \dfrac{1}{n+1} \leq w_n \leq u_n + \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que (w_n) converge vers 5.

INDICE

Début : pars de $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ et divise par $n+1 > 0$. **Ensuite :** le théorème d'encadrement.

CORRIGÉ

Encadrement. Soit $n \in \mathbb{N}$. On part de $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ et on divise par $n+1$, qui est strictement positif :

$$-\frac{1}{n+1} \leq \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

On ajoute u_n à chaque membre :

$$\begin{aligned} u_n - \frac{1}{n+1} &\leq w_n \\ &\leq u_n + \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Limites des bornes. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ et, d'après la question 2, (u_n) converge vers 5. Par somme, les deux bornes convergent vers 5.

Conclusion. L'encadrement est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après le théorème d'encadrement, (w_n) converge vers 5.