BURHAN

Suites numériques : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/suites-numeriques/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques	Application	8

Exercice 1

Les abonnés d'une application

Une application fictive compte u_n milliers d'abonnés le mois n, avec $u_n = \dfrac{5n+1}{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.

Calculer u_0, u_1 et u_2.

INDICE

Outil : remplace n par sa valeur dans la formule.

2.

Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{9}{(n+2)(n+3)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire le sens de variation de (u_n).

INDICE

Début : $u_{n+1} = \dfrac{5n+6}{n+3}$; réduis la différence au dénominateur commun $(n+2)(n+3)$.

3.

Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 - \dfrac{9}{n+2}$. En déduire que $\dfrac{1}{2} \leq u_n < 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Outil : réduis $5 - \dfrac{9}{n+2}$ au même dénominateur. **Ensuite :** utilise la question 2 pour le minorant.

4.

On définit maintenant la suite (w_n) par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = 0{,}5\, w_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer w_1 et w_2, puis montrer par récurrence que $1 \leq w_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Outil : chaque terme se calcule à partir du précédent. **Ensuite :** pour l'hérédité, multiplie l'encadrement par $0{,}5$, puis ajoute 2.

Exercice 2

Une épargne qui progresse tous les mois

Youssef épargne pour un projet fictif. Le premier mois, il met de côté 200 dirhams. Ensuite, il met de côté 15 dirhams de plus que le mois précédent. On note u_n la somme mise de côté le mois numéro n, avec $u_1 = 200$.

1.

Justifier que (u_n) est arithmétique et préciser sa raison. Exprimer u_n en fonction de n.

INDICE

Outil : une suite est arithmétique quand on ajoute toujours le même nombre. **Point délicat :** le premier terme est u_1, pas u_0.

2.

Calculer la somme mise de côté le vingt-quatrième mois.

INDICE

Outil : la formule de la question 1 avec $n = 24$.

3.

Calculer le total épargné pendant les vingt-quatre premiers mois.

INDICE

Début : de u_1 à u_{24}, compte les termes. **Ensuite :** multiplie leur nombre par la moyenne du premier et du dernier terme.

Exercice 3

Une chaîne de parrainage dans un club de lecture

Un club de lecture fictif lance une chaîne de parrainage. La première semaine, 5 personnes s'inscrivent. Ensuite, le nombre d'inscrits de la semaine double d'une semaine à la suivante. On note v_n le nombre d'inscrits pendant la semaine numéro n, avec $v_0 = 5$.

1.

Préciser la nature de (v_n) et exprimer v_n en fonction de n.

INDICE

Outil : une suite est géométrique quand on multiplie toujours par le même nombre.

2.

Combien de personnes s'inscrivent pendant la dixième semaine, c'est-à-dire la semaine numéro 9 ?

INDICE

Outil : la formule de la question 1 avec $n = 9$.

3.

Calculer le nombre total d'inscrits pendant les dix premières semaines.

INDICE

Début : les termes vont de v_0 à v_9. **Point délicat :** l'exposant de la formule est le nombre de termes, ici 10.

Exercice 4

Combien d'années pour doubler un capital ?

Leila place un capital fictif de $8\,000$ dirhams à intérêts composés, au taux annuel de 5 pour cent. On note C_n le capital, en dirhams, au bout de n années ; ainsi $C_0 = 8\,000$.

1.

Justifier que $C_{n+1} = 1{,}05\,C_n$, puis exprimer C_n en fonction de n.

INDICE

Outil : une hausse de 5 pour cent revient à multiplier par $1 + \dfrac{5}{100}$.

2.

Calculer le capital au bout de 5 années, arrondi au centime.

INDICE

Outil : la calculatrice, avec la formule de la question 1.

3.

À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal d'années pour que le capital atteigne au moins $16\,000$ dirhams.

INDICE

Début : fais un tableau de valeurs de C_n. **Point délicat :** contrôle le rang trouvé et le rang précédent.

4.

Avec des intérêts simples au même taux, le capital gagnerait 400 dirhams tous les ans. Combien d'années faudrait-il alors pour atteindre $16\,000$ dirhams ?

INDICE

Outil : des intérêts simples donnent une suite arithmétique $D_n = 8\,000 + 400\,n$.

Exercice 5

Quatre limites par les suites de référence

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $a_n = 3 + \dfrac{2}{n^2}$, $b_n = n^2 + \sqrt{n}$, $c_n = \dfrac{4n^2 - n}{2n^2 + 3}$ et $d_n = n^2 - 6n$.

1.

Déterminer la limite de (a_n) et celle de (b_n).

INDICE

Outil : les limites de $\dfrac{1}{n^2}$, de n^2 et de $\sqrt{n}$, puis la limite d'une somme.

2.

Déterminer la limite de (c_n).

INDICE

Début : le quotient est une forme indéterminée ; divise le numérateur et le dénominateur par n^2.

3.

Déterminer la limite de (d_n).

INDICE

Point délicat : n^2 et $6n$ ont tous deux pour limite $+\infty$; factorise par n avant de conclure.

Exercice 6

Puissances d'un réel et valeur d'un stock

1.

Déterminer la limite de $(0{,}85^n)$ et celle de $(1{,}3^n)$.

INDICE

Outil : compare chaque raison à 1.

2.

Les suites $((-0{,}6)^n)$ et $((-1{,}2)^n)$ ont-elles une limite ?

INDICE

Point délicat : regarde la position de la raison par rapport à -1 et à 1.

3.

La valeur d'un stock fictif, en milliers de dirhams, vaut $s_n = 7 - 4 \times 0{,}5^n$ le mois n. Déterminer la limite de (s_n) et l'interpréter.

INDICE

Outil : la limite de $(0{,}5^n)$, puis les opérations.

Exercice 7

Le prix moyen d'un article

Une entreprise fictive estime le prix moyen d'un article, en centaines de dirhams, au mois n par $u_n = \dfrac{2n+5}{n+1}$. On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+5}{x+1}$, de sorte que $u_n = f(n)$.

1.

Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de (u_n).

INDICE

Outil : la dérivée d'un quotient $\dfrac{u}{v}$ est $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

2.

Déterminer la limite de (u_n).

INDICE

Début : cherche la limite de f en $+\infty$ en factorisant par x.

3.

Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 2 = \dfrac{3}{n+1}$. En déduire que $2 < u_n \leq 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Outil : réduis au même dénominateur. **Ensuite :** utilise la question 1 pour le majorant.

Exercice 8

Une suite non monotone et sa limite

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{3n + (-1)^n}{n+1}$.

1.

Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3. La suite est-elle monotone ?

INDICE

Outil : $(-1)^n$ vaut 1 pour n pair et -1 pour n impair.

2.

Montrer que $\dfrac{3n-1}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{3n+1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Début : pars de $-1 \leq (-1)^n \leq 1$. **Point délicat :** le diviseur $n+1$ est strictement positif.

3.

En déduire la limite de (u_n).

INDICE

Outil : calcule la limite de chaque borne, puis cite le théorème d'encadrement.