BURHAN

Suites numériques : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/suites-numeriques/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques	Entraînement	7

Exercice 1

Récurrence, sens de variation, convergence

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \dfrac{u_n^2}{4}$.

1.

Calculer u_1 et u_2.

INDICE

Outil : applique la relation de récurrence deux fois de suite.

2.

Montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Début : écris $u_{n+1} = u_n \left(1 - \dfrac{u_n}{4}\right)$. **Point délicat :** pour majorer, compare u_{n+1} à u_n.

3.

Étudier le sens de variation de (u_n).

INDICE

Outil : le signe de $u_{n+1} - u_n$.

4.

Justifier que (u_n) converge vers un réel ℓ et que $\ell \geq 0$.

INDICE

Outil : le théorème des suites monotones. **Ensuite :** un minorant reste un minorant de la limite.

Exercice 2

Une suite affine qui oscille autour de sa limite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -0{,}5\,u_n + 6$.

1.

Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle monotone ?

INDICE

Outil : applique la relation deux fois, puis compare les termes obtenus.

2.

Déterminer le réel ℓ tel que $\ell = -0{,}5\,\ell + 6$. On pose $v_n = u_n - \ell$; montrer que (v_n) est géométrique.

INDICE

Début : $1{,}5\,\ell = 6$. **Ensuite :** exprime v_{n+1} en fonction de u_n, puis de v_n.

3.

Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n. En déduire la limite de (u_n).

INDICE

Outil : le terme général d'une suite géométrique. **Point délicat :** la raison est négative ; place-la par rapport à -1 et 1.

Exercice 3

Une suite homographique et sa suite auxiliaire

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{4}{4 - u_n}$.

1.

Montrer par récurrence que $0 \leq u_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que (u_n) est bien définie.

INDICE

Début : encadre d'abord $4 - u_n$. **Point délicat :** passer à l'inverse de nombres strictement positifs change le sens.

2.

On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$. Montrer que $v_{n+1} = v_n - \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Début : calcule $u_{n+1} - 2$ au même dénominateur. **Ensuite :** écris $4 - u_n = 2 - (u_n - 2)$.

3.

Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n. En déduire la limite de (u_n).

INDICE

Outil : le terme général d'une suite arithmétique. **Ensuite :** de $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$, tire $u_n = 2 + \dfrac{1}{v_n}$.

Exercice 4

Les adhérents d'un club de sport

Un club de sport fictif compte 800 adhérents l'année 0. D'une année à l'autre, 75 pour cent des adhérents restent inscrits et 350 nouveaux adhérents arrivent. On note u_n le nombre d'adhérents l'année n : ainsi $u_0 = 800$ et $u_{n+1} = 0{,}75\,u_n + 350$.

1.

Calculer u_1. On pose $v_n = u_n - 1\,400$; montrer que (v_n) est géométrique de raison $0{,}75$.

INDICE

Outil : exprime v_{n+1} en fonction de u_n, puis factorise par $0{,}75$.

2.

Exprimer u_n en fonction de n. Déterminer la limite de (u_n) et l'interpréter.

INDICE

Début : calcule v_0. **Ensuite :** compare la raison $0{,}75$ à 1.

3.

À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quelle année le club dépasse $1\,300$ adhérents.

INDICE

Début : justifie que la suite est croissante. **Point délicat :** contrôle le rang trouvé et le rang précédent.

Exercice 5

Les dons d'une fondation

Une fondation fictive reçoit un premier don de $1\,000$ dirhams. Chaque don suivant vaut 60 pour cent du précédent. On note d_k le don numéro k, avec $d_0 = 1\,000$, et $T_n = d_0 + d_1 + \cdots + d_n$ le total reçu.

1.

Exprimer d_k en fonction de k et calculer d_3.

INDICE

Outil : passer d'un don au suivant revient à multiplier par $0{,}6$.

2.

Montrer que $T_n = 2\,500\left(1 - 0{,}6^{\,n+1}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Début : compte les termes de d_0 à d_n. **Point délicat :** l'exposant de la formule est $n+1$.

3.

Déterminer la limite de (T_n). Le total des dons peut-il dépasser $2\,500$ dirhams ?

INDICE

Outil : la limite de $\left(0{,}6^{\,n+1}\right)$, puis les opérations.

Exercice 6

Une suite récurrente et son point fixe

Soit f la fonction définie sur $[0;3]$ par $f(x)=\dfrac{x^2+12}{7}$, et (u_n) la suite définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1.

Étudier les variations de f sur $[0;3]$. Montrer que $f(x)$ appartient à $[0;3]$ pour tout x de $[0;3]$.

INDICE

Outil : le signe de $f'(x)=\dfrac{2x}{7}$. **Ensuite :** calcule $f(0)$ et $f(3)$.

2.

Montrer par récurrence que $0\leq u_n\leq 3$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, puis que (u_n) est croissante.

INDICE

Début : utilise la question 1 pour l'hérédité. **Ensuite :** factorise $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n^2-7u_n+12}{7}$.

3.

En déduire que (u_n) converge, puis déterminer sa limite.

INDICE

Outil : une suite croissante et majorée converge. **Point délicat :** l'équation $x^2-7x+12=0$, issue de $f(x)=x$, a deux solutions ; garde celle de $[0;3]$.

Exercice 7

Limites infinies par comparaison

1.

On pose $u_n=n^2+3n\times(-1)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $u_n\geq n(n-3)$, puis déterminer la limite de (u_n).

INDICE

Début : $3n\times(-1)^n\geq -3n$, car $n\geq 0$. **Ensuite :** le théorème de comparaison.

2.

On pose $v_n=\sqrt{n}+(-1)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Déterminer la limite de (v_n).

INDICE

Outil : minore v_n par une suite de limite $+\infty$.

3.

On pose $w_n=-2n+5\times(-1)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Déterminer la limite de (w_n).

INDICE

Point délicat : pour une limite $-\infty$, il faut majorer, et non minorer.